

## **ПРИМЕНЕНИЕ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ**

Известны сеточные методы решения обратной линейно-нелинейной задачи гравиметрии (ОЛНЗГ) и магнитометрии (ОЛНЗМ) с помощью итерационных оптимизирующих алгоритмов с фильтрацией помех поля на основе критерия минимума нормы поправок к плотности и магнитным свойствам горных пород [1]. Кроме физических и геометрических параметров крупных геологических структур, в этих работах эпизодически приводятся некоторые технические результаты: средняя плотность верхнего слоя морских отложений, распределение магнитных и электрических свойств в окисленных и полуокисленных разностях горных пород верхнего слоя кристаллического фундамента, карты значений глубины до морского дна или кристаллического фундамента [2–4]. Известны прямые методы решения обратных задач теории потенциала скоростей для одиночных зарядов взрывчатого вещества (ВВ), которые для группы скважинных зарядов слабо устойчивы [5, 6]. Эти методы использованы также в экономике и юриспруденции для условий с нечеткой логикой [7]. Однако существует необходимость расширения сферы их применения.

Цель настоящей работы – создание итерационных методов устойчивого решения обратной линейно-нелинейной задачи электрического потенциала (ОЛНЗЭП) для определения глубины до кристаллического фундамента в электроразведке с помощью метода дипольного и симметричного электрического профилирования (ДЭП и СЭП), а также обратной линейной задачи потенциала скоростей (ОЛЗПС) в теории действия взрыва при разрушении горных пород группой зарядов ВВ.

Для применения метода ДЭП [8] возьмем дипольную установку АВМN с центром в точке О между электродами М и N. Координаты электродов на оси X равны: ON = -l; OM = l; MN = 2l; OB = L; OA = L<sub>1</sub>; коэффициент установки равен k; ток в цепи АВ равен J; удельное электрическое сопротивление (УЭС) среды в первом слое ρ<sub>1</sub>, а во втором – ρ<sub>2</sub>; мощность первого слоя равна H<sub>1</sub> = H + h, а второго – H<sub>2</sub> = ∞; H – начальное значение, h – неизвестная добавка; коэффициент отражения тока от границы

слоев равен  $k_{1,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ ; падение напряжения между электродами М и N равно:

$$V_{MN} = \frac{J\rho_1}{8\pi} \left( k_{1,2} (S_{10} - S_{11}\mu/2 + 3S_{12}\mu^2/8) + S_{13} \right), \quad (1)$$

где

$$S_{10} = S_2^{-1} - S_1^{-1} + S_3^{-1} - S_4^{-1}; \quad S_{11} = S_2^{-3} - S_1^{-3} + S_3^{-3} - S_4^{-3}; \quad S_{12} = S_2^{-5} - S_1^{-5} + S_3^{-5} - S_4^{-5};$$

$$\mu = 2hH + h^2; \quad S_{13} = 4l \left( \frac{1}{(L^2 - l^2)} - \frac{1}{(L_1^2 - l^2)} \right); \quad S_1 = \left( \left( \frac{(L_1 - l)}{2} \right)^2 + H^2 \right)^{1/2};$$

$$S_2 = \left( \left( \frac{(L_1 + l)}{2} \right)^2 + H^2 \right)^{1/2}; \quad S_3 = \left( \left( \frac{(L - l)}{2} \right)^2 + H^2 \right)^{1/2};$$

$$S_4 = \left( \left( \frac{(L + l)}{2} \right)^2 + H^2 \right)^{1/2}.$$

Образует из (1) формулу кажущегося удельного электрического сопротивления (КУЭС):

$$\rho_{k,i} = \frac{kV_{MN}}{J} = S_{c1,i}X_1 + S_{c2,i}X_2 + S_{c3,i}X_3; \quad i = 1, M \quad (2)$$

где

$$S_{c1} = \frac{k}{8\pi} (k_{1,2}S_{10} + S_{13}); \quad X_1 = \rho_1; \quad S_{c2} = -\frac{k}{8\pi} (k_{1,2}S_{11}H); \quad X_1 = \rho_1 h;$$

$$S_{c1} = -\frac{k}{8\pi} k_{1,2} (S_{11} - 3S_{12}H^2); \quad X_1 = \rho_1 h^2.$$

Образует критерий минимума суммы квадратов невязок поля КУЭС  $\rho_k$ :

$$F_r = (\rho_{k,i} - S_{c1,i}X_1 - S_{c2,i}X_2 - S_{c3,i}X_3, \rho_{k,i} - S_{c1,i}X_1 - S_{c2,i}X_2 - S_{c3,i}X_3) = \min; \quad (3)$$

Дифференцируя критерий  $F_r$  по переменным  $X_1, X_2, X_3$  и приравнявая производные к нулю, получим систему из трех уравнений для вычисления  $X_1, X_2, X_3$ , а уже по ним вычислим  $\rho_1$  и  $H + h$ .

Для применения метода СЭП с установкой АМNB пригодны все формулы (1)–(3) при  $S_1 = S_3, S_2 = S_4, S_{13} = 4l/(L^2 - l^2)$ . Для определения коэффициента отражения тока нужно использовать опытное вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ). Если  $\rho_2 = \infty$  то  $k_{1,2} = 1$ . Для повышения устойчивости решения обратной задачи ДЭП (аналогично и СЭП) разработаем фильтрационный метод решения обратной задачи на основе метода простой итерации. Из (2) образуем невязку поля КУЭС  $\rho_k$ :

$$r_{i,n} = \rho_{k,i} - (S_{cm,i}, X_{m,n}); \quad m = 1, 3. \quad (4)$$

Запишем ИФ для переменных:

$$X_{m,n+1} = X_{m,n} - \tau_{m,n+1} B_{m,n}; \quad B_{m,n} = (S_{cmi}, r_{i,n}) / \lambda_m^2; \quad \lambda_m = (S_{cmi}, 1); \quad (5)$$

где  $\tau_{m,n+1}$  – неизвестный итерационный коэффициент (ИтК) на  $(n + 1)$ -ой итерации.

Подставим (5) в (4) и после преобразования получим уравнение связи невязок на соседних итерациях:

$$r_{i,n+1} = r_{i,n} + (\tau_{m,n+1}, S_{cm,i} B_{m,n}); \quad Z_{m,i,n} = S_{cm,i} B_{m,n}; \quad r_{i,n+1} = r_{i,n} + (\tau_{m,n+1}, Z_{m,i,n}). \quad (6)$$

Образуем из (6) поправки к параметрам  $X_{m,n}$ :

$$B_{j,n+1} = B_{j,n} + (\tau_{m,n+1}, C_{j,m,n}), \quad (7)$$

где

$$C_{j,m,n} = (S_{cj,i}, Z_{m,i,n} / \lambda_j^2); \quad m = 1, 3; \quad j = 1, 3.$$

Образуем критерий оптимизации по минимуму суммы квадратов поправок:

$$F_B = (B_{j,n+1}, B_{j,n+1}) = \left( (B_{j,n} + (\tau_{m,n+1}, C_{j,m,n})), (B_{j,n} + (\tau_{m,n+1}, C_{j,m,n})) \right) = \min. \quad (8)$$

Возьмем производные по  $\tau_{m,n+1}$ , приравняем их к нулю и получим систему уравнений для вычисления ИтК  $\tau_{m,n+1}$ :

$$(F_B)'_{\tau_{k,n+1}} = \left( (B_{j,n} + (\tau_{m,n+1}, C_{j,m,n})), C_{j,k,n} \right) = 0; \quad j = 1, M; \quad m, k = 1, 3. \quad (9)$$

Решая систему (9), получим ИтК и по ИФ (5) вычислим параметры  $X_{m,n}$ , а затем и физические параметры модели среды: среднее удельное электрическое сопротивление верхнего слоя  $\rho_1$  и добавку  $h$  к начальной глубине  $H$  полной глубины  $H + h$  до второго слоя в пределах измерительной установки АН. Этот метод является высоко фильтрационным. С меньшей степенью фильтрации погрешностей измерения поля можно решать обратную задачу оптимизацией критерия по минимуму суммы квадратов невязки поля  $\rho_k$ . Для этого возведем в квадрат левую и правую части уравнения (6) и просуммируем их по всем (обычно больше пяти) точкам измерения  $\rho_{k,i}$  в пределах измерительной установки:

$$F_r = (r_{i,n+1}, r_{i,n+1}) = \left( (r_{i,n} + (\tau_{m,n+1,r}, Z_{m,i,n})), (r_{i,n} + (\tau_{m,n+1,r}, Z_{m,i,n})) \right) = \min. \quad (10)$$

Возьмем производные от (10) по  $\tau_{m,n+1,r}$ , приравняем их к нулю и получим систему уравнений для вычисления ИтК  $\tau_{m,n+1,r}$ :

$$\left( (r_{i,n} + (\tau_{m,n+1,r}, Z_{m,i,n})), Z_{k,i,n} \right) = 0. \quad (11)$$

Решая систему (11), получим ИтК и по ИФ (5) вычислим параметры  $X_{m,n}$ , а затем и физические параметры модели среды.

Если  $\rho_2 \neq \infty$  то нужно использовать модель с переменным УЭС среды [4]:

$$\rho = \rho_1 \exp(bz + cz^2/2); \quad b, c = \text{const.} \quad (12)$$

Введем новые обозначения в формулу (2) для симметричной установки АМNB:

$$\begin{aligned} X_1 &= \rho_1, \quad X_2 = \rho_1 b, \quad X_3 = \rho_1 c, \\ S_{c1,i} &= 2MN / AB; \quad S_{c2,i} = MN^2 / AB; \quad S_{c3,i} = MN \times AB / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Для решения этой задачи достаточно измерений ВЭЗ на 5–6 разносах в одной точке профиля. Критерий оптимизации имеет вид (3) или (8) при обозначениях (12)–(13). Вычисляя для каждой  $j$ -ой точки профиля параметры среды  $\rho_{1j}$ ,  $b_j$ ,  $c_j$  по формуле (12) строим вертикальный разрез УЭС первого слоя, непрерывно переходящего в УЭС второго слоя. Так как выражения (2) и (4) отличаются только коэффициентами при неизвестных параметрах, то фильтрационные методы (4)–(11) пригодны и для решения обратных задач ВЭЗ (12)–(13). Таким образом, приведенные методы позволяют извлечь довольно большую дополнительную информацию о геологическом строении участка геофизических исследований.

Во взрывном деле поставленная цель достигается тем, что используют баланс энергии и формулы потенциала скоростей, из которых получают системы уравнений для определения радиусов сферических или цилиндрических зарядов, аппроксимирующих скважинные заряды ВВ в интерпретационных моделях. Из [5, 6] следует, что средняя часть скважинного заряда должна иметь меньшую энергоёмкость, чем на торцах. С другой стороны, располагать скважины с зарядами ВВ в одну линию также нецелесообразно, так как это ведет к большой неравномерности дробления горной породы и перерасходу ВВ. Следовательно, задача размещения скважинных зарядов ВВ по площади представляет собой обратную нелинейную задачу потенциала скоростей (ОНЗПС), а задача определения переменного радиуса заряда по высоте скважины представляет собой обратную линейную задачу потенциала скоростей (ОЛЗПС). Пользуясь [5, 6], составим алгоритм решения (ОЛЗПС) при аппроксимации скважинного заряда ВВ сферическими зарядами с удельной энергоёмкостью  $\varepsilon_0$  плотностью заряда  $\gamma$  и радиусом  $R_i$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} (a_{i,j}, \eta_i) &= b_j, \quad b_j = 3\sigma_p^2 / \left( 4E_0 a^2 \varepsilon_0 \gamma (1+k_0)^2 \right), \quad \eta_i = R_i^4; \\ a_{i,j} &= 1 / \left( r_j^2 + (z_i - z_j)^2 \right)^3, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $r^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ ,  $(x_i, y_i, z_i)$  – координаты точек заряда;  $(x_j, y_j, z_j)$  – координаты точек разрушаемой горной породы;  $a$  – размер сред-

него куска дробленной породы;  $\sigma_p$  и  $E_0$  – предел прочности породы на разрыв и ее модуль Юнга;  $k_0$  – коэффициент отражения воздействий взрыва от свободной поверхности разрушаемого уступа в карьере.

Решение системы уравнений (14) неустойчиво. Поэтому будем решать ее фильтрационным итерационным методом простой итерации с критерием оптимизации по минимуму суммы квадратов поправок к определяемому параметру [1–4]. Запишем итерационную формулу связи (ИФ) для значений неизвестного параметра  $\eta_{i,n}$  на соседних итерациях с номерами  $n$  и  $n + 1$ , формулу невязки поля энергии (ФНПЭ)  $r_{j,n}$  и формулу поправки (ФП)  $B_{i,n}$  к неизвестному параметру:

$$\eta_{i,n+1} = \eta_{i,n} - \tau_{n+1} B_{i,n}; \quad r_{j,n+1} = r_{j,n} - \tau_{n+1} (a_{i,j}, B_{i,n}); \quad (15)$$

$$B_{i,n} = (a_{i,j}, r_{j,n} / \lambda_i \lambda_j); \quad \lambda_i = (a_{i,j}, 1)_{j=1,N}; \quad \lambda_j = (a_{i,j}, 1)_{i=1,M} \quad (16)$$

где  $\tau_{n+1}$  – неизвестный ИтК на  $n + 1$ -ой итерации.

Запишем критерий оптимизации по поправке:

$$F_B = (B_{i,n+1}, B_{i,n+1}) = (B_{i,n} - \tau_{n+1} C_{i,n}, B_{i,n} - \tau_{n+1} C_{i,n}) = \min; \quad (17)$$

$$C_{i,n+1} = (a_{i,j}, (a_{i,j}, B_{i,n}) / \lambda_i \lambda_j).$$

Оптимизируя критерий (17) получим

$$\tau_{n+1} = (B_{i,n}, C_{i,n}) / (C_{i,n}, C_{i,n}). \quad (18)$$

Аналогично оптимизируя критерий невязки получим:

$$F_r = (r_{j,n+1}, r_{j,n+1}) = \min, \quad \tau_{n+1,r} = (r_{j,n}, Z_{j,n}) / (Z_{j,n}, Z_{j,n}), \quad Z_{j,n} = (a_{i,j}, B_{i,n}). \quad (19)$$

Теперь запишем алгоритм решения (ОЛЗПС) при аппроксимации скважинного заряда ВВ цилиндрическими зарядами:

$$(a_{i,j}, \eta_i) = b_j, \quad b_j = 8\sigma_p^2 / (E_0 a^2 \varepsilon_0 \gamma (1 + k_0)^2), \quad \eta_i = R_i^2 / \text{Ln}((z_{2,i} - z_{1,i}) / R_i);$$

$$a_{i,j} = \left( (z_{1,i} - z_j) / (L_j^2 + (z_{1,i} - z_j)^2)^{3/2} - (z_{2,i} - z_j) / (L_i^2 + (z_{2,i} - z_j)^2)^{3/2} \right)^2, \quad (20)$$

$$z_{2,i} - z_{1,i} = \Delta H = \text{const}.$$

Система уравнений (20) решается теми же итерационными методами (15)–(19). Приведенные методы позволяют разрабатывать технологии отбойки горной массы на карьерах при требуемом гранулометрическом составе и оптимизированном расходе ВВ.

**Заключение.** Применение фильтрационных методов устойчивого решения обратных задач теории потенциала в электроразведке позволяет выявить участки, неустойчивые и опасные для строительства объектов про-

мышленного и общегражданского назначения, а в горном деле оптимизация расхода ВВ позволяет снизить интенсивность разрушающих сейсмических воздействий на здания и сооружения.

1. Миненко П.А. Исследование кристаллического фундамента линейно-нелинейными методами магнитометрии и гравиметрии // Геоинформатика. – № 4. – 2006. – С. 41–45.
2. Миненко П.А. Проблемы обратной задачи трехкомпонентной магнитометрии при исследованиях на кристаллическом щите // Науковий Вісник НГУ. – 2006. – № 12. – С. 23–27.
3. Миненко П.А. Методы и критерии оптимизации устойчивых решений обратной задачи глубинной морской гравиметрии // Науковий Вісник НГУ. – 2007. – № 11. – С. 83–91.
4. Миненко П.А. Обратная нелинейная задача гравиметрии для структурных исследований // Науковий Вісник НГУ. – 2008. – № 5. – С. 24–28.
5. Власов О.Е., Смирнов С.А. Основы расчета дробления горных пород взрывом. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 104 с.
6. Миненко П.А., Э.А. Корнет, В.А. Черненко и др. Теоретические исследования выбора диаметра компенсационной полости при проходке горных выработок // Совершенствование технологии подземной разработки руд черных металлов: сб. науч. тр. НИГРИ. – Кривой Рог, 1983. – С. 37–39.
7. Миненко П.А., Миненко В.П. Регрессионный анализ с искусственными переменными на основе итерационных методов по критерию минимума нормы поправок // Науковий Вісник НГУ. – 2007. – № 9. – С. 40–43.
8. Якубовский Ю.В., Ренард И.В. Электроразведка: 3-е изд. – М.: Недра, 1991. – 359 с.