

3. Поскольку разработанный измерительный комплекс способен обеспечить приемлемую для многих случаев точность измерений перепада температуры на концах участков теплотрасс, целесообразно его доведение до производственного использования при определении тепловых потерь тепловых сетей.

1. Т.Г.Грищенко, Л.В.Декуша, А.А.Безprozванный, А.И.Самокиш, Л.И.Воробьев, А.В.Гайдучек, А.Т.Ненюк. Контроль теплопотерь на участках теплотрасс // Энергетика и электрификация. №8. 2000г. -с.44-48.

2. Владимирский А.А., Владимирский И.А. Аппаратно-программный комплект для многоканальной регистрации температуры. Моделирования та інформаційні технології. Збірник наукових праць. Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України. Вип. 30, Київ, 2005р.-с.30-32.

Поступила 20.10.2010р.

УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В.Ф. Евдокимов, А.А. Кучаев, Е.И. Петрушенко, В.А. Кучаев

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ЖИДКОЙ ФАЗЕ НЕПРЕРЫВНОЛИТОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ

3D integral model of eddy currents and electromagnetic forces in the liquid phase of continuously cast billets with electromagnetic stirring is offered. Take into account the characteristics of the magnetic field of electromagnetic stirrer (EMS): currents low frequency 3...6 Hz in the EMS windings and electromagnetic forces field many times more magnetic fields of eddy currents. As a result we can neglect the magnetic field of eddy currents and assume that at each point of a massive conductor the magnetic field is equal to the magnetic field of EMS. In this case the initial system of integral equations is substantially simplified and its solution reduces to the solution of two subsystems: a vector integral equation for the density of the magnetization current on the surface of the EMS magnetic core and system of integral equations for the density of electric charges on the surfaces of massive conductors; in the resulting distribution of the density of electric charges is determined the electric scalar potential in the molten steel; from distribution of vector magnetic potential, the vector magnetic induction and the electric scalar potential in the liquid phase of billet is calculated the distribution of vectors of eddy currents density and electromagnetic forces.

Key words: integral model, eddy currents, electromagnetic stirrer, steel, billet

В настоящее время остро стоит вопрос о необходимости создания нового и улучшения конструкций существующего электротехнического

оборудования для электромагнитного перемешивания жидкой стали на машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Одним из основных элементов этого оборудования является ЭМП. Принцип действия ЭМП аналогичен работе асинхронного двигателя, где функции ротора исполняет жидкая фаза стальной заготовки. Поскольку электромагнитное перемешивание связано с большими дополнительными капитальными и эксплуатационными затратами, то важно оценить на начальной стадии проектирования эффективность системы электромагнитного перемешивания. По мнению разработчиков этих систем критерием эффективности перемешивания является максимальная линейная скорость в потоке жидкого металла, которая должна находиться в диапазоне 0,3...1 м/с. При максимальной линейной скорости меньшей 0,3 м/с эффективность перемешивания уменьшается, что не позволяет улучшить макро и микро структуру слитка. При максимальной скорости большей 1 м/с эффективность перемешивания уменьшается, так как появляются пористость вдоль фронта кристаллизации, отрицательная ликвация и увеличивается расход электроэнергии [1]. Оценить эффективность систем перемешивания на начальном этапе проектирования позволяет математическое моделирование. Решая систему уравнений неразрывности и Навье-Стокса находим распределение поля скоростей в жидкой фазе заготовки. Однако, предварительно необходимо вычислить распределение ЭДУ в жидкой фазе слитка и границу жидкой фазы.

Расчет поля ЭДУ представляет собой сложную электродинамическую задачу, т.к. конструктивные особенности ЭМП и массивных проводников, находящихся внутри его, таковы, что электромагнитные поля в них являются существенно трехмерными [2, 3]. Поэтому в моделях течения жидкой фазы непрерывнолитого слитка, описанных в литературе, использовано двумерное распределение ЭДУ, что приводит к значительным погрешностям [4-7].

В связи с этим в основу пакета программ для моделирования ЭМП должны быть положены трехмерные системы уравнений Максвелла. Сложность указанных задач с одной стороны и необходимость разработки практически реализуемых на доступных ЭВМ программ с другой стороны, побуждает искать такие эквивалентные преобразования этих систем, при которых во вновь полученных системах достаточно просто и с приемлемой точностью учитывалась бы специфика распределения полей в ЭМП.

Одним из таких преобразований является сведение краевых задач к эквивалентным СИУ методами теории потенциала. Незвестными в полученных СИУ являются плотности источников поля: плотности ТН на поверхности магнитопроводов и плотности ВТ в массивных проводниках. Поскольку объемы обмоток, поверхности магнитопроводов, объемы массивных проводников занимают, как правило, незначительную часть пространства, то переход к СИУ существенно упрощает задачу. Кроме того, при этом задача расщепляется на две части: расчет источников поля путем решения полученных СИУ, расчет поля в любой точке пространства путем

интегрирования по источникам поля. Тем не менее, задача решения СИУ остается достаточно сложной. В связи с этим оправданным является упрощение СИУ путем учета специфики магнитного поля ЭМП, которая состоит в том, что магнитное поле, созданное перемешивателем в проводящих элементах МНЛЗ существенно больше магнитного поля ВТ. В пользу этого соотношения говорит большая амплитуда магнитодвижущей силы (МДС) и низкая частота токов (1-6 Гц), питающих ЭМП.

В результате вместо решения исходной СИУ последовательно решаются две подсистемы: ВИУ для плотности связанного ТН на поверхности магнитопровода ЭМП и СИУ для ПЭЗ. По полученному распределению ВМП, ВМИ и СЭП находится распределение векторов плотности ВТ и ЭДУ в жидкой фазе заготовки.

Системы электромагнитного перемешивания для МНЛЗ. На рис. 1 показаны системы электромагнитного перемешивания, размещенные в кристаллизаторе, зоне вторичного охлаждения (ЗВО) и в зоне окончания затвердевания (ЗОЗ) МНЛЗ.

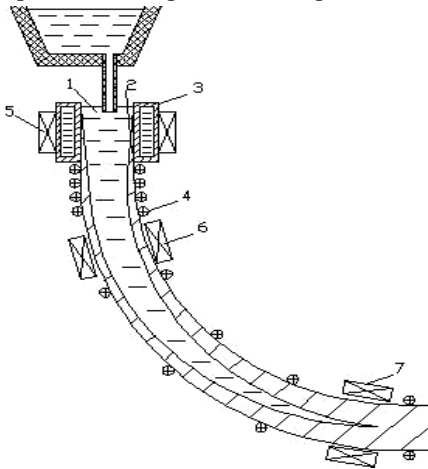


Рис. 1. Системы электромагнитного перемешивания для МНЛЗ:

- 1 – жидкая сталь,
- 2 – корочка формирующегося слитка,
- 3 – кристаллизатор,
- 4 – поддерживающие ролики,
- 5 – ЭМП в кристаллизаторе,
- 6 – ЭМП в ЗВО,
- 7 – ЭМП в ЗОЗ.

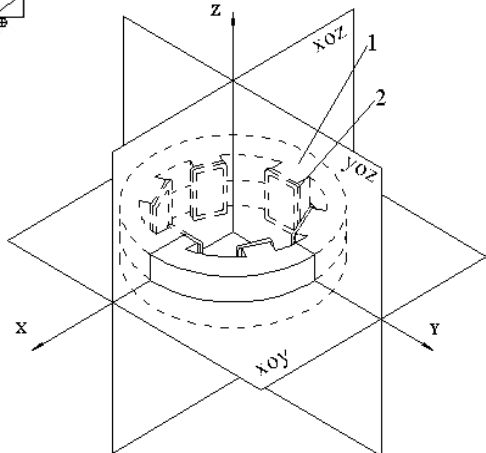
рис. 2 показан общий вид явнополюсного трехфазного ЭМП.

Рис. 2. Явнополюсный трехфазный ЭМП:

- 1 – магнитопровод,
- 2 – трехфазная обмотка ЭМП

Ограничимся рассмотрением ЭМП, у которого в объеме магнитопровода V магнитная проницаемость μ постоянна.

Трехмерная интегральная модель магнитного поля ЭМП. На



Введем обозначения: V_o, V^+ – объемы обмоток и окружающего магнитопровод и обмотки пространства, соответственно; S – поверхность магнитопровода; μ_0 – магнитная проницаемость в объемах V_o и V^+ ; $\dot{\delta}_0(Q)$ – вектор плотности тока в точке Q обмотки ЭМП.

ВМИ удовлетворяет на поверхности S следующему условию:

$$\left[n_Q, \frac{\dot{B}^+(Q)}{\mu_0} - \frac{\dot{B}^-(Q)}{\mu_0 \mu^-} \right] = 0, \quad (1)$$

где n_Q – нормаль к поверхности S в точке Q , положительное направление которой принято из объема V^- в объем V^+ ; $\dot{B}^+(Q)$ и $\dot{B}^-(Q)$ значения ВМИ

\dot{B} в точке Q со стороны объемов $4\pi \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}(Q) = P_{S_{rb}S} \dot{i}$, $Q \in S_{rb}$. и

$$\frac{2\pi}{\chi_{bl}} \dot{i}_{rb}(Q) - P_{S_{rb}S} \dot{i} = 4\pi j \omega \dot{A}_{r_{n_{rb}}} - 4\pi n_{rb} (U_r \times \dot{B}_r) + 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n_{rb}}, \quad Q \in S_{rb},$$

соответственно, которые можно представить через вектор плотности ТН $\dot{\sigma}(Q)$ в точке $Q \in S$:

$$\begin{aligned} \dot{B}^+(Q) &= \dot{B}^0(Q) + \frac{\mu_0 [\dot{\sigma}(Q), \dot{n}_Q]}{2}, \\ \dot{B}^-(Q) &= \dot{B}^0(Q) - \frac{\mu_0 [\dot{\sigma}(Q), \dot{n}_Q]}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{B}^0(Q)$ – вектор индукции на самой границе S , обусловленный всеми токами $\dot{\delta}_0$ и $\dot{\sigma}$, за исключением элемента тока $\dot{\sigma}(Q) ds_Q$.

Подставляя выражения (2) в (1), получим:

$$\dot{\sigma}(Q) + \left[\dot{n}_Q, \frac{2\chi}{\mu_0} \dot{B}^0(Q) \right] = 0, \quad (3)$$

где

$$\chi = \frac{\mu^- - 1}{\mu^- + 1}.$$

ВМИ можно записать в виде:

$$\dot{B}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_o} \frac{[\mathbf{r}_{QM} \dot{\delta}_0(M)]}{r_{QM}^3} dv_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{[\mathbf{r}_{QM} \dot{\sigma}(M)]}{r_{QM}^3} ds_M, \quad (4)$$

где \mathbf{r}_{QM} – радиус-вектор, который направлен из точки Q в точку M и равный расстоянию между точками Q и M .

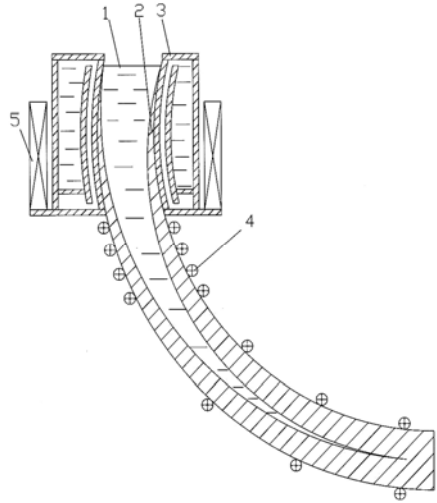
Подставляя (4) в (3), получаем следующее токовое ИУ для вектора плотности ТН на поверхности S магнитопровода

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(Q) + \frac{\chi}{2\pi} \int_S \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \dot{\sigma}(M)]]}{r_{QM}^3} ds_M = \\ - \frac{\chi}{2\pi} \int_{V_0} \frac{[\mathbf{n}_Q [\mathbf{r}_{QM} \dot{\delta}_0(M)]]}{r_{QM}^3} dv_M, \quad Q \in S. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате решения уравнения (5) находим распределение вектора $\dot{\sigma}$. По формуле (4) находим ВМИ в любой точке массивных проводников. Заметим, что во многих случаях уравнение (5) можно существенно упростить, если разложить магнитное поле ЭМП на симметричные составляющие [8].

Электрическая схема МНЛЗ. На рис. 3. приведена электрическая схема МНЛЗ.

Рис. 3. Электрическая схема МНЛЗ:
1 – жидкая фаза слитка, 2 – твердая фаза слитка, 3 – кристаллизатор,
4 – ролики, 5 – ЭМП



Жидкая 1 и твердая 2 фазы заготовки разделены поверхностью. Между твердой фазой слитка и стенкой кристаллизатора имеет место идеальный контакт. Проводимости жидкой фазы заготовки – γ_l , твердой фазы – γ_b , кристаллизатора 3 – γ_m , роликов 4 – $\dot{\phi}$ заданы и считаются постоянными в соответствующих объемах.

Проводимость окружающего пространства – $\gamma_+ = 0$. Относительную магнитную проницаемость роликов принимаем равной 1, т.е. $\mu_r = 1$. Возвратно-поступательное движение кристаллизатора не учитывается.

Приближенные выражения закона Ома в элементах электрической схемы МНЛЗ. Введем обозначения:

V_l, S_l – объем и поверхность жидкой фазы заготовки;

V_b, S_b – объем и поверхность твердой фазы заготовки;

\dot{A}_{Sc}, S_m – объем и поверхность кристаллизатора;

$\dot{\phi}, S_r$ – объем и поверхность роликов;

V_+ – окружающее пространство;

$$V = V_l + V_b + V_m + V_r ;$$

S_{lb} – поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки;

S_{l+} – поверхность контакта жидкой фазы заготовки с окружающей средой;

S_{b+} – поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой;

S_{mb} – поверхность контакта стенки кристаллизатора и твердой фазы заготовки;

S_{m+} – поверхность контакта кристаллизатора с окружающей средой;

$\nabla \dot{\delta}_r = 0$ – поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами;

S_{r+} – поверхность контакта роликов с окружающей средой;

$$S = S_{lb} + S_{l+} + S_{b+} + S_{mb} + S_{m+} + S_{rb} + S_{r+} ;$$

n_{lb} – нормаль к поверхности S_{lb} , направленная из объема V_l ;

n_{l+} – нормаль к поверхности S_{l+} , направленная из объема V_l ;

n_{b+} – нормаль к поверхности S_{b+} , направленная в объем V_b ;

n_{mb} – нормаль к поверхности S_{mb} , направленная из объема V_m ;

n_{m+} – нормаль к поверхности S_{m+} , направленная из объема V_m ;

$$-\gamma_b \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{mb}} + \gamma_m \frac{\partial \dot{\Phi}_m}{\partial n_{mb}} = j\omega(\gamma_b - \gamma_m) \dot{A}_{mmb} - \gamma_b n_{mb} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) + \gamma_b \frac{\partial \dot{\Psi}_b}{\partial n_{mb}} - \gamma_m \frac{\partial \dot{\Psi}_m}{\partial n_{mb}} -$$

нормаль к поверхности S_{rb} , направленная из объема V_r ;

n_{r+} – нормаль к поверхности S_{r+} , направленная из объема V_r .

Закон Ома в элементах электрической схемы МНЛЗ:

в объеме жидкой фазы заготовки V_l –

$$\dot{\delta}_l = \gamma_l (\dot{\mathbf{E}}_l + \mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma}) = \gamma_l (-j\omega \dot{A}_{l\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_l + \mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_{l\Sigma}), \quad (6)$$

в объеме твердой фазы заготовки V_b –

$$\dot{\delta}_b = \gamma_b (\dot{\mathbf{E}}_b + \mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma}) = \gamma_b (-j\omega \dot{A}_{b\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_b + \mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_{b\Sigma}), \quad (7)$$

в объеме кристаллизатора V_m –

$$\dot{\delta}_m = \gamma_m \dot{\mathbf{E}}_m = \gamma_m (-j\omega \dot{A}_{m\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_m), \quad (8)$$

в объеме роликов V_r –

$$\dot{\delta}_r = \gamma_r (\dot{\mathbf{E}}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_{r\Sigma}) = \gamma_r (-j\omega \dot{A}_{r\Sigma} - \nabla \dot{\phi}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_{r\Sigma}), \quad (9)$$

в окружающем пространстве V_+ –

$$\dot{\delta}_+ = 0. \quad (10)$$

В выражениях (6)–(10) $\dot{\delta}_l$, $\dot{\delta}_b$, S_{r+} , $\dot{\delta}_r$, $\dot{\delta}_+$ – комплексы векторов

плотности ВТ в жидкой и твердой фазах заготовки, в кристаллизаторе, роликах и окружающей среде;

$$4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial n_{l+}}(Q) = \int_{S_{IS}} \dot{i}_{IS}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{I+}} \dot{i}_{I+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\ + \int_{S_{S+}} \dot{i}_{S+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{mS}} \dot{i}_{mS}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{m+}} \dot{i}_{m+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\ \int_{S_{rS}} \dot{i}_{rS}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{r+}} \dot{i}_{r+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M = P_{S_{I+S}} \dot{i}$$

\dot{E}_b , \dot{E}_m , \dot{E}_r – комплексы векторов напряженности электрического поля в жидкой и твердой фазах заготовки, в кристаллизаторе и роликах; U_l – вектор скорости в жидкой фазе заготовки; U_b – вектор скорости вытягивания заготовки; U_r – вектор линейной скорости в объеме роликов; $\dot{A}_{l\Sigma}$, $\dot{A}_{b\Sigma}$, $\dot{A}_{m\Sigma}$, $\dot{A}_{r\Sigma}$ – комплексы ВМП в жидкой и твердой фазах заготовки, кристаллизаторе и роликах; $\dot{\phi}_l$, $\dot{\phi}_b$, $\dot{\phi}_m$, $\dot{\phi}_r$ – комплексы СЭП в жидкой и твердой фазах заготовки, в кристаллизаторе и роликах; $\dot{B}_{l\Sigma}$, $\dot{B}_{b\Sigma}$, $\dot{B}_{m\Sigma}$, $\dot{B}_{r\Sigma}$ – комплексы ВМИ в жидкой и твердой фазах заготовки, в кристаллизаторе и роликах; $j = \sqrt{-1}$; $\omega = 2\pi f$, где f – частота токов, питающих обмотки ЭМП.

Комплексы ВМП \dot{A}_Σ и магнитной индукции \dot{B}_Σ , обусловленные статором ЭМП и ВТ в элементах электрической схемы:

$$\dot{A}_{l\Sigma} = \dot{A}_l + \dot{A}_{lc}, \\ \dot{B}_{l\Sigma} = \dot{B}_l + \dot{B}_{lc},$$
(11)

где \dot{A}_l и \dot{B}_l – комплексы ВМП и ВМИ в жидкой фазе заготовки, обусловленные статором ЭМП; \dot{A}_{lc} и \dot{B}_{lc} – комплексы ВМП и ВМИ в жидкой фазе заготовки, обусловленные ВТ в элементах электрической схемы.

$$\dot{A}_{b\Sigma} = \dot{A}_b + \dot{A}_{bc}, \\ \dot{B}_{b\Sigma} = \dot{B}_b + \dot{B}_{bc},$$
(12)

где \dot{A}_b и \dot{B}_b – комплексы ВМП и ВМИ в твердой фазе заготовки, обусловленные статором ЭМП; \dot{A}_{bc} и \dot{B}_{bc} – комплексы ВМП и ВМИ в твердой фазе заготовки, обусловленные ВТ в элементах электрической схемы;

$$\dot{A}_{m\Sigma} = \dot{A}_m + \dot{A}_{mc}, \\ \dot{B}_{m\Sigma} = \dot{B}_m + \dot{B}_{mc},$$
(13)

где \dot{A}_m и \dot{B}_m – комплексы ВМП и ВМИ в кристаллизаторе, обусловленные статором ЭМП; \dot{A}_{mc} и \dot{B}_{mc} – комплексы ВМП и ВМИ в кристаллизаторе, обусловленные ВТ в элементах электрической схемы;

$$4\pi \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{mS}}(Q) = \int_{S_{IS}} \tau_{IS}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{I+}} \tau_{I+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M +$$

$$+ \int_{S_{S+}} \tau_{S+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{mS}} \tau_{mS}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{m+}} \tau_{m+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M +$$

$$+ \int_{S_{IS}} \tau_{IS}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \int_{S_{r+}} \tau_{r+}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q \bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M = P_{S_{mS}} \tau.$$

где \dot{A}_r и $4\pi \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}(Q) = P_{S_{IbS}} \dot{\tau}$, $Q \in S_{rb}$. – комплексы ВМП и ВМИ в объеме роликов, обусловленные статором ЭМП; \dot{A}_{rc} и $\frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{r+}}(Q) = \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{r+}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{r+}(Q)$, $Q \in S_{r+}$, – комплексы ВМП и ВМИ в объеме роликов, обусловленные ВТ в элементах электрической схемы.

Приближенные выражения закона Ома получаются из (6)–(9), если в них положить:

$$\dot{A}_{I\Sigma} \approx \dot{A}_I, \tag{15}$$

$$B_{I\Sigma} \approx \dot{B}_I,$$

$$\dot{A}_{b\Sigma} \approx \dot{A}_b, \tag{16}$$

$$B_{b\Sigma} \approx \dot{B}_b,$$

$$\dot{A}_{m\Sigma} \approx \dot{A}_m, \tag{17}$$

$$B_{m\Sigma} \approx \dot{B}_m,$$

$$\dot{A}_{r\Sigma} \approx \dot{A}_r, \tag{18}$$

$$B_{r\Sigma} \approx \dot{B}_r.$$

В результате закон Ома в элементах электрической схемы принимает следующий вид:

в жидкой фазе заготовки V_I –

$$\dot{\delta}_I = \gamma_I (\dot{E}_I + U_I \times \dot{B}_I) = \gamma_I (-j\omega \dot{A}_I - \nabla \dot{\phi}_I + U_I \times \dot{B}_I), \tag{19}$$

в твердой фазе заготовки V_b –

$$\dot{\delta}_b = \gamma_b (\dot{E}_b + U_b \times \dot{B}_b) = \gamma_b (-j\omega \dot{A}_b - \nabla \dot{\phi}_b + U_b \times \dot{B}_b), \tag{20}$$

в кристаллизаторе V_m –

$$\dot{\delta}_m = \gamma_m \dot{E}_m = \gamma_m (-j\omega \dot{A}_m - \nabla \dot{\phi}_m), \quad (21)$$

в объеме роликов V_r –

$$\dot{\delta}_r = \gamma_r (\dot{E}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) = \gamma_r (-j\omega \dot{A}_r - \nabla \dot{\phi}_r + \mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r). \quad (22)$$

Из выражений (19)-(22) видно, что при принятом допущении для расчета ВТ в массивных элементах МНЛЗ достаточно определить СЭП в этих элементах.

Сформулируем краевую задачу для СЭП.

Краевая задача для скалярного электрического потенциала в МНЛЗ. Краевая задача для СЭП в электрической схеме МНЛЗ вытекает из уравнений непрерывности и граничных условий непрерывности. Приведем их.

Уравнения:

в объеме жидкой фазы заготовки V_l –

$$\nabla \dot{\delta}_l = 0, \quad (23)$$

в твердой фазе заготовки V_b –

$$\nabla \dot{\delta}_b = 0, \quad (24)$$

в кристаллизаторе V_m –

$$\nabla \dot{\delta}_m = 0, \quad (25)$$

в объеме роликов V_r –

$$\nabla \dot{\delta}_r = 0. \quad (26)$$

Граничные условия:

поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки S_{lb} –

$$\mathbf{n}_{lb} \dot{\delta}_l = \mathbf{n}_{lb} \dot{\delta}_b, \quad (27)$$

поверхность контакта жидкой фазы заготовки с окружающей средой S_{l+} –

$$\mathbf{n}_{l+} \dot{\delta}_l = 0, \quad (28)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} –

$$\mathbf{n}_{b+} \dot{\delta}_b = 0, \quad (29)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки со стенкой кристаллизатора S_{mb} –

$$\mathbf{n}_{mb} \dot{\delta}_m = \mathbf{n}_{mb} \dot{\delta}_b, \quad (30)$$

поверхность контакта кристаллизатора с окружающей средой S_{m+} –

$$\mathbf{n}_{m+} \dot{\delta}_m = 0, \quad (31)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{rb} –

$$\mathbf{n}_{rb} \dot{\delta}_r = \mathbf{n}_{rb} \dot{\delta}_b, \quad (32)$$

поверхность контакта роликов с окружающей средой S_{r+} –

$$n_{r+} \dot{\delta}_r = 0. \quad (33)$$

Подставляя выражения приближенного закона Ома (19)-(22) в уравнения (23)-(26) получим следующие уравнения для СЭП $\dot{\phi}$:

в объеме жидкой фазы заготовки V_l –

$$\nabla \dot{\delta}_l = \gamma_l \left(-j\omega \nabla \dot{A}_l - \nabla^2 \dot{\phi}_l + \nabla (U_l \times \dot{B}_l) \right) = 0, \quad (34)$$

где

$$\nabla \dot{A}_l = 0, \quad (35)$$

$$\nabla^2 \dot{\phi}_l = \Delta \dot{\phi}_l, \quad (36)$$

$$\nabla (U_l \times \dot{B}_l) = \dot{B}_l \text{rot} U_l - U_l \text{rot} \dot{B}_l = \dot{B}_l \Omega_l, \quad (37)$$

$$\Omega_l = \text{rot} U_l - \text{вихрь}; \quad (38)$$

с учетом (35)-(38) уравнение (34) преобразуется к виду:

$$\Delta \dot{\phi}_l = \dot{B}_l \Omega_l. \quad (39)$$

Аналогично имеем:

в твердой фазе заготовки V_b –

$$\Delta \dot{\phi}_b = \dot{B}_b \Omega_b, \quad (40)$$

в кристаллизаторе V_m –

$$\Delta \dot{\phi}_m = 0, \quad (41)$$

в объеме роликов V_r –

$$\Delta \dot{\phi}_r = \dot{B}_r \Omega_r. \quad (42)$$

Подставив выражение приближенного закона Ома (19)-(22) в граничные условия (27)-(33), получим следующие граничные условия для скалярного потенциала $\dot{\phi}$:

поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки S_{lb} –

$$\gamma_b \frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{lb}} - \gamma_l \frac{\partial \dot{\phi}_l}{\partial n_{lb}} = -j\omega (\gamma_b - \gamma_l) \dot{A}_{n_{lb}} + (\gamma_b - \gamma_l) n_{lb} (U_l \times \dot{B}_l); \quad (43)$$

поверхность контакта жидкой фазы и окружающей среды S_{l+} –

$$-j\omega \dot{A}_{n_{l+}} - \frac{\partial \dot{\phi}_l}{\partial n_{l+}} + n_{l+} (U_l \times \dot{B}_l) = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \dot{\phi}_l}{\partial n_{l+}} = -j\omega \dot{A}_{n_{l+}} + n_{l+} (U_l \times \dot{B}_l);$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} –

$$\frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{b+}} = -j\omega \dot{A}_{n_{b+}} + n_{b+} (U_b \times \dot{B}_b); \quad (45)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки и стенки кристаллизатора S_{mb} –

$$\gamma_m \frac{\partial \dot{\phi}_m}{\partial n_{mb}} - \gamma_b \frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{mb}} = -j\omega(\gamma_m - \gamma_b) \dot{A}_{mmb} - \gamma_b \mathbf{n}_{mb} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b), \quad (46)$$

поверхность контакта кристаллизатора с окружающей средой S_{m+} –

$$\frac{\partial \dot{\phi}_m}{\partial n_{m+}} = -j\omega \dot{A}_{mm_{m+}}. \quad (47)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{br} –

$$-\gamma_r \frac{\partial \dot{\phi}_r}{\partial n_{rb}} + \gamma_b \frac{\partial \dot{\phi}_b}{\partial n_{rb}} = j\omega(\gamma_r - \gamma_b) \dot{A}_{rnrb} - (\gamma_r - \gamma_b) \mathbf{n}_{rb} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r); \quad (48)$$

поверхность контакта роликов и окружающей среды S_{r+} –

$$\frac{\partial \dot{\phi}_r}{\partial n_{r+}} = -j\omega \dot{A}_{rn_{r+}} + \mathbf{n}_{r+} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r). \quad (49)$$

Система ИУ, эквивалентная сформулированной краевой задаче (39)-(49). Решение системы уравнений (39)-(42) будем искать в виде суммы

$$\dot{\phi}(Q) = \dot{\Psi}(Q) + \dot{\Phi}(Q), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(Q) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{V_l} \frac{\dot{\mathbf{B}}_l(M) \Omega_l(M)}{r_{QM}} dV_M - \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_{V_b} \frac{\dot{\mathbf{B}}_b(M) \Omega_b(M)}{r_{QM}} dV_M - \frac{1}{4\pi} \int_{V_r} \frac{\dot{\mathbf{B}}_r(M) \Omega_r(M)}{r_{QM}} dV_M \end{aligned} \quad (51)$$

– частное решение уравнений (39)-(42);

$\dot{\Phi}(Q)$ – решение следующей однородной системы:

в объеме V_l –

$$\Delta \dot{\Phi}_l = 0, \quad (52)$$

в объеме V_b –

$$\Delta \dot{\Phi}_b = 0, \quad (53)$$

в объеме V_m –

$$\Delta \dot{\Phi}_m = 0, \quad (54)$$

в объеме V_r –

$$\Delta \dot{\Phi}_r = 0. \quad (55)$$

Граничные условия для системы уравнений (52)-(55) вытекают из граничных условий (43)-(49), если в них подставить (50):

поверхность контакта жидкой и твердой фаз заготовки S_{lb} –

$$\gamma_b \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{lb}} - \gamma_l \frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{lb}} = -j\omega(\gamma_b - \gamma_l) \dot{A}_{lnlb} + (\gamma_b - \gamma_l) \mathbf{n}_{lb} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) - (\gamma_b - \gamma_l) \frac{\partial \dot{\Psi}_l}{\partial n_{lb}}, \quad (56)$$

поверхность контакта жидкой фазы и окружающего пространства S_{l+} –

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{l+}} = -j\omega \dot{A}_{n_{l+}} + \mathbf{n}_{l+} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) - \frac{\partial \dot{\Psi}_l}{\partial n_{l+}}, \quad (57)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} –

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{b+}} = -j\omega \dot{A}_{n_{b+}} + \mathbf{n}_{b+} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) - \frac{\partial \dot{\Psi}_b}{\partial n_{b+}}, \quad (58)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки и стенки кристаллизатора S_{mb} –

$$\begin{aligned} \gamma_m \frac{\partial \dot{\Phi}_m}{\partial n_{mb}} - \gamma_b \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{mb}} = & -j\omega (\gamma_m - \gamma_b) \dot{A}_{mmb} - \gamma_b \mathbf{n}_{mb} (\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) - \\ & - (\gamma_m - \gamma_b) \frac{\partial \dot{\Psi}_m}{\partial n_{mb}}, \end{aligned} \quad (59)$$

поверхность контакта кристаллизатора с окружающей средой S_{m+} –

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_m}{\partial n_{m+}} = -j\omega \dot{A}_{mm+} - \frac{\partial \dot{\Psi}_m}{\partial n_{m+}}, \quad (60)$$

поверхность контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{rb} –

$$\begin{aligned} \gamma_b \frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{rb}} - \gamma_r \frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{rb}} = & j\omega (\gamma_r - \gamma_b) \dot{A}_{rnb} - \\ & - (\gamma_l - \gamma_b) \mathbf{n}_{rb} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) + (\gamma_r - \gamma_b) \frac{\partial \dot{\Psi}_r}{\partial n_{rb}}, \end{aligned} \quad (61)$$

поверхность контакта роликов с окружающей средой S_{r+} –

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{r+}} = -j\omega \dot{A}_{rn_{r+}} + \mathbf{n}_{r+} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) - \frac{\partial \dot{\Psi}_r}{\partial n_{r+}}. \quad (62)$$

Будем искать решение уравнений (52)-(55) с граничными условиями (56)-(62) в виде суммы потенциалов простого слоя (ППС):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(\mathcal{Q}) = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_{lb}} \dot{\tau}_{lb}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{l+}} \dot{\tau}_{l+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{b+}} \dot{\tau}_{b+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{mb}} \dot{\tau}_{mb}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{m+}} \dot{\tau}_{m+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{rb}} \dot{\tau}_{rb}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{r+}} \dot{\tau}_{r+}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M = \frac{1}{4\pi} \int_S \dot{\tau}(M) \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad \mathcal{Q} \in V, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
4\pi\dot{\Phi}(Q) &= T_{VS_{lb}} \dot{\tau}_{lb} + T_{VS_{l+}} \dot{\tau}_{l+} + T_{VS_{b+}} \dot{\tau}_{b+} + T_{VS_{mb}} \dot{\tau}_{mb} + \\
&+ T_{VS_{m+}} \dot{\tau}_{m+} + T_{VS_{rb}} \dot{\tau}_{rb} + T_{VS_{r+}} \dot{\tau}_{r+} = T_{VS} \dot{\tau}, \quad Q \in V.
\end{aligned} \tag{63}$$

Выражение (63) удовлетворяет системе уравнений (52)-(55). Для того, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям (56)-(62) необходимо, чтобы плотности ППС были решением СИУ, которая получается из граничных условий (56)-(62), если воспользоваться известными выражениями для скачка нормальной производной ППС при переходе через граничную поверхность [10]. При переходе через поверхность S_{lb} в точке Q скачок определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{lb}}(Q) &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}(Q)} + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{lb}(Q), \\
\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{lb}}(Q) &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}(Q)} - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{lb}(Q),
\end{aligned} \right\} Q \in S_{lb}, \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}(Q)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_{lb}} \dot{\tau}_{lb}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{l+}} \dot{\tau}_{l+} \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
&\frac{1}{4\pi} \int_{S_{b+}} \dot{\tau}_{b+} \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{mb}} \dot{\tau}_{mb} \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_{m+}} \dot{\tau}_{m+} \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \frac{1}{4\pi} \int_{S_{rb}} \dot{\tau}_{rb} \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_{r+}} \dot{\tau}_{r+} \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M = \frac{1}{4\pi} \int_S \dot{\tau}(M) \frac{\cos(\mathbf{n}_Q \mathbf{r}_{QM})}{r_{QM}^2} ds_M, \\
Q &\in S_{lb}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{lb}}(Q)} &= P_{S_{lb}S_{lb}} \dot{\tau}_{lb} + P_{S_{lb}S_{l+}} \dot{\tau}_{l+} + P_{S_{lb}S_{b+}} \dot{\tau}_{b+} + P_{S_{lb}S_{mb}} \dot{\tau}_{mb} + \\
&+ P_{S_{lb}S_{m+}} \dot{\tau}_{m+} + P_{S_{lb}S_{rb}} \dot{\tau}_{rb} + P_{S_{lb}S_{r+}} \dot{\tau}_{r+} = P_{S_{lb}S} \dot{\tau}, \quad Q \in S_{lb}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Подставляя (64), (65) в граничное условие (56), получим следующее ИУ для $\dot{\tau}_{lb}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\chi_{bl}} \dot{\tau}_{lb}(Q) - P_{S_{lb}S} \dot{\tau} &= 4\pi j\omega \dot{A}_{in_{lb}} - 4\pi \mathbf{n}_{lb} (\mathbf{U}_l \times \dot{\mathbf{B}}_l) + \\
&+ 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n_{lb}}, \quad Q \in S_{lb},
\end{aligned} \tag{66}$$

где $\chi_{bl} = \frac{\gamma_b - \gamma_l}{\gamma_b + \gamma_l}$.

Получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{l+}$ на поверхности контакта жидкой фазы и окружающего пространства S_{l+} . Для этого граничные условия (57) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{l+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_l}{\partial n_{l+}}(Q) = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{l+}}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{l+}(Q), \quad Q \in S_{l+}, \quad (67)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{l+}}}(Q) = P_{S_{l+}S} \dot{\tau}, \quad Q \in S_{l+}. \quad (68)$$

Подставив (67), (68) в граничные условия (57) получим:

$$\begin{aligned} 2\pi \dot{\tau}_{l+}(Q) + P_{S_{l+}S} \tau = -4\pi j \omega \dot{A}_{ln_{l+}} + \\ + 4\pi n_{l+} (U_l \times \dot{B}_l) - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_l}{\partial n_{l+}}, \quad Q \in S_{l+}. \end{aligned} \quad (69)$$

Получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{b+}$ на поверхности контакта твердой фазы заготовки с окружающей средой S_{b+} . Для этого граничное условие (58) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{b+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{b+}}(Q) = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{b+}}}(Q) - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{b+}(Q), \quad Q \in S_{b+}, \quad (70)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{b+}}}(Q) = P_{S_{b+}S} \tau, \quad Q \in S_{b+}. \quad (71)$$

Подставив (70), (71) в граничные условия (58), получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{b+}$:

$$\begin{aligned} -2\pi \dot{\tau}_{b+}(Q) + P_{S_{b+}S} \tau = -4\pi j \omega \dot{A}_{Sn_{b+}} + \\ + 4\pi n_{b+} (U_b \times \dot{B}_b) - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_b}{\partial n_{b+}}, \quad Q \in S_{b+}. \end{aligned} \quad (72)$$

Получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{mb}$ на поверхности контакта твердой фазы заготовки и стенки кристаллизатора S_{mb} . Для этого граничное условие (59) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{mb} . Скачок определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}_m}{\partial n_{mb}}(Q)} &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{mb}}(Q)} + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{mb}(Q), \\ \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{mb}}(Q)} &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{mb}}(Q)} - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{mb}(Q), \end{aligned} \right\} Q \in S_{mb}, \quad (73)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{mb}}(Q)} = P_{S_{mb}S} \tau, \quad Q \in S_{mb}. \quad (74)$$

Подставив (73), (74) в граничное условие (59) получим ИУ для $\dot{\tau}_{mb}$:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\chi_{mb}} \dot{\tau}_{mb}(Q) + P_{S_{mb}S} &= -4j\omega\pi \dot{A}_{mn_{mb}} - \\ \frac{4\pi\gamma_b}{\chi_{mb}(\gamma_m + \gamma_b)} \mathbf{n}_{mb}(\mathbf{U}_b \times \dot{\mathbf{B}}_b) - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_m}{\partial n_{mb}}, \quad Q \in S_{mb}, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\chi_{mb} = \frac{\gamma_m - \gamma_b}{\gamma_m + \gamma_b}$.

Получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{m+}$ на поверхности контакта кристаллизатора с окружающей средой S_{m+} . Для этого граничное условие (60) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{m+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\overline{\frac{\partial \dot{\Phi}_m}{\partial n_{m+}}(Q)} = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{m+}}(Q)} + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{m+}(Q), \quad Q \in S_{m+}, \quad (76)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{m+}}(Q)} = P_{S_{m+}S} \tau, \quad Q \in S_{m+}. \quad (77)$$

Подставляя (76), (77) в граничное условие (60) получим ИУ для τ_{m+}

$$2\pi \dot{\tau}_{m+}(Q) + P_{S_{m+}S} = -4\pi j\omega \dot{A}_{m_{n_{m+}}} - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_m}{\partial n_{m+}}, \quad Q \in S_{m+}. \quad (78)$$

Получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{rb}$ на поверхности контакта твердой фазы заготовки с роликами S_{rb} . Для этого граничное условие (61) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{rb} . Скачок определяется следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{rb}}(Q)} &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}(Q)} + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{rb}(Q), \\ \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}_b}{\partial n_{rb}}(Q)} &= \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}(Q)} - \frac{1}{2} \dot{\tau}_{rb}(Q), \end{aligned} \right\} Q \in S_{rb}, \quad (79)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{rb}}}(Q) = P_{S_{rb}S} \dot{\tau}, \quad Q \in S_{rb}. \quad (80)$$

Подставляя (79), (80) в граничное условие (61) получим следующее ИУ для $\dot{\tau}_{rb}$:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\chi_{rb}} \dot{\tau}_{rb}(Q) - P_{S_{rb}S} \dot{\tau} &= 4\pi j\omega \dot{A}_{ln_{rb}} - 4\pi n_{rb} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) + \\ &+ 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n_{rb}}, \quad Q \in S_{rb} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\text{где } \chi_{rb} = \frac{\gamma_b - \gamma_r}{\gamma_b + \gamma_r}.$$

Получим ИУ для плотности $\dot{\tau}_{r+}$ на поверхности контакта роликов и окружающего пространства S_{r+} . Для этого граничные условия (62) запишем с учетом скачка нормальной производной ППС при переходе через поверхность S_{r+} . Скачок определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial \dot{\Phi}_r}{\partial n_{r+}}(Q) = \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{r+}}}(Q) + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{r+}(Q), \quad Q \in S_{r+}, \quad (82)$$

где

$$4\pi \overline{\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial n_{r+}}}(Q) = P_{S_{r+}S} \dot{\tau}. \quad (83)$$

Подставив (82), (83) в граничные условия (62) получим следующее ИУ для $\dot{\tau}_{r+}$:

$$\begin{aligned} 2\pi \dot{\tau}_{r+}(Q) + P_{S_{r+}S} \dot{\tau} &= -4\pi j\omega \dot{A}_{rn_{r+}} + 4\pi n_{r+} (\mathbf{U}_r \times \dot{\mathbf{B}}_r) - \\ - 4\pi \frac{\partial \dot{\Psi}_r}{\partial n_{r+}}, \quad Q \in S_{r+}. \end{aligned} \quad (84)$$

Таким образом, получены СИУ (66), (69), (72), (75), (78), (81), (84), эквивалентные краевой задаче для уравнений (52)-(55) с граничными условиями (56)-(62). Аппроксимируя СИУ системой алгебраических уравнений и решая последнюю, находим распределение плотности зарядов $\dot{\tau}$ на совокупной поверхности S . По полученному $\dot{\tau}$ из выражения (63) находим $\dot{\Phi}(Q)$, $Q \in V$. По формулам (51), (50) – СЭП $\dot{\phi}(Q)$, $Q \in V$. Подставив $\dot{\phi}(Q)$ в приближенный закон Ома (19)-(22), получим вектора плотностей ВТ в массивных элементах МНЛЗ, в том числе и в жидкой фазе слитка.

Выводы

Разработана трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов в жидкой фазе затвердевающего слитка в МНЛЗ, оснащенной системой электромагнитных перемешивателей. В основе модели лежат приближенные выражения закона Ома в массивных элементах электрической схемы МНЛЗ. В соответствии с этими выражениями для расчета вихревых токов в массивных проводниках необходимо знать распределение в них скалярного электрического потенциала. Для нахождения последнего в работе получена система интегральных уравнений относительно плотности электрического заряда на поверхности массивных проводников.

1. В.Г. Грачев, Б.В. Сивак, С.В. Зарубин, В.Г. Фисенко, А.А. Соловьев. Математическое моделирование МГД-процессов при электромагнитном перемешивании жидкого металла в процессе непрерывной разливки круглых заготовок // Черные металлы. – 2009, № 6. – С. 8–14.
2. Natarajan T.T., El-Kaddah N. Finite Element Analysis of Electromagnetically Driven Flow in Sub-mold Stirring of Steel Billets and Slabs // ISIJ Int. – 1998. – Vol. 38, No. 7. – pp. 707–714.
3. Davidson P.A. Magnetohydrodynamics in materials processing // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. 31:273–300.
4. В. Грачев, Л. Кузьмина, Ф. Солодовник, И. Шифрин, А. Целиков, А. Ротенберг. Системы электромагнитного перемешивания жидкой стали на сортовых, блюмовых и слябовых МНЛЗ // Оборудование. – 2005, № 11. – С. 48–52.
5. Найдек В.Л., Дубоделов В.И., Евдокимов В.Ф., Кондратенко И.П., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Ращепкин А.П. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок // Электронное моделирование. – 2004. – № 1. – С. 30–52.
6. В.Ф. Евдокимов, А.А. Кучаев, Е.И. Петрушенко, Г.И. Касьян. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе МНЛЗ с явнополюсным электромагнитным перемешивателем // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32, № 1. – С. 53–75.
7. Дубоделов В.И., Евдокимов В.Ф., Кондратенко И.П., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Ращепкин А.П., Филиппова Г.А., Якобше Р.Я. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем // Электронное моделирование. – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 57–74.
8. Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Кучаев В.А. Трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя // Сб. научн. трудов межд. конференции “Моделирование-2010”, 12-14 мая 2010 г. – г. Киев. – 2010. – Т.1. – С. 32–40.
9. Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Кучаев В.А. Трехмерная интегральная модель магнитного поля электромагнитного перемешивателя // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32, № 4. – С. 93–112.
10. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.

Поступила 4.10.2010г.