УДК 681.3.06

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк

ІНТЕНСІОНАЛЬНО-ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

Запропоновано інтенсіонально-орієнтований підхід до визначення основних понять логіки. Розглянуто інтенсіонали понять даного, функції та композиції. Введено поняття номінату (номінативного даного), та розглянуто його зв'язки з поняттям множини. Продемонстровано застосовність підходу в математичній логіці. Розглянуто спектр композиційно-номінативних логік. Описані композиції квазіарних предикатів на різних рівнях абстрактності. Виділені класи логік квазіарних предикатів, розглянуті їх основні властивості.

Вступ

Мета пропонованої роботи – демонстрація важливості та актуальності дослідження інтенсіональних аспектів, їх початкова ідентифікація та експлікація для основних понять логіки. Перш ніж переходити до детального обговорення інтенсіональності в логіці, зауважимо, що цей термін тлумачимо у традиційному для логіки смислі, а саме, інтенсіональність пов'язуємо із змістом поняття, а дуальне поняття – екстенсіональність – із його об'ємом [1].

Щоб зрозуміти, чи потрібні кардинальні зміни у розгляді основних понять логіки, спробуємо оцінити стан справ з цим питанням у сучасній науці. Спеціаліст з логіки та штучного інтелекту Б.О. Кулік пише [2], що для сучасної математики характерна зростаюча нестійкість низки математичних понять, багато строго визначених математичних термінів, які давно вже історично склалися, докорінно змінюють своє значення залежно від прихильності до певної наукової школи. Причому це стосується не тільки вузькоспеціальних термінів, а й таких, що лежать в основі сучасної математики: відношення, відповідність, відображення, декартів добуток, алгебраїчна система. Б.О. Кулік зауважує [2], що мова у даному випадку йде не просто про різні підходи до визначень цих термінів, а про те, що в різних авторитетних джерелах цим термінам відповідають принципово різні математичні структури. Така ситуація, на його думку, обумовлена в першу чергу штучно створеними термінологічними бар'єрами між різними науковими школами.

Інші дискусії з методологічних питань математики, логіки та інформатики також підтверджують висновок про появу нових визначень головних понять цих дисциплін, про розмитість понять тощо. Але ми хочемо відзначити об'єктивний характер переосмислення усталених фундаментальних понять та пошуку нових аспектів цих понять. Суб'єктивний фактор наукових шкіл тут лише є проявом цієї об'єктивності.

У чому ж причини спроб перевизначення фундаментальних понять? Не претендуючи на всебічний огляд таких причин, в рамках даної роботи ми зосередимось лише на одній, але дуже важливій обставині. Вона полягає у тому, що розвиток математики, логіки та інформатики продемонстрував певну обмеженість екстенсіонального підходу до експлікації фундаментальних понять. Справді, минулого століття набув популярності підхід до математики, заснований на екстенсіональній теорії множин Г. Кантора та формалістичній концепції Д. Гільберта. Цей підхід активно розвивався у чисельних трактатах Н. Бурбакі, він має дуже багато позитивних рис. Проте, як відзначив академік Арнольд [3], надмірна "бурбакізація" веде до викривленого тлумачення математики як гри у символи, розриву зв'язків зі змістовними поняттями предметних областей.

Як же можна подолати обмеженість екстенсіональності у математиці, логіці та інформатиці? Безумовно, це дуже складна проблема, яка вимагає системного підходу до її розв'язання. На нашу думку, одним з перших кроків у подоланні такої обмеженості є збагачення визначень головних понять інтенсіональними аспектами. Єдність інтенсіональних (змістовних) та екстенсіональних (об'ємних) моментів у визначенні понять була добре усвідомлена ще у давнину. Ми пропонуємо підтримати цю давню філософську традицію щодо математики, логіки та інформатики.

1. Методологічні аспекти інтенсіонально-орієнтованого підходу

Проблеми ідентифікації та експлікації головних понять логіки відносяться до методологічних проблем і тому їх розв'язок доцільно шукати, спираючись на певну гносеологічну платформу. Вибір такої платформи не є простою задачею. Пов'язано це з тим, що не існує загальноприйнятої гносеологічної теорії, більш того, на думку деяких спеціалістів її взагалі може не існувати [4]. Тому ми тут перелічимо лише декілька принципів, на які будемо спиратись, вибираючи за основу діалектичний підхід Гегеля [5].

Першим методологічним принципом є принцип розвитку від абстрактного до конкретного: поняття досліджуваного об'єкта визначається в процесі розвитку. Цей розвиток починається з абстрактних визначень, що відображають суттєві властивості об'єкта, і поступово переходить до більш конкретних визначень, які специфікують інші властивості об'єкта.

Варто зазначити, що наведений принцип (а також інші методологічні принципи та визначення) не слід тлумачити абсолютно. Треба брати до уваги відносність аспектів, переходи одних аспектів в інші, та пам'ятати в цілому про діалектику понять.

Рух від абстрактного до конкретного, як правило, здійснюється за тріадною схемою:

теза – антитеза – синтез

Ця схема відповідає рівням дослідження об'єкта: синкретичний рівень, аналітичний рівень, синтетичний рівень.

Принцип розвитку важливий для логіки та інформатики зокрема і тому, що веде до ієрархії визначень об'єкта різного рівня абстрактності та загальності. Говорячи про різні рівні (типи) абстракції, ми приходимо до розуміння, що визначення об'єкта на певному рівні абстракції (інтенсіональний аспект) має бути доповнене визначенням класу об'єктів, які належать цьому рівню (екстенсіональний аспект), а також те, що обидва аспекти мають вивчатись у їх єдності. Це дозволяє сформулювати наступний принцип.

Принцип єдності інтенсіональних та екстенсіональних аспектів: поняття мають бути представлені у єдності їх інтенсіональних та екстенсіональних аспектів, причому інтенсіональний аспект у цій єдності має провідну роль.

Наведені принципи, звичайно, не вичерпують методологічних принципів, що використовуються при розвитку понять логіки та інформатики. Вони швидше підкреслюють ті моменти, на які варто звернути увагу при їх дослідженні і які ще недостатньо розроблені на сучасному етапі.

2. Інтенсіональні аспекти понять математичної логіки

Математична логіка, як і інші науки, що відображають фундаментальні властивості світу, має визначатись в розвитку своїх понять. Ми спробуємо виокремити головні поняття логіки і визначити їх на різних рівнях абстракції, враховуючи їх інтенсіональні аспекти в першу чергу. Але спочатку спробуємо відокремити математичну логіку від інших типів логік, розглянувши невеликий приклад.

Подивимось на два рядки вірша Тараса Шевченка:

Садок вишневий коло хати,
хрущі над вишнями гудуть.

Як можна розглядати ці два рядки?

Для людини, яка незнайома з кирилицею та українською мовою, ці два рядки є просто послідовностями літер, розділених комою. Ця людина може уявляти які завгодно тлумачення цих рядків. Вона дивиться лише на форму, не маючи змоги проникнути у зміст. Ніяких (смислових) зв'язків цих рядків із навколишнім світом немає.

Для не зовсім розвиненого інтелекту дитини (яка розуміє українську мову) ці два рядки можуть привести її до висновку, що мова йде про таку пору року як весна.

Навряд чи дитина зможе побудувати зв'язки цих рядків з політикою Російської імперії або з теоріями біогенезу.

Для письменника Івана Франка це "немов моментальна фотографія настрою поетової душі, викликаного образом тихого весняного українського вечора". Інтелектуальному читачу, можливо, пригадаються часи його молодості, або картини важкого життя Тараса Шевченка, його туга за Вітчизною. В пошуках відповіді про причини його тяжкої долі такий читач може перейти до розгляду політичного устрою Російської імперії, її роль у світі, та як в цілому розвивається світ.

Наведені три типи розгляду відрізняються спробами зв'язування тексту з іншими явищами світу. У першому випадку текст сприймається формально, смислові зв'язки з позалінгвістичним контекстом відсутні (або суто формальні). У другому випадку розглядаються зовнішні, безпосередні, прості зв'язки. І нарешті, у третьому випадку робляться спроби розглянути усі зв'язки у їх тотальності. Цим трьом способам міркувань (розгляду, дискурсу) відповідають три типи логік.

1. Формальна (зокрема, математична) логіка. Ця логіка займається дослідженням предикатів.

2. Загальна (прикладна, практична) логіка. Ця логіка займається дослідженням понять.

3. Логіка пізнання (гносеологія). Ця логіка займається дослідженням категорій – всезагальних ознак предметів.

У математичній логіці під предикатом розуміють відображення даних у значення істинності; тексти, які вона розглядає, є твердженнями.

У загальній логіці поняття розглядається не в контексті категорії всезагальне–особливе–одиничне, а в контексті категорії загальне–одиничне, де загальне виступає скоріш як зовнішнє, ніж як іманентне, внутрішнє.

Таким чином, математична логіка відрізняється від інших типів логік зовнішнім (формальним) наданням смислу тверджень. Це в подальшому веде до концепції багатьох світів та інтерпретацій тверджень у цих світах. Математично це можна задавати за допомогою поняття предикату (у його різних аспектах).

Важко сформулювати одним реченням головну ідею математичної логіки, все ж візьмемо за головне її поняття істинність тверджень. З аналізу істинності випливає і другий аспект логіки – вивідність (істинних) тверджень. Задаючи істинність та вивідність як класи тверджень, отримуємо надзвичайно абстрактне тлумачення логіки, що має три складових:

- Твердження – $Prop$
- Істинність – $\models$
- Вивідність – $\vdash$

Класова над-абстрактна логіка. На початковому рівні уточнення понять логіки будемо вважати, що $Prop$ є класом (множиною), $\models$ та $\vdash$ є підкласами (підмножинами) $Prop$. Тому початкове визначення логіки буде таким.

Класова над-абстрактна логіка – це трійка

$$L(COA) = (Prop, \models, \vdash)$$

із вищезазначеними складовими.

Незважаючи на свою надзвичайну абстрактність, це визначення вже дозволяє надати початкові формулювання тим проблемам, які будуть розглядатися в логіках.

1. Несуперечливість:

– несуперечливість істинності: клас істинних тверджень, або тавтологій (термін тавтологія тлумачиться в загальному смислі, а не тільки в смислі пропозиційної логіки) є власним підкласом всіх тверджень, тобто $\models \subset Prop$ (тут $\subset$ – строге включення);

– несуперечливість вивідності: клас вивідних тверджень (теорем) є власним підкласом всіх тверджень, тобто $\vdash \subset Prop$.

2. Коректність: клас вивідних тверджень (теорем) є підкласом істинних тверджень (тавтологій), тобто $\vdash \subseteq \models$.

3. Повнота: клас істинних тверджень є підкласом вивідних тверджень, тобто $\models \subseteq \vdash$.

4. Розв'язність:

– розв'язність істинності: якщо $\Phi \in Prop$, то можна визначити, чи є Φ істинною, тобто можна відповісти на питання "$\Phi \in \models$?"

– розв'язність вивідності: якщо $\Phi \in Prop$, то можна визначити, чи є Φ вивідною, тобто можна відповісти на питання "$\Phi \in \vdash$?"

Безумовно, нас цікавлять відповіді на ці проблеми не в рамках теорії множин Кантора, а для тих теорій, в яких будуть сформульовані зазначені поняття логіки, тобто з урахуваннях їх дескриптивних та інтенсіональних аспектів.

Типова ситуація щодо співвідношень зазначених понять логіки показана на рис. 1.

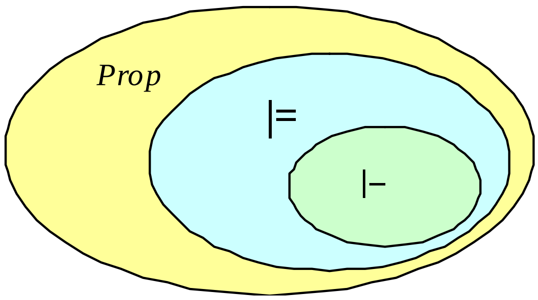

Рис. 1. Типове співвідношення основних понять логіки

На рис. 1 показана несуперечливість істинності, несуперечливість вивідності та коректність вивідності. Для логік верхнього рівня абстракції часто додатково виконується повнота, тобто співпадіння істинності та вивідності. Для достатньо складних логік розв'язність відсутня.

Індивідна над-абстрактна логіка. Із назви логіки L(COA) – класова над-абстрактна – бачимо, що слід зробити подальші конкретизації. Рівень класової над-абстрактної логіки формально не надає змістовних відмінностей класам тавтологій та теорем. Тому перша конкретизація буде пов'язана з запереченням тлумачення істинності та вивідності як завершених класів. Іншими словами, вважаємо, що класи тавтологій та теорем задані не як цілісності, а через свої індивідні елементи, тобто через певні механізми розпізнавання тавтологій та породження теорем (що, до речі, дозволяє розрізнити роль тавтологій та теорем в логіці). Як же задати ці механізми?

На абстрактному рівні розгляду можна вважати, що розпізнавання елемента відбувається за допомогою певної характеристичної функції, на яких ця функція приймає значення T (*true*), тобто $\models : Prop \to \{T\}$. Тоді породження задається багатозначною (недетермінованою) функцією $\vdash : \{T\} \xrightarrow{m} Prop$. Введені конкретизації, хоч і залишаються над-абстрактними, все ж трохи підводять нас до традиційних властивостей логічних понять. Тепер, зокрема, враховуючи аплікативність функцій розпізнавання та породження, ми маємо їх властивості та проблеми записувати не в термінах завершених класів, а в термінах одиничних (індивідних) елементів. Зокрема, якщо $\models(\Phi)\downarrow = T$, то пишемо просто $\models\Phi$. Так само пишемо $\vdash\Phi$ замість $\vdash(T)\downarrow = \Phi$.

Це дозволяє переформулювати основні проблеми логіки таким чином.

1. Несуперечливість
   – істинності: існує $\Phi \in Prop$, що не $\models\Phi$
   – вивідності: існує $\Phi \in Prop$, що не $\vdash\Phi$.
2. Коректність: якщо $\vdash\Phi$, то $\models\Phi$.
3. Повнота: якщо $\models\Phi$, то $\vdash\Phi$.
4. Розв'язність
   – істинності: чи можна визначити що справджується $\models\Phi$?
   – вивідності: чи можна визначити що справджується $\vdash\Phi$?

Тому друге визначення логіки буде наступним.

Індивідна над-абстрактна логіка – це трійка

$$L(IOA) = (Prop, \models, \vdash),$$

де $Prop$ – певна множина, $|= : Prop \to \{T\}$, $|- : \{T\} \xrightarrow{m} Prop$.

Зауважимо дві обставини.

Перша стосується того, що було б доцільно індексувати поняття логік щодо їх рівня, наприклад, писати $|=_{\mathrm{COA}}$, $|-_{\mathrm{COA}}$, $|=_{\mathrm{IOA}}$, $|-_{\mathrm{IOA}}$. Цього не робимо, щоб не перевантажувати текст.

Друга обставина пов'язана з тим, що можемо розглядати операції абстрагування, обернені до операцій конкретизації. Зокрема, можна робити абстракції від $|=_{\mathrm{IOA}}$ до $|=_{\mathrm{COA}}$. Це дозволяє пов'язати різні логіки в певну ієрархію. Тут часто можна використовувати ідеї та позначення об'єктно-орієнтованого моделювання та програмування.

Подальша конкретизація полягає у відмові (запереченні) синкретичного розгляду тверджень і початку переходу до їх аналітичного тлумачення. Цей перехід пов'язаний з виділенням у твердженнях двох складових – форми та змісту (синтаксису та семантики). Форма задається класом формул *Form*, а зміст – інтерпретаціями формул у класі моделей світів. З'являється новий рівень визначень логіки.

Абстрактна логіка моделей світів. На цьому рівні головним є поняття моделі світу. Згідно запропонованого підходу модель світу певного рівня (в семантичному аспекті) має інтенсіональну та екстенсіональну складові. Інтенсіональна складова описує (онтологічні та гносеологічні) властивості, екстенсіональна – задає клас одиничних моделей світів, які мають ці інтенсіональні властивості. Інтенсіональна модель світу займає провідну позицію. Це викликано тим, що саме вона індукує клас формул (мову логіки) відповідного рівня (синтаксичний аспект). Формули інтерпретуються в одиничних моделях. Тому модель світу певного рівня (типу) може бути описана таким чином.

Модель світу (певного семантичного рівня) має дві складові: інтенсіональну модель *IM* та клас екстенсіональних (одиничних) моделей *CEM*. Інтенсіональна модель індукує мову логіки *Lang*, яка задається класом формул *Form* (синтаксичний аспект). Кожна формула $\Phi \in Form$ інтерпретується в екстенсіональній моделі $M \in CEM$ за допомогою параметричного відображення інтерпретації $\mu_M : Form \to M$. Істинність Φ (тобто $|=\Phi$) також індукується інтенсіональною моделлю і задається на підставі значень $\mu_M(\Phi)$. Вивідність Φ (тобто $|-\Phi$) задається певним формалізмом, визначеним на множині формул, наприклад, певною формальною системою $(Form, Ax, R)$, де Ax – множина аксіом, R – множина правил виводу.

Абстрактна логіка моделей світів – це послідовність

$$\mathrm{L(AWM)} = (IM, CEM, Form, \mu, |=, |-)$$

із вищезазначеними складовими.

Зв'язок наведених понять показано на рис. 2.

Показаний рис. 2 обґрунтовує традиційний розподіл логіки на теорію моделей та теорію доведень.

Абстрактна логіка моделей світів не розкриває структуру (частини) інтенсіональної та екстенсіональної моделі, тому не можна продемонструвати зв'язки мови логіки з моделями світів. Це буде зроблено на наступних рівнях конкретизації. Такий перехід до розгляду більш конкретних рівнів дозволить проілюструвати тезу про провідну роль інтенсіональних аспектів, що саме вони визначають тип логіки: її мову, інтерпретації, істинність та, певним чином, і вивідність.

Композиційно-номінативні логіки предикатів. На цьому рівні будемо вважати, що модель світу задається:

- певним класом D станів світу (які також називаємо даними);
- класом предикатів Pr, заданих на станах світу;
- операторами (композиціями) породження нових предикатів.

Розглядаючи стани світів як дані, предикати – як функції в булеві значення, композиції – як оператори на предикатах, можна виділити як інтенсіональну складову цих понять (що буде зроблено в наступних розділах), так і екстенсіональну

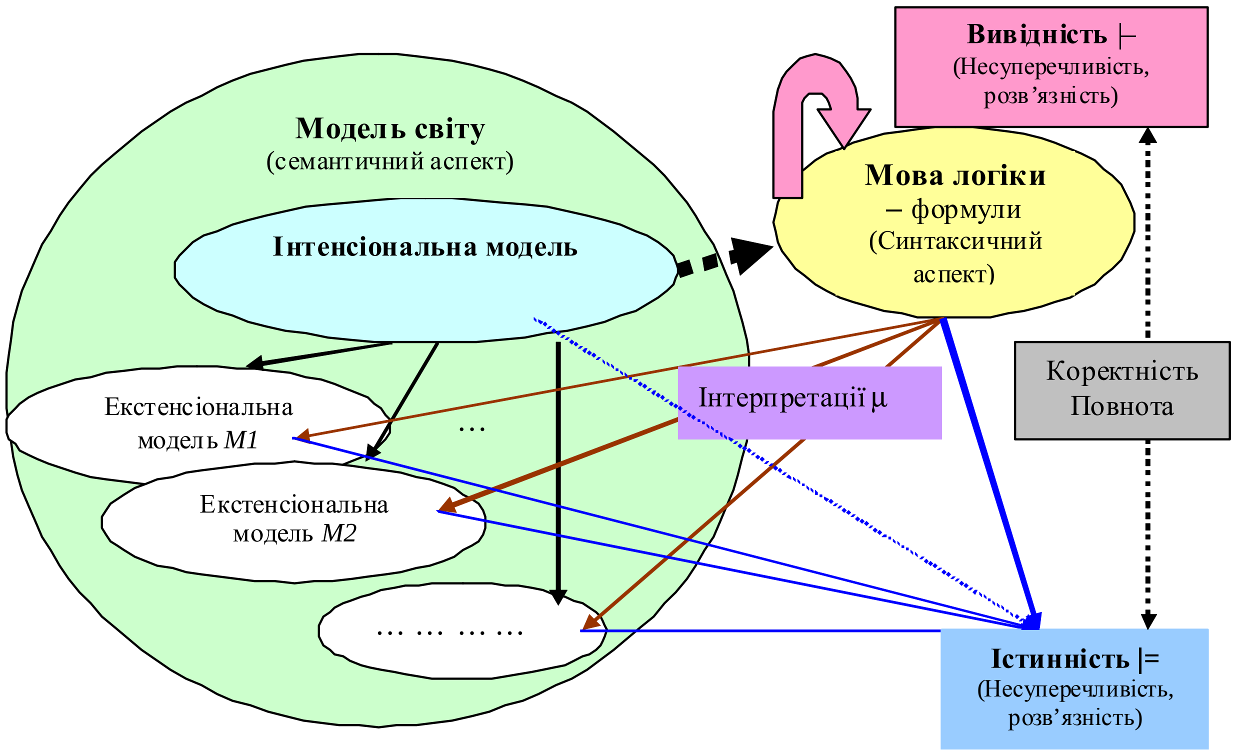

Рис. 2. Поняття абстрактної логіки моделей світів

складову. Екстенсіональна модель задається як предикатна композиційна система (*D*, *Pr*, *C*) [6, 7]. Зазначимо, що з інтенсіональної точки зору предикат є особливою функцією, вхідні аргументи яких можуть бути абстрактними ("чорними скриньками"), але результати є конкретними ("білими скриньками").

Предикатна композиційна система (*D*, *Pr*, *C*) фактично задає дві алгебри: алгебру даних (*D*, *Pr*) та алгебру предикатів (*Pr*, *C*). Центральним поняттям у моделях світів є поняття композиції, тому терми алгебри предикатів можуть розглядатися як формули логіки.

Важливо зазначити, що поняття трійки (*D*, *Pr*, *C*) не є рівноправними: клас даних (світ) і клас предикатів на даних (на станах світу) задають предметну складову логіки певного типу, а композиції – її універсальну (всезагальну) складову. Тому центральним поняттям в моделях світів є поняття композиції. Саме композиції визначають універсальні методи побудови предикатів, виступаючи ядром логіки певного типу. Це, до речі, видно із традиційних визначень понять логіки: дані та предикати означуються довільним чином, і лише для визначення значень складних формул (тобто композицій) використовується спеціальний механізм інтерпретації. Це означає, що визначення композицій є інтенсіональним, що дозволяє надалі інтерпретувати їх уніформним чином у різних екстенсіональних моделях.

Наведені міркування дозволяють сформулювати дві центральні проблеми композиційних моделей світів:

- проблема інтенсіональної уніформної експлікації класу композицій на підставі інтенсіональних визначень класів світів та предикатів,
- проблема вербалізації композицій, тобто побудови мови логіки певного типу, що має формальну семантику композицій, засновану на їх експлікаціях. Проблема вербалізації часто може бути вирішена визначенням базових композицій предикатної алгебри, що дозволяє тлумачити терми цієї алгебри як формули логіки.

Означування даних та предикатів може відбуватися за допомогою відношень номінації (іменування). Враховуючи роль відношень іменування в визначенні основних понять логіки, будемо говорити про композиційно-номінативні логіки (КНЛ).

Таким чином, КНЛ будуються за семантико-синтаксичною схемою. Визначення КНЛ реалізують єдність інтенсіонального та екстенсіонального аспектів. Дослідження семантичних аспектів КНЛ зводиться до вивчення властивостей алгебр предикатів, які є основним поняттям КНЛ. В цьому розумінні КНЛ можна назвати аксіоматичними системами алгебр предикатів. Основними проблемами теорії КНЛ є проблеми виділення класів алгебр предикатів, які задаються в єдності їх інтенсіональних та екстенсіональних аспектів.

Передумовою виникнення композиційно-номінативних логік стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язку все нових і нових задач моделювання та програмування. Класична логіка предикатів, незважаючи на численні позитивні вартості, має низку принципових обмежень, які ускладнюють її використання. Для виявлення причин обмеженості класичної логіки предикатів було зроблено [8] аналіз її основних понять. Із проведеного аналізу випливає, що при побудові КНЛ необхідно переходити від традиційного синтактико-семантичного до інтенсіонально-орієнтованого семантико-синтаксичного підходу. Композиційно-номінативні логіки мусять базуватися на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі номінативні відображення названі квазіарними.

Вибір класу квазіарних предикатів як семантичної основи логіки є центральним моментом в перебудові логіки в семантико-синтаксичному стилі. Цей вибір має декілька важливих наслідків:

– логіка стає логікою часткових, а не тотальних предикатів;

– з'являється можливість відокремити семантику від синтаксису та здійснити дослідження семантики окремо, в рамках алгебр предикатів;

– опираючись на інтенсіональні аспекти, ми отримуємо можливість побудови логік різного рівня абстракції;

– логіка стає ближчою до програмування.

Наведені визначення КНЛ все ще залишаються занадто абстрактними, щоб можна було дати конкретний опис інтенсіональних аспектів основних понять логік і зокрема, визначити їх композиції та мови логіки. Щоб це зробити, треба розглянути інтенсіонали даних та предикатів. Тому передусім розглянемо розвиток поняття даного з інтенсіонального погляду.

3. Розвиток поняття даного

Розвиток поняття даного як проекції категорії ціле–частина–елемент (від абстрактного до конкретного) ведемо за наступною тріадою:

Ціле (теза) – *Частини* (антитеза) – *Тотожність цілого і частин* (синтез)

Ця тріада означає, що спочатку розглядається об'єкт як цілісність (whole), у структуру якої не проникаємо; на другому рівні заперечується цілісність об'єкта як його неструктурованість і він далі тлумачаться як структурований, що складається з частин (parts); на третьому, синтетичному рівні, заперечується неструктурованість частин, які можуть розглядатися як цілі, що мають свої частини. Це призводить до тлумачення об'єкта на цьому рівні як ієрархічного (hierarchy).

Тому при розгляді логічних та програмних понять природно виділити три рівні:

– рівень W: об'єкт як ціле;

– рівень P: об'єкт як структурований (з частинами);

– рівень H: об'єкт як ієрархічний.

У плані зв'язку з основними логічними та програмними поняттями дані розглядаються як об'єкти, до яких застосовуються функції, зокрема, предикати. Для даних кожен з трьох рівнів розпадається (згідно розвитку від абстрактного до конкретного) на три підрівні:

– рівень A: абстрактний (теза);

– рівень C: конкретний – заперечення абстрактного рівня (антитеза);

– рівень S: синтетичний – подвійне заперечення (синтез).

Отримали 9 рівнів розгляду даних, які позначаємо таким чином:

1. D.W D.W.A D.W.C D.W.S	2. D.P D.P.A D.P.C D.P.S	3. D.H D.H.A D.H.C D.H.S

Зазначимо, що кожен рівень фактично визначає певний інтенсіонал. Об'єкти, які мають певний інтенсіонал, задають екстенсіонал. Для абстрактних рівнів A екстенсіонал – багатий, для конкретних рівнів C – бідний. Більше того, об'єкт рівня C фактично подає сам себе, тобто його екстенсіонал є синглетоном.

Приклади даних рівня D.W:

1. Дані як "чорна скринька" (наприклад, ПІН-код у конверті) – D.W.A.

2. Дані як "біла скринька" (наприклад, символи певного алфавіту) – D.W.C.

3. Дані як "чорна" або "біла скринька" (зовнішній байдужий синтез, можемо відрізнити "чорну скриньку" від "білої") – D.W.S.

Головне питання в подальшому розгортанні наведеної схеми полягає у тому, як відбувається перехід з рівня W на рівень P. Найважливішим тут є зв'язок між частинами. Природно починати з найбільш абстрактного розгляду зв'язків, а саме, що це перехід до байдужих одна до одної частин. Іншими словами, вважаємо, що зв'язки частин дуже слабкі – фактично частини незв'язані між собою.

Зафіксуємо такий розгляд у вигляді наступного постулату.

Постулат незв'язності частин даних. На рівні D.P частини даних вважаються незв'язаними (слабко зв'язаними) між собою.

Тому дані цього рівня будемо називати сукупностями (в англійській – ag·gre·gate – a mass or body of units or parts somewhat loosely associated with one another: Merriam–Webster's Online Dictionary). Тому цей перехід є першим (найпростішим) запереченням рівня W.

Такі незв'язні між собою частини будемо називати елементами даних (тут слід відрізняти вживання цього терміну у наведеному смислі від його використання в категорії ціле–частини–елемент).

Приклади даних рівня D.P:

1. Пасажири в автобусі (для перехожих) є "чорними скриньками", які слабко зв'язані між собою, і тому утворюють певну сукупність – рівень D.P.A. Дані такого рівня будемо називати скупченнями (assemblage). Ще одним прикладом може бути купа шоколадних яєць "Кіндерсюрприз", адже їх вміст невідомий.

2. Мешканців певної квартири можна розглядати як сукупність "білих скриньок" – рівень D.P.C. Дані такого рівня будемо називати множинами (set).

Для даних рівня D.P.A. (скупчень) можна робити перевірку на порожність (має таке дане елементи чи не має), можна робити об'єднання таких даних ("звалити" дві "купи" в одну "купу"), проте перетин даних рівня D.P.A. визначити неможливо.

На рівні D.P.C. варто зупинитися детальніше, тому що поняття множини – одне з найважливіших понять математики. Як же тлумачаться множини в математиці? На підставі первісних визначень Кантора та згідно з нашою схемою розвитку поняття даних, сформулюємо наступні інтенсіональні властивості множин.

Вважаємо, що множини складаються з елементів, для яких діють такі постулати:

- елементи незв'язні між собою (фіксується аксіомою екстенсіональності);
- елементи розрізнюються один від одного (інакше кажучи, рівність або нерівність елементів розв'язна. Зауважимо, що розв'язність тут тлумачимо інтуїтивно, в широкому плані, не вимагаючи наявності

певного механізму розв'язку, як це робиться в теорії алгоритмів);

- належність елемента множини розв'язна (інакше кажучи, маючи елемент і множину, можна відповісти на питання, чи належить елемент множині, чи ні. Належність – тільки двозначна).

Перейдемо до розгляду рівня D.P.S. Це синтетичний рівень, на якому елементи є синтезом абстрактного та конкретного. Але на цьому рівні це синтез не зовнішній, не синтез байдужих елементів, а синтез внутрішній, сутнісний. Цей синтез говорить про те, що елемент ми розглядаємо як такий, що має дві сторони: одна – "біла" – конкретна, друга – "чорна" – абстрактна. У чому саме суть цього синтезу випливає з якості даного як об'єкта, який є формою подання інформації, тобто дозволяє записувати, зберігати та надавати інформацію. Оскільки при запиті інформації (а також для інших використань) інформація ще невідома ("чорна скринька"), то запит може відбуватися лише за допомогою "білої скриньки" – імені (символу, знаку та таке інше). Отже зв'язок частин в даному цього рівня є зв'язком іменування. Це можна підтвердити й іншими обставинами – як писав Гегель, царство імен є першим царством свідомості. Таким чином, будемо говорити про номінативні елементи.

Сукупності номінативних елементів будемо називати номінатами (nominat). Це – неологізм, який походить від латинського nomen – ім'я.

Наведене розгортання понять множини та номінату дозволяє чітко відрізнити одне поняття від іншого. Як бачимо, поняття номінату є синтезом абстрактного та конкретного. Імена розглядаються як конкретні об'єкти, що мають властивості елементів множини, а значення – як абстрактні об'єкти. Тому для номінатів деякі операції над множинами (зокрема, перетин) не можуть бути визначені на верхньому рівні. Звичайно, при пониженні рівня абстракції до тлумачення значень як "білих скриньок", можемо говорити про номінати як множини. В певній мірі доцільнішим для подання номінатів видається використання функцій, позаяк функції дозволяють використання абстрактних значень, що не дозволяється в множинах. Наведені міркування обґрунтовують принцип теоретико-функціональної формалізації поняття даного [6]. Але найбільш прийнятним видається розвиток теоретико-номінатної парадигми, яка інтегрує інтенсіональні та екстенсіональні аспекти даних і яка може виступити альтернативою екстенсіональній теоретико-множинної парадигмі.

Таким чином, рівень D.P (рівень сукупностей) розділяється на три підрівні, на яких визначаються поняття скупчення, множини та номінату.

Тепер перейдемо до наступного рівня – D.H. Це синтетичний рівень, тут виходимо на синтез частина–ціле. Синтез (тотожність ціле = частина) має два напрямки розгляду. З одного боку, тлумачимо цей синтез як те, що частини можуть розглядатися як цілі, які мають свої частини. З іншого боку, із частин можна скласти ціле. Кожен з цих напрямків веде до ієрархічних даних. Ця ієрархічність будується як фундована (традиційні теорії, множин зокрема), або як нефундовані (нетрадиційні, ко-алгебраїчні теорії).

Якщо приймаємо постулат гомогенності частин і цілого (якість частин така сама як і якість цілого), то ієрархічність часто можна формалізувати за допомогою рекурентних, індуктивних та рекурсивних визначень. Звідси випливає важливість цих понять в логіці та програмології.

Розвиток поняття даного можна підсумувати рис. 3.

Зазначимо ще раз, що поняття номінату і множини, хоч і не зводяться одне до одного, але на певному рівні абстракції взаємно моделюють одне одного. Подаючи розвиток цих понять у вигляді конусів, можна показати їх зв'язки на рис. 4.

Подібним чином співвідносяться поняття номінату та функції, але підставою для розрізнювання будуть дескриптивні аспекти.

4. Розвиток поняття функції

Предикати в математичній логіці трактуються як функції спеціального вигляду, значеннями яких є булеві значення T та F. Тому після розвитку поняття да-

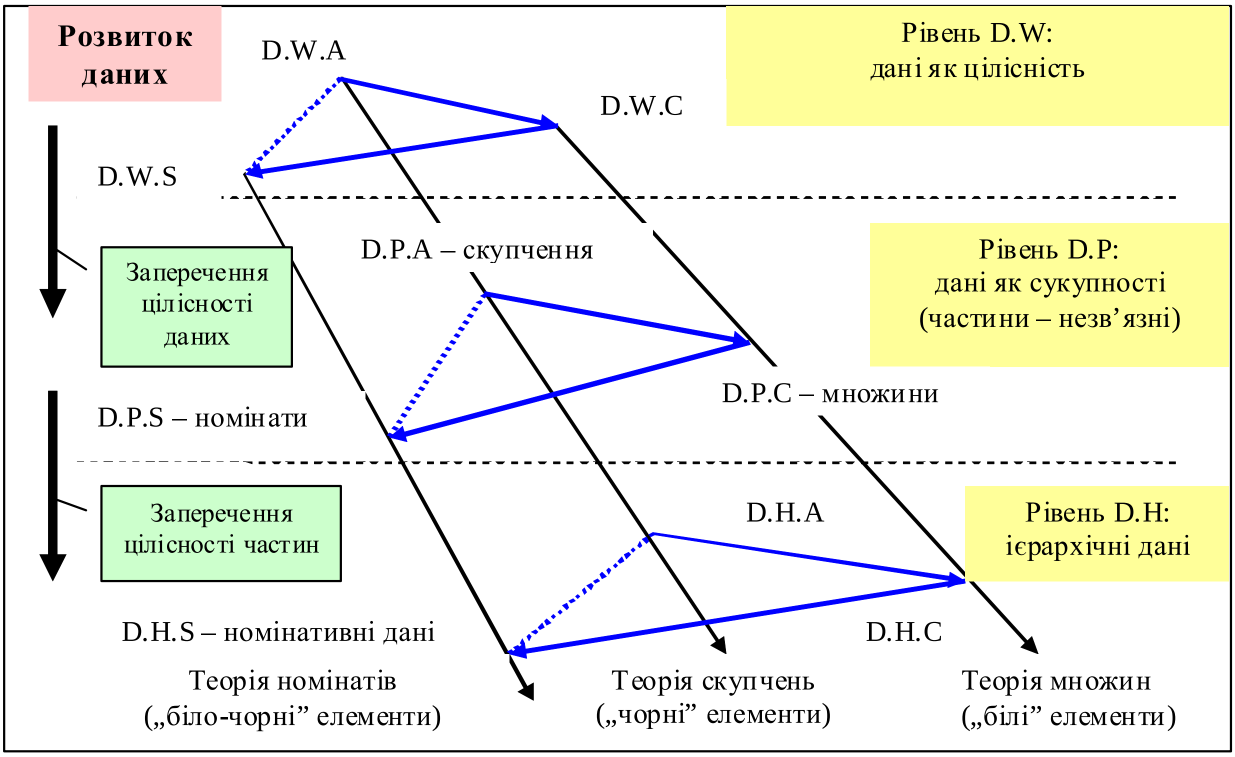

Рис. 3. Діаграма розвитку поняття даного

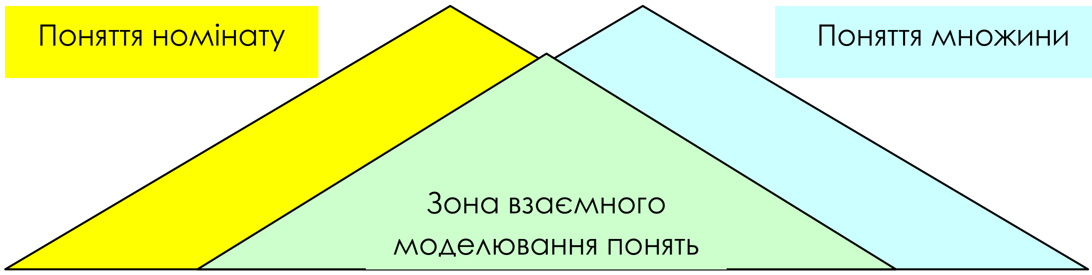

Рис. 4. Діаграма взаємозв'язку понять множини та номінату

ного природним є розвиток поняття функції. Такий розвиток подібний до розвитку поняття даного.

Таким чином, отримуємо наступні 9 рівнів розгляду функції:

купність" та "елемент", то для функцій рівень F.P називаємо рівнем (функціональних) комплексів, а частини цього рівня – (функціональними) компонентами. Вони мають певні (нетривіальні) зв'язки.

1. F.W F.W.A F.W.C F.W.S	2. F.P F.P.A F.P.C F.P.S	3. F.H F.H.A F.H.C F.H.S

Головна особливість полягає у тому, що на відміну від даних, частини функцій є зв'язаними між собою. Якщо для даних рівня D.P використовувалися терміни "сукупність" та "елемент", то для функцій рівень F.P називаємо рівнем (функціональних) комплексів, а частини цього рівня – (функціональними) компонентами. Вони мають певні (нетривіальні) зв'язки.

Таким чином, виникає низка термінів: елемент – компонент – частина, які характеризуються зміцненням зв'язків всередині цілого.

Рівень F.H будемо називати рівнем ієрархічних функціональних комплексів. Цей рівень пов'язаний, зокрема, з різними теоріями покрокової розробки програм (експлікативністю процесу програмування), теоріями повторного використання програм тощо. В даній роботі цей рівень досліджувати не будемо.

Зупинимось детальніше на характеристиках функцій рівня F.P.

Рівень F.P.A (абстрактний комплекс) – зв'язки та компоненти – абстрактні. Наприклад, у кінофільмах часто бачимо, як герої пробують відключити часові бомби. Є багато дротів і складових, але невідомо, що всередині і який дротик можна перерізати, щоб відключити механізм підриву.

Рівень F.P.C (конкретний комплекс) – все відомо, тому функції цього рівня подають самих себе, іншими словами – екстенсіонал функції цього рівня є синглетоном.

Найважливіший є синтетичний рівень F.P.S (синтетичний комплекс), який характеризується фіксованими зв'язками між абстрактними компонентами. Його важливість пояснюється широким використанням. Наприклад, коли ми збираємо свою конфігурацію комп'ютера, то компоненти – пам'ять, вінчестер, і тому подібне, – можна сприймати як "чорні скриньки" зі входом та виходом, але зв'язки яких відомі.

Наявність компонент як абстрактних дозволяє вважати, що в принципі замість деякої компоненти може бути якась інша. Це фактично виводить нас до здійснення абстракції від компонент. Зроблена абстракція на рівні синтетичного комплексу – композиція. Тим самим синтетичний комплекс можна розглядати як аплікацію композиції до компонентів. Але це вже аплікація іншого рівня: вона застосовується до номінату компонент, і має специфічні властивості.

Розглянемо цю абстракцію детальніше. Синтетичний комплекс при цій абстракції подається двома складовими: компоненти ("чорні скриньки"), та зв'язки компонент ("білі скриньки"). Ця абстракція не має бути занадто сильною, що могло б порушити можливість поєднання цих двох складових для створення моделі комплексу.

Зв'язок відбувається через імена компонент (функцій). Тому виникають функціональні номінати. Отже, композицію можна уточнювати як оператор, що визначений на іменованих функціях.

Зазначимо, що термін "композиція" вживається у двох значеннях: по-перше, як процес побудови об'єкта, а по-друге, як результат побудови. Це відповідає - визначенням терміну "композиція" в словниках.

Важливість композиційності в логіці та програмології була усвідомлена В.Н. Редьком. На основі принципу композиційності В.Н. Редько розвинув спеціальний напрямок в програмуванні, який отримав назву композиційного програмування [9].

Розвиток поняття композиції у найпростішому варіанті подібний до розвитку поняття функції. Тому приходимо до понять метакомпозиції та таких їх конкретизацій як суперпозиція та рекурсія. Інший напрямок розвитку композицій – розкриття композиції в теорії комбінаторів та лямбда-числення.

Підсумовуючи наведений розвиток понять даного та функції, відзначимо, що поняття слід розглядати у єдності їх інтенсіональних та екстенсіональних аспектів. Головною складовою інтенсіоналу поняття є властивості відповідного рівня абстракції. Тому позначення рівнів будемо використовувати також для позначення інтенсіоналів понять.

5. Спектр композиційно-номінативних логік

Інтенсіональні моделі композиційно-номінативних логік у першу чергу задаються рівнями розгляду даних (станів світів). Ці рівні були вказані на рис. 3.

Таким чином, отримуємо наступні рівні КНЛ:

- рівню D.W відповідають пропозиційні та сингулярні логіки;

- рівню D.P – логіки першого порядку;
- рівню D.H – логіки номінативних даних.

На **пропозиційному** рівні (D.W.A) дані трактуються гранично абстрактно, як "чорні" скриньки. На цьому рівні предикати мають вигляд $A \rightarrow \{T, F\}$, де A – множина абстрактних даних.

Базовими композиціями фінітарних пропозиційних логік є Клінієві композиції диз'юнкції $\vee$ та заперечення $\neg$.

Базовими композиціями інфінітарних пропозиційних логік [10] є інфінітарні множинні диз'юнкція $\vee_K$, кон'юнкція $\&_K$ та композиція заперечення $\neg_K$.

Сингулярний (D.W.C) рівень може трактуватися як конкретизація пропозиційного. У цьому випадку дані трактуються конкретно, як "білі" скриньки. На сингулярному рівні фіксується єдиний клас даних, що пояснює його назву.

Композиціями сингулярного рівня є конкретні аплікативні композиції. Для сингулярних логік збудована [10] спеціальна інфінітарна алгебра сингулярних композицій Кліні.

Рівню D.W.S відповідають пропозиційні логіки змішаного (абстрактно-сингулярного) рівня. В даній роботі їх розглядати не будемо.

Подальший розвиток приводить до класів логік, для яких рівень розгляду даних є синтезом двох перших рівнів. На цьому рівні дані номінативні, вони розглядаються як "сірі" скриньки, побудовані з "білих" і "чорних". Номінативні дані будуються індуктивно із множини предметних імен та множини предметних значень. Відповідні логіки будемо відносити до **номінативного** рівня, який дуже багатий і розпадається на низку підрівнів.

Рівням D.P.A та D.P.C відповідають спеціальні логіки, які вимагають окремого дослідження.

На рівні D.P.S дані можна трактувати як однозначні відображення типу $V \rightarrow A$ із множини предметних імен V у множину предметних значень A. Такі 1-рівневі однозначні номінативні дані називають іменними множинами (ІМ). Функції, задані на ІМ, називають квазіарними.

Для логіки природно розглядати квазіарні функції двох типів.

Нехай ^{V}A – множина всіх ІМ з множинами предметних імен V та предметних значень A.

Відображення вигляду $^{V}A \rightarrow \{T, F\}$ назвемо V-квазіарними предикатами на A.

Відображення вигляду $^{V}A \rightarrow A$ назвемо V-квазіарними функціями на A.

Множини V-квазіарних предикатів та функцій на A позначаємо відповідно Pr^A та Fn^A.

Найабстрактнішими серед логік номінативного рівня є реномінативні логіки. Починаючи з реномінативного рівня можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації (перейменування).

Фінітарні реномінативні логіки запропонована в [11]. Базовими композиціями таких логік є $\vee, \neg$ та реномінація $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Для фінітарних реномінативних логік побудовані числення Гільбертівського типу [12] та Генценівського типу [13], доведені їх коректність та повнота.

Інфінітарна реномінативна логіка екваційного типу запропонована в [14]. Базовими композиціями таких логік є $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$ та інфінітарна реномінація $\boldsymbol{R}^{\rho}$. Побудоване екваційне числення інфінітарної реномінативної логіки, доведені його коректність і повнота.

На кванторному рівні можна застосовувати квазіарні предикати до всіх предметних значень (тотальна аплікативність предикатів). Це дозволяє ввести композиції квантифікації $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$. Фінітарні логіки кванторного рівня досліджувались, зокрема, в [8, 15–17]. Базовими композиціями таких логік є $\vee, \neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}$.

Інфінітарна логіка кванторного рівня запропонована в [18]. Базовими композиціями інфінітарних кванторних логік є $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$, $\boldsymbol{R}^{\rho}$, $\exists\boldsymbol{x}$.

На кванторно-екваційному рівні з'являються можливості ототожнення і розрізнення значень за допомогою спеціальних предикатів рівності $=_{xy}$. Фінітарні логіки кванторно-еквацiйного рівня досліджені в [19]. Базовими композиціями таких логік є $\vee, \neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists \boldsymbol{x}$.

На функціональному рівні маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції $\boldsymbol{S}^{\bar{x}}$.

Базовими композиціями функціонального рівня є $\vee, \neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}$.

Для роботи з окремими компонентами даних в множині Fn^A природно виділити множину спеціальних функцій деномінації (розіменування) $Nf^A = \{'\boldsymbol{v} \mid v \in V\}$. При введенні функцій розіменування $'\boldsymbol{x}$ композиції реномінації можна промоделювати за допомогою суперпозиції, тому базовими композиціями функціонального рівня вважаємо $\vee, \neg, \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}$.

На функціонально-еквацiйному рівні можна ототожнювати і розрізняти предметні значення. Це дає змогу додатково ввести спеціальну композицію рівності **=**.

Базовими композиціями функціонально-еквацiйного рівня є $\vee, \neg, \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}$, **=**.

Логіки функціонального та функціонально-еквацiйного рівня досліджувались, зокрема, в [17, 20, 21].

На наступному рівні абстракції (D.H) дані розглядаються як ієрархічні. Рівням D.H.A та D.H.C тут відповідають спеціальні логіки, які вимагають окремого дослідження.

Рівень D.H.S є рівнем ієрархічних номінативних даних. Відповідні логіки названі логіками номінативних даних (ЛНД). Такі логіки досліджені в [22].

ЛНД будуються у стилі теорії допустимих множин на основі властивостей відношення номінативної належності. Доведена коректність (несуперечливість) аксіоматичної теорії номінативних даних. На основі ЛНД визначається клас багатозначних натурально (абстрактно) обчислюваних функцій над номінативними даними. Такий клас можна подати [22] за допомогою Σ-предикатів ЛНД.

5.1. Композиції квазіарних предикатів.

У загальному випадку під предикатом на множині D розуміють довільну часткову функцію вигляду $P : D \to Bool$, де $Bool = \{T, F\}$.

Областю істинності та областю хибності довільного предикату P на множині D назвемо відповідно множини $I_P = \{d \in D \mid P(d)=T\}$ та $F_P = \{d \in D \mid P(d)=F\}$.

Якщо P тотальний, то $I_P \cup F_P = D$.

Предикат P на множині D назвемо (частково) істинним, якщо для довільних $d \in D$ із умови $P(d)\downarrow$ випливає $P(d)=T$.

Частково істинні предикати називають також неспростовними.

Предикат P на множині D назвемо виконуваним, якщо існує $a \in D$ таке, що $P(d)\downarrow=T$.

n-арною композицією, або n-арною операцією на множині функцій Fn назвемо довільну функцію вигляду $Fn^n \to Fn$.

Композиції пропозиційного рівня. На пропозиційному рівні предикати розглядаються як функції вигляду $P : A \to \{T, F\}$, де A сукупність абстрактних даних («чорних скриньок»).

Засобом утворення складніших предикатів із простіших є логічні операції (композиції), які не враховують особливостей даних – пропозиційні композиції, або логічні зв’язки.

Основними, традиційними логічними зв’язками є такі: 1-арна композиція *заперечення* $\neg$ та бінарні композиції диз’юнкція $\vee$, кон’юнкція **&**, імплікація $\to$, а також бінарні композиції еквіваленція $\leftrightarrow$ та роздільна диз’юнкція $\oplus$.

Визначення композицій $\neg$, $\vee$, $\to$, **&**, $\leftrightarrow$, $\oplus$ подібні до визначень класичних логічних зв’язок для тотальних предикатів та висловлень [23–26], при цьому враховуємо частковість предикатів.

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$ $\to(P, Q)$, **&**(P, Q), $\leftrightarrow(P, Q)$, $\oplus(P, Q)$ звичайно будемо позначати $\neg P$, $P \vee Q$, $P \to Q$, P**&**Q, $P \leftrightarrow Q$, $P \oplus Q$.

Зазначені предикати задамо так:

$$(\neg P)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ P(d)\downarrow= F, \\ F,\ \textit{якщо}\ P(d)\downarrow= T, \\ \textit{невизначене, якщо}\ \ P(d)\uparrow. \end{cases}$$

$$(P\vee Q)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ \ P(d)=T\ \ \textit{або}\ \ Q(d)=T, \\ F,\ \textit{якщо}\ \ P(d)=F\ \ \textit{та}\ \ Q(d)=F, \\ \textit{невизначене}\ \ \textit{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P\to Q)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ \ P(d)=F\ \ \textit{або}\ \ Q(d)=T, \\ F,\ \textit{якщо}\ \ P(d)=T\ \ \textit{та}\ \ Q(d)=F, \\ \textit{невизначене}\ \ \textit{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P\&Q)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ \ P(d)=T\ \ \textit{та}\ \ Q(d)=T, \\ F,\ \textit{якщо}\ \ P(d)=F\ \ \textit{або}\ \ Q(d)=F, \\ \textit{невизначене}\ \ \textit{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P\leftrightarrow Q)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ \ P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow\ \ \textit{та}\ \ P(d)=Q(d), \\ F,\ \textit{якщо}\ \ P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow\ \ \textit{та}\ \ P(d)\neq Q(d), \\ \qquad \textit{невизначене}\ \ \textit{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

$$(P\oplus Q)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ \ P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow\ \ \textit{та}\ \ P(d)\neq Q(d), \\ F,\ \textit{якщо}\ \ P(d)\downarrow,\ Q(d)\downarrow\ \ \textit{та}\ \ P(d)=Q(d), \\ \qquad \textit{невизначене}\ \ \textit{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Основні властивості введених логічних зв'язок цілком аналогічні властивостям класичних логічних зв'язок для тотальних предикатів та висловлень [23–26].

Іменні множини. Нехай A та V – довільні множини. Трактуємо A як множину базових даних, V – як множину предметних імен.

V-іменною множиною (V-ІМ) над A (екстенсіональний аспект) називають довільну множину пар вигляду (v, a), де $v\in V$, $a\in A$. При постулюванні відсутності омонімії іменні множини однозначні в тому розумінні, що вони не можуть одночасно мати елементи (v, a) та (v, b) при $a\neq b$. Кожну таку ІМ можна трактувати як однозначну функцію $\delta: V\to A$.

V-ІМ традиційно записують [27] у вигляді $\{(v_1, a_1), ..., (v_n, a_n), \ \dots\}$. Будемо їх задавати у вигляді $[v_1\mapsto a_1,...,v_n\mapsto a_n ,...]$. Тут $v_i\in V$, $a_i\in A$, причому $v_i\neq v_j$ при $i\neq j$.

Множину всіх V-ІМ над A будемо позначати ${}^VA$ або $V\to A$.

Введемо функцію $im: {}^VA\to 2^V$:

$im(\delta) = \{v\in V \mid v\mapsto a\in\delta$ для деякого $a\in A\}$.

Множину всіх V-ІМ $\delta\in {}^VA$ таких, що $im(\delta)=X$, де $X\subseteq V$, будемо позначати A^X.

Такі V-ІМ є тотальними однозначними функціями із X в A.

Множину всіх скінченних (фінітних) V-ІМ над A позначаємо ${}^VA_F$ або $(V\to_F A)$.

V-ІМ δ V-повна, якщо $im(\delta)=V$.

Множину всіх V-повних ІМ над A будемо позначати A^V.

Для V-ІМ природним чином вводимо теоретико-множинні операції $\cap$ та \.

Введемо параметричну операцію $\|X$ звуження V-ІМ за множиною $X\subseteq V$:

$$\delta\|X = \{v\mapsto a\in\delta \mid v\in X\}.$$

Введемо операцію ∇ накладки V-ІМ δ_2 на V-ІМ δ_1:

$$\delta_1\nabla\delta_2 = \delta_2\cup(\delta_1\|(V\setminus im(\delta_2))).$$

Операцію реномінації $\mathbf{r}: {}^VA\times{}^VV_F\to{}^VA$ задамо так:

$$\mathbf{r}([v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n], \delta) =$$
$$= [v_1\mapsto\delta(x_1),...,v_n\mapsto\delta(x_n)]\cup(\delta\|(V\setminus\{v_1,...,v_n\})).$$

При фіксуванні множини пар імен $[v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n]$ говоримо про параметричну операцію реномінації $\mathbf{r}^{[v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n]}: {}^VA\to{}^VA$, яку традиційно позначають $\mathbf{r}^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}$.

Операція $\mathbf{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ монотонна в наступному смислі:

якщо $\delta_1 \subseteq \delta_2$, то $\mathbf{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\delta_1) \subseteq \mathbf{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\delta_2)$.

Квазіарні функції та предикати. На рівні P.D.S функції та предикати розглядаються як квазіарні, вони задаються на множинах вигляду ${}^{V}A$.

Довільну функцію вигляду $f : {}^{V}A \to R$ назвемо V-квазіарною функцією.

Довільну функцію вигляду $f : {}^{V}A_F \to R$ назвемо V-фінарною функцією.

Якщо множина імен V мається на увазі, то V-квазіарні та V-фінарні функції назвемо просто квазіарними та фінарними.

Довільну функцію вигляду $f : A^X \to R$ назвемо X-арною функцією.

Традиційні n-арні функції вигляду $f : A^n \to R$, можуть трактуватися як $\{1,..., n\}$-арні функції (див. [25]). Тому для $\{1,..., n\}$-арних функцій вживатимемо термін n-арні функції.

V-квазіарна функція f повнототальна, якщо $f(d)\downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Умова повнототальності означає визначеність функції на всіх V-повних даних.

Дуже важливим є поняття неістотного імені. Неістотність предметного імені означає, що функція не реагує на значення цього імені. Поняття неістотного предметного імені можна уточнити різними способами. Одне із таких уточнень – строго неістотне предметне ім'я:

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для V-квазіарної функції f, якщо для довільних $d \in {}^{V}A$ та $a, b \in A$ маємо $f(d\nabla x\mapsto a) = f(d\nabla x\mapsto b)$.

Враховуючи той факт, що поняття істинності предикату ми уточнили як *часткову* істинність (з точністю до визначеності), тобто як неспростовність, основним уточненням поняття неістотного предметного імені буде наступне:

Ім'я $x \in V$ неістотне для V-квазіарної функції f, якщо для довільних $d \in {}^{V}A$ та $a, b \in A$ маємо $f(d\nabla x\mapsto a) \cong f(d\nabla x\mapsto b)$.

Композиції реномінативного рівня. Можливість оперування з компонентами даних вперше з'являється на реномінативному рівні. Починаючи з цього рівня, можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації (перейменування). Композиція реномінації вперше з'являється на реномінативному рівні та успадковується на наступних рівнях.

Нехай Fn^A – множина V-квазіарних функцій вигляду ${}^{V}A \to R$.

Під композицією реномінації в загальному випадку будемо розуміти композицію $\boldsymbol{R} : Fn^A \times {}^{V}V_F \to Fn^A$, яка задається так.

Для довільних $f \in Fn^A$, $[v_1\mapsto x_1, ..., v_n\mapsto x_n] \in {}^{V}V_F$ та $\delta \in {}^{V}A$ маємо

$$\boldsymbol{R}(f, [v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n])(\delta) =$$
$$= f(\mathbf{r}([v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n], \delta)).$$

При фіксуванні множини $[v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n]$ будемо говорити про параметричну 1-арну композицію реномінації $\boldsymbol{R}^{[v_1\mapsto x_1,...,v_n\mapsto x_n]} : Fn^A \to Fn^A$, яку позначатимемо $\boldsymbol{R}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$.

Композиція $\boldsymbol{R}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ кожній V-квазіарній функції f ставить у відповідність V-квазіарну функцію $\boldsymbol{R}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(f)$, значення якої для кожного $d \in {}^{V}A$ обчислюється так:

$$\boldsymbol{R}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(f)(d) = f(\mathbf{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(d)) =$$
$$f([v_1\mapsto d(x_1),...,v_n\mapsto d(x_n)] \cup (d \,\|\, (V \setminus \{v_1,...,v_n\}))).$$

Введемо позначення вигляду $\bar{y}$ для $y_1, ..., y_n$. Тоді замість $\mathbf{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ та $\boldsymbol{R}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ будемо звичайно писати $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Тип функції $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(f)$ збігається з типом функції f. Тому можна говорити, зокрема, про реномінації V-квазіарних предикатів та про реномінації V-квазіарних функцій на A.

Для логік реномінативного рівня можна розглядати композицію реномінації та успадковані з пропозиційного рівня логічні зв'язки $\neg$, $\vee$, $\to$, **&**, $\leftrightarrow$, $\oplus$.

Композиції $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ назвемо базовими композиціями реномінативного рівня.

Як і на пропозиційному рівні, композиції $\to$, **&**, $\leftrightarrow$, $\oplus$ є похідними.

Основними властивостями композицій реномінації є RT – згортка тотожної пари імен, RR – згортка реномінацій, властивості дистрибутивності R$\vee$, R$\vee$, R$\to$, R&, R$\leftrightarrow$, R$\oplus$, а також RN – згортка в реномінації пари імен із неістотним вхідним ім'ям.

Властивості композицій реномінативного рівня описані в [12, 17].

Композиції кванторного рівня. На кванторному рівні виникає можливість застосовувати квазіарні предикати до всіх предметних значень. Це дозволяє ввести композиції квантифікації $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$. Такі композиції надзвичайно потужні.

Зауважимо, що в класичній логіці квантори звичайно вводяться на синтаксичному рівні, при визначенні формули, їх семантична роль як логічних операцій розкривається при інтерпретації формул. Для логіки квазіарних предикатів визначення композицій квантифікації $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$ узгоджуються з визначеннями відповідних кванторів класичної логіки, але при цьому треба врахувати частковість предикатів.

1-арна параметрична композиція $\exists\boldsymbol{x}$ кожному V-квазіарному предикату P ставить у відповідність V-квазіарний предикат $\exists\boldsymbol{x}(P)$, значення якого для кожного $d\in {}^{V}\!A$ задається так:

$$(\exists\boldsymbol{x}P)(d) = \begin{cases} T, \ \textit{якщо існує } b\in A:\ P(d\nabla x\mapsto b)=T, \\ F, \ \textit{якщо } P(d\nabla x\mapsto a)\downarrow=F \ \textit{для усіх } a\in A, \\ \quad \textit{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

1-арна параметрична композиція $\forall\boldsymbol{x}$ кожному V-квазіарному предикату P ставить у відповідність V-квазіарний предикат $\forall\boldsymbol{x}(P)$, значення якого для кожного $d\in {}^{V}\!A$ задається так:

$$(\forall\boldsymbol{x}P)(d) = \begin{cases} F, \ \textit{якщо існує } b\in A:\ P(d\nabla x\mapsto b)=F, \\ T, \ \textit{якщо } P(d\nabla x\mapsto a)\downarrow=T \ \textit{для усіх } a\in A, \\ \quad \textit{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Предикати $\exists\boldsymbol{x}(P)$ та $\forall\boldsymbol{x}(P)$ звичайно позначаємо $\exists\boldsymbol{x}P$ та $\forall\boldsymbol{x}P$.

Важливою властивістю є наступний критерій неістотності предметних імен:

Ім’я $x\in V$ неістотне для P $\Leftrightarrow$ $P\cong\forall\boldsymbol{x}P$ $\Leftrightarrow$ $P\cong\exists\boldsymbol{x}P$.

Залучаючи до розгляду композицію реномінації, отримуємо такі властивості:

– NR – неістотність верхніх імен реномінації;

– R$\exists$ та R$\forall$ – обмежені R$\exists$-дистрибутивність та R$\forall$-дистрибутивність:

Властивості композицій $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$ аналогічні властивостям відповідних кванторів класичної логіки [23–26]. Властивості композицій квантифікації описані, зокрема, в [15, 17].

Композиції функціонального та функціонально-еквацiйного рівня. На функціональному рівні маємо розширені можливості для формування нових аргументів для функцій і предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції.

На функціонально-еквацiйному рівні додатково маємо можливості ототожнення і розрізнення значень предметних імен. Це дозволяє ввести композицію рівності.

Нехай F^A та Fn^A – множини всіх функцій вигляду $f: {}^{V}\!A\to R$ *та* $f: {}^{V}\!A\to A$ відповідно.

Композиція суперпозиції $\boldsymbol{S}: F^A\times(V\to_F Fn^A)\to F^A$ задається наступним чином.

Для довільних $f\in Fn^A$, $[v_1\mapsto g_1,...,v_n\mapsto g_n]\in V\to_F Fn^A$, $d\in {}^{V}\!A$ маємо

$$\boldsymbol{S}(f, [v_1\mapsto g_1,...,v_n\mapsto g_n])(d) = f([v_1\mapsto g_1(d),...,v_n\mapsto g_n(d)]\cup(d\,\|\,(V\backslash\{v_1,...,v_n\}))).$$

При фіксуванні множини імен $\{v_1, ..., v_n\}$ можна говорити про параметричну композицію суперпозиції $\boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}: F^A\times(Fn^A)^n\to F^A$.

Така (n+1)-арна композиція кожним V-квазіарним функціям $f, g_1, ..., g_n$ співставляє V-квазіарну функцію $\boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}(f, g_1,...,g_n)$, значення якої для кожного $d\in {}^VA$ обчислюється так:

$$\boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}(f, g_1,..., g_n)(d) =$$
$$f([v_1\mapsto g_1(d),...,v_n\mapsto g_n(d)]\cup(d\,\|\,(V\backslash\{v_1,...,v_n\}))).$$

При конкретизації множини V-квазіарних функцій на A як множини $Fn^A\cup Pr^A$ природно говорити про суперпозиції двох типів:

– суперпозиції вигляду $(Fn^A)^{n+1}\to Fn^A$ функцій в функції;

– суперпозиції вигляду $Pr^A\times(Fn^A)^n\to Pr^A$ функцій в предикати.

Для роботи з окремими компонентами даних на функціональному рівні в множині Fn^A природно виділити множину спеціальних функцій деномінації (розіменування) $Nf^A=\{'v|\, v\in Z\}$. Тоді композицію реномінації можна промоделювати за допомогою суперпозиції. Справді, для довільної $g\in Fn^A\cup Pr^A$ маємо $\boldsymbol{R}^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(g) =$ $= \boldsymbol{S}^{v_1,...v_n}(g, 'x_1,..., 'x_n)$.

При явному введенні функцій розіменування базовими композиціями логік функціонального рівня є $\vee, \neg, \exists x, \boldsymbol{S}^{\bar{v}}$.

2-арна композиція рівності $= : Fn^A\times Fn^A\to Pr^A$ кожним V-квазіарним функціям f та g ставить у відповідність V-квазіарний предикат $=(f, g)$, значення якого для кожного $d\in {}^VA$ обчислюється так:

$$=(f, g)(d) = \begin{cases} T,\ \textit{якщо}\ f(d)\downarrow\ \textit{та}\ g(d)\downarrow\ \textit{та}\ f(d)=g(d), \\ F,\ \textit{якщо}\ f(d)\downarrow\ \textit{та}\ g(d)\downarrow\ \textit{та}\ f(d)\neq g(d), \\ \quad \textit{невизначене, якщо}\ \ f(d)\uparrow\ \textit{або}\ g(d)\uparrow. \end{cases}$$

Наявність функцій розіменування на функціонально-екваційному рівні є дуже природною завдяки можливості ототожнення і розрізнення значень предметних імен. Це дає змогу явно не вводити композиції реномінації.

Композиції $\vee, \neg, \exists x, =, \boldsymbol{S}^{\bar{v}}$ назвемо базовими композиціями логік функціонально-екваційного рівня.

До основних властивостей композицій суперпозиції відносять: дистрибутивність суперпозиції щодо логічних зв'язок S¬, S∨, S&, S→, S↔, S⊕; обмежену дистрибутивність суперпозиції щодо кванторів S∃b, S∀b; спеціальну дистрибутивність суперпозиції щодо кванторів S∃, S∀; згортку суперпозицій SS, згортки імен ZS та неістотних імен DD; згортку по неістотному імені ZN та спрощення для функцій розіменування DS.

Основними властивостями композиції рівності = є наступні: рефлексивність Rf, симетричність Sm, транзитивністьTr, заміна рівних в функціях EF та в предикатах EP, дистрибутивність суперпозиції щодо рівності SE.

Властивості композицій суперпозиції та рівності описані, зокрема, в [17, 20].

5.2. Композиційні предикатні системи та предикатні алгебри

Для КНЛ екстенсіональними моделями світів є композиційні системи спеціального вигляду – предикатні композиційні системи. Вони задають семантичні аспекти КНЛ з екстенсіонального погляду.

Предикатна композиційна система – це трійка вигляду $M = (D, Pr, C)$. Тут D – множина даних (можливий світ), дані трактуються як стани світу; Pr – множина предикатів на D, предикати трактуються як властивості станів світу та відношення між ними; C – множина композицій на Pr.

Предикатна композиційна система (D, Pr, C) задає алгебраїчну систему даних (D, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, C). Побудова композиційної алгебри предикатів дає змогу визначити мову КНЛ. Множина формул *Form* такої мови є множиною термів цієї алгебри. Таким чином, основним семантичним поняттям КНЛ можна вважати композиційні алгебри предикатів. Дослідження семантичних аспектів КНЛ зводиться до вивчення властивостей таких алгебр.

Опираючись на інтенсіональні аспекти, ми отримуємо можливість побудови композиційно-номінативних логік різного рівня абстракції.

На пропозиційному рівні екстенсіональними моделями світів є пропозиційні композиційні системи. Це композиційні предикатні системи вигляду (A, Pra, C), де Pra – множина абстрактних предикатів вигляду $A \rightarrow \{T, F\}$, множина C композицій над Pra визначається множиною базових пропозиційних композицій $\{\neg, \vee\}$.

Семантичні аспекти пропозиційної логіки можна задати композиційними алгебрами абстрактних предикатів $AAP = (Pra, C)$. Такі алгебри є семантичними моделями пропозиційної логіки.

При зафіксованій множині композицій C пропозиційна композиційна система (A, Pra, C) однозначно визначається парою вигляду (A, Pra). Такі об'єкти назвемо абстрактними алгебраїчними системами (ААС), їх теж можна трактувати як семантичні моделі ПЛ.

На рівні D.P.S множина даних D конкретизується як множина ${}^{V}\!A$ всіх V-іменних множин над певною множиною базових даних A, множина предикатів конкретизується як множина Pr^A V-квазіарних предикатів на A.

На реномінативному, кванторному та кванторно-екваційному підрівнях множина композицій C конкретизується як множина n-арних композицій вигляду $(Pr^A)^n \rightarrow Pr^A$.

Композиційну систему вигляду $({}^{V}\!A, Pr^A, C)$ назвемо композиційною системою V-квазіарних предикатів. Композиційну алгебру вигляду (Pr^A, C) назвемо композиційною алгеброю V-квазіарних предикатів.

На функціональному та функціонально-екваційному підрівнях до розгляду додатково залучаємо V-квазіарні функції на A. В цьому випадку говоримо про композиційні системи та композиційні алгебри V-квазіарних функцій та предикатів.

Композиційну систему вигляду $({}^{V}\!A, Fn^A \cup Pr^A, C)$ назвемо композиційною системою V-квазіарних функцій та предикатів. Тут Fn^A та Pr^A – множини V-квазіарних функцій та предикатів на A, C – множина композицій вигляду $(Fn^A \cup Pr^A)^n \rightarrow Fn^A \cup Pr^A$.

Композиційну алгебру вигляду $(Fn^A \cup Pr^A, C)$ назвемо композиційною алгеброю V-квазіарних функцій та предикатів.

Нехай C визначається множиною базових композицій реномінативного / кванторного рівня $\{\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\} / \{\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$. У цьому випадку композиційну систему $({}^{V}\!A, Pr^A, C)$ назвемо композиційною системою квазіарних предикатів реномінативного / кванторного рівня, композиційну алгебру (Pr^A, C) назвемо композиційною алгеброю квазіарних предикатів реномінативного / кванторного рівня.

Аналогічно визначаємо композиційні системи та композиційні алгебри квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня. Відмінність полягає у тому, що в множині предикатів на кванторно-екваційному рівні виділені спеціальні предикати рівності $=_{xy}$, які дають змогу розрізняти значення предметних імен.

$$=_{xy}(d) = \begin{cases} T, \ \textit{якщо} \ d(x)\downarrow, \ d(y)\downarrow \ \textit{та} \ d(x) = d(y), \\ F, \ \textit{якщо} \ d(x)\downarrow, \ d(y)\downarrow \ \textit{та} \ d(x) \neq d(y), \\ \textit{невизначене, якщо} \ d(x)\uparrow \ \textit{або} \ d(y)\uparrow. \end{cases}$$

Нехай множина C визначається множиною базових композицій функціонального / функціонально-екваційного рівня $\{\neg, \vee, \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}\} / \{\neg, \vee, \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}, \boldsymbol{=}\}$. У цьому випадку композиційну систему $({}^{V}\!A, Fn^A \cup Pr^A, C)$ назвемо композиційною системою квазіарних функцій та предикатів функціонального /функціонально-екваційного рівня, композиційну алгебру $(Fn^A \cup Pr^A, C)$ назвемо композиційною алгеброю квазіарних функцій та предикатів функціонального /функціонально-екваційного рівня.

Для функціонального та функціонально-екваційного рівня вважаємо, що у множині функцій виділені спеціальні функції деномінації (розіменування) $'v$, де $v\in V$.

При фіксуванні множини базових композицій композиційна система квазіарних функцій та предикатів $({}^{V}A, Pr^{A}\cup Fn^{A}, C)$ визначається парою вигляду $\boldsymbol{A}=(A, Pr^{A}\cup Fn^{A})$. Такі об'єкти назвемо алгебраїчними системами (АС) з квазіарними функціями та предикатами, або неокласичними алгебраїчними системами.

На відміну від традиційних (класичних) АС, в яких функції та предикати тотальні n-арні, в неокласичних АС функції та предикати – часткові V-квазіарні.

Для кванторного та кванторно-екваційного рівнів неокласичні АС набувають вигляду $\boldsymbol{A}=(A, Pr^{A})$, будемо їх називати алгебраїчними системами з квазіарними предикатами.

6. Фінітарні композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів

Семантичною основою КНЛ є композиційні алгебри квазіарних предикатів (квазіарних функцій та предикатів для логік функціонального та функціонально-екваційного рівнів). Побудова композиційної алгебри дає змогу задати мову логіки відповідного рівня.

При зафіксованій множині базових композицій мови КНЛ істотно відрізняються сигнатурою – множинами імен базових предикатів (базових функцій та предикатів) та неістотно – способами запису основних об’єктів мови – формул (термів та формул). Будемо тут використовувати префіксну (польську) форму запису формул.

Реномінативна логіка. Найабстрактнішою серед логік номінативного рівня є реномінативна логіка (РНЛ). Алфавіт мови РНЛ складається з множини Ps предикатних символів (сигнатура мови РНЛ), символів базових композицій, множини V предметних імен.

Множину формул $Form$ мови РНЛ вводимо індуктивно.

1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо атомарними.

2. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ – формули.

При фіксуванні множини базових композицій семантичні моделі РНЛ однозначно визначаються неокласичними АС, тому конкретна інтерпретація (модель) мови РНЛ визначається алгебраїчною системою (A, Pr^{A}) та конкретними значеннями ПС на A.

Задамо тотальне однозначне відображення $\boldsymbol{I}: Ps\to Pr^{A}$, яке визначає значення ПС як базові предикати такої АС. Тоді інтерпретаціями (моделями) мови РНЛ сигнатури $\sigma=Ps$ стають об'єкти вигляду $((A, Pr^{A}), \boldsymbol{I})$. Такі об'єкти назвемо АС з доданою сигнатурою. Будемо їх позначати у вигляді $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$.

Символи композицій інтерпретуємо як відповідні композиції.

Для інтерпретації формул задамо відображення $\boldsymbol{J}: Form\to Pr^{A}$, яке визначається за допомогою відображення $\boldsymbol{I}$ наступним чином.

I1. $\boldsymbol{J}(p)=\boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p\in Ps$.

I2. $\boldsymbol{J}(\neg\Phi)=\neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

I3. $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi)=\vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$.

I4. $\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi)=\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$, будемо позначати Φ_A.

Формула Φ істинна при інтерпретації $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-істинна, якщо Φ_A – істинний предикат. Цей факт позначаємо $\boldsymbol{A}\models\Phi$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-*виконувана*, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Формула Φ всюди істинна, якщо Φ істинна при кожній інтерпретації. Цей факт позначаємо $\models\Phi$.

Формула Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій інтерпретації.

Успадкування властивостей пропозиційної логіки для РНЛ відбувається перенесенням на рівень РНЛ поняття і властивостей тавтології, тавтологічного наслідку і тавтологічної еквівалентності [17].

Тавтології РНЛ – це формули, які мають структуру тавтологій класичної пропозиційної логіки. Кожна тавтологія – всюди істинна формула, проте не кожна всюди істинна формула є тавтологією. Прикладами можуть бути всюди істинні формули вигляду $\Phi \leftrightarrow R_x^x(\Phi)$.

Формула Ψ є тавтологічним наслідком формули Φ, що позначаємо $\Phi \models \Psi$, якщо формула $\Phi \rightarrow \Psi$ – тавтологія.

Формули Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні, що позначаємо $\Phi \sim_T \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

На множині формул мови РНЛ введемо також відношення:

– логічного наслідку $|=$,

– слабкого логічного наслідку $||=$,

– логічної еквівалентності $\sim$.

Такі відношення вперше з'являються тільки на реномінативному рівні.

Формула Ψ є логічним наслідком формули Φ, що позначимо $\Phi|=\Psi$, якщо формула $\Phi \rightarrow \Psi$ всюди істинна.

Формула Ψ є слабким логічним наслідком формули Φ, що позначимо $\Phi||=\Psi$, якщо для кожної інтерпретації $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ із умови $\boldsymbol{A}|=\Phi$ випливає $\boldsymbol{A}|=\Psi$.

Формули Φ та Ψ логічно еквівалентні, що позначимо $\Phi \sim \Psi$, якщо $\Phi|=\Psi$ та $\Psi|=\Phi$.

Введемо відношення логічного наслідку для множин формул мови РНЛ.

Множина формул $\boldsymbol{\Delta}$ є логічним наслідком множини формул $\boldsymbol{\Gamma}$, якщо для всіх АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ тієї ж сигнатури та для всіх $d \in {}^V\!A$ із того, що $\Phi_A(d)=T$ для всіх $\Phi \in \boldsymbol{\Gamma}$, випливає, що неможливо $\Psi_A(d)=F$ для всіх $\Psi \in \boldsymbol{\Delta}$. Те, що $\boldsymbol{\Delta}$ є логічним наслідком $\boldsymbol{\Gamma}$, позначаємо $\boldsymbol{\Gamma}|=_s|=\boldsymbol{\Delta}$.

Семантичні властивості формул РНЛ індуковані відповідними властивостями композицій. Специфічні властивості РНЛ пов'язані з композицією реномінації. Зазначені властивості описані в [17].

КНЛ кванторного рівня. Такі логіки названі чистими КНЛ (ЧКНЛ). Алфавіт мови ЧКНЛ складається з множини Ps предикатних символів (сигнатура мови ЧКНЛ), символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ та множини V предметних імен.

Множину формул $Form$ мови ЧНКЛ вводимо індуктивно.

1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо атомарними.

2. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

3. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\vee\Phi\Psi$ – формула.

При фіксуванні множини базових композицій конкретна інтерпретація (модель) мови ЧКНЛ визначається алгебраїчною системою (A, Pr^A) та конкретними значеннями ПС на A.

Задамо тотальне однозначне відображення $\boldsymbol{I} : Ps \rightarrow Pr^A$, яке визначає значення ПС як базові предикати такої АС. Тоді інтерпретаціями (моделями) мови ЧКНЛ сигнатури $\sigma = Ps$ стають АС з доданою сигнатурою $(A, \boldsymbol{I})$.

Для інтерпретації формул задамо відображення $\boldsymbol{J} : Form \rightarrow Pr^A$, яке визначається за допомогою $\boldsymbol{I}$ аналогічно відповідному визначенню для РНЛ (I1–I4) із доданням I5:

I5. $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Визначення істинної при інтерпретації та виконуваної при інтерпретації формули, всюди істинної формули та виконуваної формули вводяться аналогічно випадку РНЛ.

Для формул мови ЧКНЛ успадковуються з реномінативного рівня поняття тавтології, відношення $\models$, $\sim_T$, $|=$, $||=$, $|=_s$. Визначення та властивості цих відношень аналогічні відповідним визначенням та властивостям для РНЛ та класичної логіки предикатів.

Семантичні властивості формул ЧКНЛ індуковані відповідними властивостями композицій. Детально вони описані в [15, 17]. Для пропозиційних композицій та кванторів такі властивості аналогічні відповідним властивостям формул класичної логіки.

Семантичні властивості КНЛ кванторно-еквацiйного рівня цілком аналогічні [22] відповідним властивостям ЧКНЛ.

КНЛ функціонального та функціонально-екваційного рівня. На функціональному рівні за допомогою явно заданих (базових) функцій маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції $\boldsymbol{S}^{\bar{x}}$. Проте на функціональному рівні неможливо безпосередньо порівнювати предметні значення, вироблені функціями, адже на цьому рівні ще немає композиції рівності (або спеціальних предикатів рівності значень предметних імен). Це засвідчує певну "недовершеність" КНЛ функціонального рівня (ФНКЛ) і спонукає до переходу на наступний, функціонально-екваційний рівень. Цей рівень, на додаток до можливостей функціонального рівня, дає змогу ототожнювати і розрізняти предметні значення.

Алфавіт мови КНЛ функціонально-екваційного рівня (ФЕКНЛ) складається з множини предметних імен V, множин Dns, Fns, Ps відповідно деномінаційних, функціональних, предикатних символів, а також множини символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $\exists x$, $S^{v_1,...v_n}$, $=$.

Множину $Fns\cup Dns$ позначимо Fs. Множину $Fns\cup Ps$ назвемо сигнатурою мови ФЕКНЛ.

Множини термів Tr і формул $Form$ мови ФЕКНЛ вводимо індуктивно.

Т1. Кожний ФС та кожний ДНС є термом. Такі терми назвемо атомарними.

Т2. Нехай t, $t_1,..., t_n$ – терми. Тоді $S^{v_1,...,v_n}\, t\, t_1...t_n$ – терм.

Ф1. Кожний ПС є формулою. Такі формули назвемо атомарними.

Ф2. Нехай t та s – терми. Тоді $=ts$ – формула.

Ф3. Нехай Φ – формула, $t_1,..., t_n$ – терми. Тоді $S^{v_1,...,v_n}\,\Phi t_1...t_n$ – формула.

Ф4. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$ та $\exists x\Phi$ – формули.

При зафіксованій множині базових композицій конкретна інтерпретація (модель) мови ФЕКНЛ визначається алгебраїчною системою $(A, Pr^A\cup Fn^A)$ та значеннями ПС і ФС на A.

Задамо тотальне однозначне відображення $\boldsymbol{I} : Fs\cup Ps\to Fn^A\cup Pr^A$, яке визначає значення ФС та ПС як базові функції та предикати такої АС. При цьому $\boldsymbol{I}('v) = '\boldsymbol{v}$ для кожного $'v\in Dns$. Тому інтерпретаціями мови ФЕКНЛ сигнатури $\sigma = Fns\cup Ps$ будемо вважати АС з доданою сигнатурою вигляду $((A, Fn^A\cup Pr^A), \boldsymbol{I})$, або скорочено $(A, \boldsymbol{I})$.

Для інтерпретації термів та формул продовжимо $\boldsymbol{I}$ до $\boldsymbol{J} : Form\cup Tr\to Fn^A\cup Pr^A$:

If1. $\boldsymbol{J}(f) = \boldsymbol{I}(f)$ для кожного $f\in Fs$.

If2. $\boldsymbol{J}(S^{v_1,...,v_n}\, t\, t_1...t_n) = \boldsymbol{S}^{v_1,...,v_n}(\boldsymbol{J}(t), \boldsymbol{J}(t_1), ..., \boldsymbol{J}(t_n))$.

If3. $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p\in Ps$.

If4. $\boldsymbol{J}(=ts) = \boldsymbol{=}(\boldsymbol{J}(t), \boldsymbol{J}(s))$.

If5. $\boldsymbol{J}(S^{v_1,...,v_n}\,\Phi t_1...t_n) = \boldsymbol{S}^{v_1,...,v_n}(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(t_1), ..., \boldsymbol{J}(t_n))$.

If6. $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \boldsymbol{\neg}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

If7. $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \boldsymbol{\vee}(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$.

If8. $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \boldsymbol{\exists x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначимо Φ_A. Функцію $\boldsymbol{J}(t)$, яка є значенням терма t при інтерпретації $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначимо t_A.

Розглянемо відмінності мови ФКНЛ від мови ФЕКНЛ.

У визначенні формул відсутній п. Ф2, визначення термів аналогічне.

У визначенні відображення $\boldsymbol{J}$ відсутній п. If4.

Поняття істинності та виконуваності формул для ФКНЛ та ФЕКНЛ вводимо аналогічно випадку ЧНКЛ.

Поняття тавтології, тавтологічного наслідку, тавтологічного еквівалентності для ФКНЛ та ФЕКНЛ успадковуються з реномінативно та кванторного рівнів.

Визначення та властивості відношень $\models$, $\sim_T$, $|\!=$, $|\!|\!=$, $\sim$, $|\!=_S$ для ФКНЛ та ФЕКНЛ цілком аналогічні відповідним визначенням та властивостям для РНЛ та ЧКНЛ.

Семантичні властивості формул ФКНЛ та ФЕКНЛ індуковані відповідними властивостями композицій. Детально вони описані в [19, 22]. Для пропозиційних композицій та кванторів такі властивості аналогічні відповідним властивостям формул класичної логіки.

7. Логіки еквітонних предикатів та їх розширення

Клас квазіарних предикатів дуже потужний, для логік квазіарних предикатів не діють деякі важливі закони класичної логіки. Наприклад, в загальному випадку квазіарних предикатів маємо $\models\Phi \Rightarrow \models\forall x\Phi$, але не завжди $\models\forall x\Phi$. Таким чином, для збереження основних властивостей класичної логіки клас квазіарних предикатів варто обмежити.

Природне обмеження задається властивістю еквітонності, яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні даних.

Предикат P еквітонний (ЕП), якщо для довільних $d, d'\in {}^{V}\!A$ із $d'\supseteq d$ та $P(d)\downarrow$ випливає $P(d')\downarrow=P(d)$.

Найближчими до класичної є логіки повнототальних еквітонних предикатів (ПЕП). Повнототальність означає визначеність предиката на максимальних даних – V-повних ІМ.

Предикат P повнототальний, якщо $P(d)\downarrow$ для всіх $d\in A^{V}$.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів (ПЕП) названі [8] неокласичними (НКЛ), оскільки вони зберігають основні закони та правила виведення класичної логіки при істотному розширенні класу моделей.

Логіки еквітонних предикатів зберігають основні закони класичної логіки, але для них вже не діють деякі правила виведення (modus ponens), порушуються деякі властивості класичної логіки.

Наприклад, для конкретних семантичних моделей можливо $\boldsymbol{A}\models$P, $\boldsymbol{A}\models$P$\to$Q, але $\boldsymbol{A}\not\models$Q.

Можливо також $\boldsymbol{A}\models$P$\leftrightarrow$Q, $\boldsymbol{A}\models$Q$\leftrightarrow$S, але $\boldsymbol{A}\not\models$P$\leftrightarrow$S.

Крім того, для логіки ЕП не завжди із $\Phi\models\Psi$ випливає $\Phi\models\!\!\models\Psi$.

Клас моделей логіки ЕП істотно ширший за клас моделей логіки ПЕП.

Семантичні властивості логіки ЕП фактично відтворюють [17] властивості композицій. Зокрема, властивості, які не використовують реномінації та суперпозиції, цілком аналогічні відповідним властивостям класичної логіки предикатів.

Для логіки ЕП справджуються [17] теореми семантичної еквівалентості та рівності, а щодо відношення логічного наслідку для множин формул – теорема про заміну еквівалентних.

Теорема семантичної еквівалентно сті. Нехай формула Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\models\Phi_1\leftrightarrow\Psi_1, ..., \models\Phi_n\leftrightarrow\Psi_n$, то $\models\Phi\leftrightarrow\Phi'$.

Теорема заміни еквівалентних. Нехай $\Phi\sim\Psi$. Тоді маємо: $\Phi, \boldsymbol{\Gamma}\models_s\boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \Psi, \boldsymbol{\Gamma}\models_s\boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Gamma}\models_s\boldsymbol{\Delta}, \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma}\models_s\boldsymbol{\Delta}, \Psi$.

Для формул класичної логіки істотними є тільки їх вільні предметні імена, від яких може залежати значення відповідних предикатів. Для логік ЕП важлива неістотність предметних імен. Тому для базових предикатів логіки ЕП будемо визначати множину неістотних імен, від яких не залежить значення таких предикатів.

Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо для кожної інтерпретації $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ ім'я x неістотне для предиката Φ_A.

У випадку еквітонних функцій ім'я x неістотне для f $\Leftrightarrow$ для довільних $d\in {}^{V}\!A$ та $a\in A$ маємо $f(d)\cong f(d\nabla x\mapsto a)$.

Можливість виконання еквівалентних перетворень довільних формул вимагає наявності нескінченної множини тотально неістотних імен, тобто імен, неістотних для кожного $p\in Ps$. Таким чином, семантичною основою логіки ЕП є композиційні алгебри еквітонних квазіарних предикатів з додатковою вимогою наявності нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

Для формул логіки ЕП визначаються субнормальні (різнокванторні), нормальні, квазізамкнені формули. Доводиться [17], що для кожної формули можна збудувати еквівалентні їй різнокванторну та нормальну формули.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки, але семантичними аналогами їх вважати не можна. Квазізамкнені формули необов'язково інтерпретуються як константні предикати, хоча для класичної логіки кожна замкнена формула на кожній АС завжди інтерпретується як тотожна істина або тотожна фальш. Справа в тому, що до складу формули логіки квазіарних предикатів можуть входити предикатні символи, для яких множини істотних імен нескінченні.

Специфічну властивість квазізамкнених формул логіки ЕП описує наступна

Теорема про квазізамкнені формули. Нехай формула Φ квазізамкнена, її пропозиційна схема (пропозиційна формула, отримана із Φ опусканням усіх символів, окрім предикатних символів та символів пропозиційних зв'язок) не тавтологія і не суперечність, причому Φ не містить спеціальних предикатних символів із явно виділеними істотними іменами (наприклад, $=_{xy}$). Тоді існують АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ та $d_1, d_1\in {}^{V}\!A$, такі, що $\Phi_A(d_1)=T$ та $\Phi_A(d_2)=F$.

Можливість для формули бути залежною від нескінченної множини предметних імен є визначальною властивістю логіки квазіарних предикатів, зокрема логіки ЕП, що істотно відрізняє її від класичної логіки.

Для логік повнототальних ЕП (неокласичних логік) будуються аксіоматичні системи Гільбертівського типу, на їх основі доводяться [16, 21] теореми коректності (несуперечливості) та повноти. Більше того, можна говорити [8] про ізоморфне вкладення класичної логіки в неокласичну. Це випливає з того, що всі аксіоми класичної логіки виводяться в неокласичній логіці, правила виведення класичної логіки моделюються в неокласичній. Звідси отримуємо моделювання виведень формул класичної логіки в неокласичній.

Проте універсального моделювання класу формул неокласичної логіки в класі формул класичної логіки не існує. Причина полягає в тому, що кількість істотних змінних для формул неокласичної логіки може бути нескінченною. Але ми можемо зробити обмежене моделювання, тому, що кожну формулу неокласичної логіки можна звести до еквівалентної їй псевдокласичної нормальної форми, використовуючи додаткові тотально неістотні предметні імена.

Відмова від modus ponens для загального випадку логік ЕП веде до необхідності здійснювати дослідження синтаксичних властивостей таких логік на базі не Гільбертівських, а Генценівських систем – секвенційних числень. Семантичною основою побудови таких числень є властивості відношення логічного наслідку для множин формул. Такі числення збудовані [13, 17, 28–31] для логік ЕП відповідного рівня.

Для секвенційних числень доведені теореми коректності та повноти.

Теорема коректності. Нехай секвенція $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна. Тоді $\boldsymbol{\Gamma}\models_s\boldsymbol{\Delta}$.

Теорема повноти. Нехай $\boldsymbol{\Gamma}\models_s\boldsymbol{\Delta}$. Тоді секвенція $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\boldsymbol{\Delta}$ вивідна.

Природним узагальненням еквітонних предикатів є [32] локально-еквітонні предикати (ЛЕП). Для таких предикатів вимагається збереження значення при розширенні даних лише на скінченну кількість іменованих компонент.

Предикат P локально-еквітонний, якщо для довільних $d, d'\in {}^{V}\!A$ із того, що $P(d)\downarrow$, $d'\supset d$ та $d'\backslash d$ скінченна, випливає $P(d')\downarrow=P(d)$.

Клас ЛЕП є розширенням класу ЕП. Справді, предикат, істинний на всіх скінченних ІМ та хибний на всіх нескінченних ІМ, є нееквітонним ЛЕП.

Семантичні властивості ЛЕП аналогічні властивостям ЕП.

Клас моделей логіки ЛЕП є розширенням класу моделей логіки еквітонних предикатів.

Логіки, орієнтовані на такі особливості предметних областей, як невизначеність, неповнота наявної інформації, базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією. Такими є [33] еквісумісні (ЕСП) та локально-еквісумісні предикати (ЛЕСП).

Еквісумісність предиката P означає, що при можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого даного, значення P на таких даних мають співпадати. При локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для розширень скінченною інформацією.

V-ІМ d та d' сумісні, що позначимо $d\approx d'$, якщо функція $d\cup d'$ однозначна.

V-квазіарний предикат P еквісумісний (ЕСП), якщо для довільних $d, d'\in {}^{V}\!A$ із $d\approx d'$, $P(d)\downarrow$ та $P(d')\downarrow$ випливає $P(d)=P(d')$.

V-квазіарний предикат P локально-еквісумісний (ЛЕСП), якщо для довільних $d, d' \in {}^{V}A$ таких, що $(d' \setminus d) \cup (d \setminus d')$ скінченна, із $d \approx d'$, $P(d)\downarrow$ та $P(d')\downarrow$ випливає $P(d)=P(d')$.

Кожний еквісумісний предикат можна розширити до еквітонного.

Кожний локально-еквісумісний предикат можна розширити до локально-еквітонного.

Еквісумісні та локально-еквісумісні предикати є узагальненнями еквітонних та локально-еквітонних предикатів. Відомі [32, 33] приклади нееквітонних, але еквісумісних предикатів та приклади ЛЕСП, які не є локально-еквітонними та не є еквісумісними.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\exists \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\boldsymbol{S}^{\bar{v}}$ та $=$ зберігають повнототальність, еквітонність, локально-еквітонність, еквісумісність і локально-еквісумісність V-квазіарних функцій та предикатів.

Семантичні властивості логік ЕСП та ЛЕСП аналогічні відповідним властивостям логік ЕП та ЛЕП. Класи семантичних моделей ЛЕП та ЛЕСП ширші за класи семантичних моделей логік ЕП та ЛЕП, водночас ці логіки зберігають основні закони класичної логіки.

Для логік ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП збудовані [32, 33] числення секвенційного типу, для таких числень доведені теореми коректності та повноти.

Із теореми повноти випливає [17] низка важливих властивостей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП, зокрема принцип компактності, теорема про існування моделі. На цій основі розглядаються питання семантичної та синтаксичної несуперечливості, взаємної суперечливості та несуперечливості множин формул.

На основі секвенційних числень для логік ЕП доводиться [29] один з найважливіших результатів математичної логіки – інтерполяційна теорема.

Інтерполяційна теорема. Нехай секвенція $\dashv\Psi\to\Xi$ має виведення. Тоді існує формула Φ сигнатури $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)$, така, що секвенції $\dashv\Psi\to\Phi$ та $\dashv\Phi\to\Xi$ мають виведення.

Використовуючи інтерполяційну теорему, для логік ЕП доведена [31] теорема про визначність, яка стверджує еквівалентність явного (синтаксичного) та неявного (семантичного) визначень одного поняття в термінах інших понять. Для класичних логік така еквівалентність – це теорема Бета про визначність [24].

Секвенційні числення логік ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП ідентичні секвенційним численням логік ЕП. Це засвідчує той факт, що синтаксичні властивості логік ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП аналогічні синтаксичним властивостям логік ЕП. Водночас при переході від логік ЕП до логік ЛЕП та логік ЕСП, від логік ЛЕП та логік ЕСП до логік ЛЕСП ми отримуємо все ширші класи семантичних моделей.

Широкі спектри логік квазіарних предикатів розглядалися в [34–37].

Наведемо ієрархію КНЛ за обмеженнями на клас квазіарних предикатів (рис. 5).

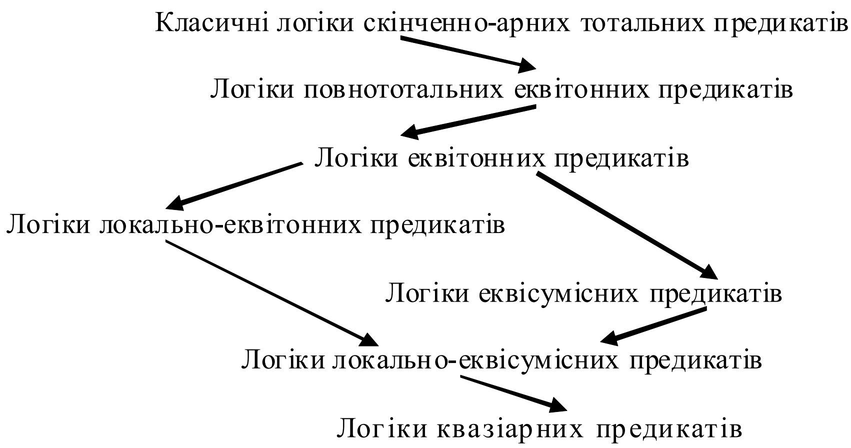

Рис. 5. Ієрархія КНЛ за обмеженнями на клас квазіарних предикатів

Висновки

Запропоновано інтенсіонально-орієнтований підхід до визначення основних понять логіки. Визначено рівні абстракції та інтенсіонали понять даного, функції та композиції. Введено поняття номінату (номінативного даного) та розглянуто його зв’язки з поняттям множини. На основі пропонованого підходу розглянуто спектр композиційно-номінативних логік. Описані композиції квазіарних предикатів на різних рівнях абстрактності. Виділені класи логік квазіарних предикатів, розглянуті їх основні властивості. Таким чином, продемонстровано ефективність застосування інтенсіонально-орієнтованого підходу в математичній логіці.

1. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник.– М.: Наука, 1976. – 720 с.
2. *Кулик Б.А.* С чем идет современная логика в XXI век? "Вестник РФФИ". – Сентябрь 2000. – № 3(21)
3. *Арнольд В.И.* Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник российской академии наук. – 2002. – Том 72, № 3. – с. 245–250.
4. *Книгин А.Н.* Учение о категориях. – Томск: ТГУ, 2002. – 192 с.
5. *Гегель Г.В.* Наука логики (в 3-х т.). – М.: Мысль, 1970. – Т. 1, 501 с.; 1971 – Т. 2, 248 с.; 1972 – Т. 3, 371 с.
6. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
7. *Никитченко Н.С.* Предикатные композиционно–номинативные системы // Там же. – 1999. – № 2. – С. 3–19.
8. *Никитченко Н.С., Шкильняк С.С.* Неоклассические логики предикатов // Там же – 2000. – № 3–4. – С. 3–17.
9. *Редько В.Н.* Основания композиционного программирования // Программирование. – 1979. – № 3. – С. 3–13.
10. *Никитченко Н.С.* Пропозициональные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 2. – С. 3–19.
11. *Шкільняк С.С.* Безкванторні неокласичні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 323–331.
12. *Шкільняк С.С.* Безкванторні неокласичні числення // Там же .– 2002. – Вип. 1. – С. 276–282.
13. *Шкільняк С.С.* Неокласичні секвенційні числення // Там же – 2002. – Вип. 4. – С. 261–274.
14. *Нікітченко М.С.* Інфінітарні реномінативні логіки часткових предикатів // Там же – 2002. – Вип. 3. – С. 229–238.
15. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Там же – 2000. – Вип. 2. – С. 300–314.
16. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Чисті композиційно-номінативні числення // Там же – 2000. – Вип. 3. – С. 290–303.
17. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Основи математичної логіки. – К.: Київський ун-т. – 2006. – 246 с.
18. *Никитченко Н.С.* Аппликативные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 2. – С. 14–33.
19. *Шкільняк С.С.* Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип. 1. – С. 222 – 225.
20. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки першого порядку // Там же – 2001. – Вип. 1. – С. 260 – 274.
21. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні числення першого порядку // Там же – 2001. – Вип. 2. – С. 302 – 313.
22. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційні логіки номінативних даних // Проблеми програмування. – 2003. – № 3. – С. 29–40.
23. *Андон Ф.И., Яшунин А.Е., Резниченко В.А.* Логические модели интеллектуальных информационных систем. – К.: Наук. думка, 1999. – 396 с.
24. *Клини С.* Математическая логика. – М.: Наука, 1973. – 480 с.
25. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
26. *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 521 с.
27. *Басараб И.А., Никитченко Н.С., Редько В.Н.* Композиционные базы данных. – К.: Либідь, 1992. – 192 с.
28. *Шкільняк С.С.* Функціонально-еквваційні неокласичні логіки: числення секвенційного типу // Вісник Київськ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип. 4. – С. 302 - 309.
29. *Шкільняк С.С.* Властивості неокласичних секвенційних числень // Там же. – 2004. – Вип. 1. – С. 286 –293.

30. *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів // Там же – 2005. – Вип. 1. – С. 246–255.
31. *Шкільняк С.С.* Фінітарні логіки квазіарних предикатів // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2005. – Вип. 6. – С. 47–55.
32. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Логіки локально-еквітонних предикатів: семантичні властивості та секвенційні числення // Проблеми програмування. – 2003. – № 2. – С. 28–41.
33. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки предикатів над даними з неповною інформацією // Там же. – 2004. – № 2–3. – С. 74–80.
34. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Ієрархія композиційно-номінативних логік // Там же – 2004. – № 4. – С. 5–14.
35. *Nikitchenko N.S., Shkilniak S.S.* Spectrum of finitary composition nominative logics. – Computer science and information technologies. Proceeding of the conference. – Yerevan, 2005. – C. 113–116.
36. *Nikitchenko N.S., Omelchuk L.L., Shkilniak S.S.* Formalisms for Specification of Programs over Nominative Data // Electronic computers and informatics (ECI 2006). Th. of conf. rep. – Košice – Herľany, Slovakia, 2006. – P. 134–139.
37. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С., Омельчук Л.Л.* Логіки, орієнтовані на специфікації програм // Проблеми програмування. – 2006. – № 2–3. – С. 17–24.

Отримано 18.04.2007

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
завідувач кафедри теорії та технології програмування
Київського національного університету
ім. Тараса Шевченка,

Шкільняк Степан Степанович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри теорії та технології програмування
Київського національного університету
ім. Тараса Шевченка.

Місце роботи авторів:

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 60.
Тел. (044) 259 0519
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua