УДК 62-50:519.7

©2010. **В.Ф. Щербак, И.С. Дмитренко**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ГИРОСТАТА ПО ЕЕ ПРОЕКЦИИ

Рассмотрена задача определения вектора угловой скорости гиростата по измерениям одной из его проекций на оси подвижной системы координат. Используется новый метод решения задачи наблюдения, разработанный для специального класса дифференциальных уравнений, правые части которых являются линейными функциями относительно неизмеряемых компонент фазового вектора. Для таких систем приведена схема построения функциональных выражений, определяющих вдоль решений вспомогательной системы искомые неизвестные как функции от известных величин. Построены алгебраические соотношения, которые позволяют находить асимптотические оценки вектора угловой скорости гиростата.
Ключевые слова: *нелинейный наблюдатель, инвариантные многообразия, гиростат.*

1. Синтез дополнительных алгебраических соотношений в задаче наблюдения нелинейных динамических систем. Для многих задач теории управления характерной является ситуация, когда в процессе функционирования реального объекта проводятся те или иные измерения его состояния. Формально подобные конструкции моделируются динамической системой с выходом

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$y = h(x), \quad y \in R^k. \tag{2}$$

В случаях, когда начальное состояние $x(0)$ неизвестно и $k < n$, возникает задача наблюдения системы (1), (2), которая состоит в определении решения $x(t)$ по информации о выходе системы – функции $y(t)$, значения которой предполагаются известными для любого момента времени $t > 0$. Кроме того полагаем, что функции $f(x)$, $h(x)$ являются дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Представим фазовый вектор x в виде двух подвекторов $x = (x_1, x_2)^T$, где $x_1 = (x^1, x^2, \ldots, x^k)^T$, $x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^n)^T$, и далее, для простоты будем полагать, что система (1), (2) с помощью невырожденной замены переменных приведена к виду, при котором измеряются первые k координат, $y(t) = x_1(t)$. Далее будем считать, что условия наблюдаемости выполнены и ограничим класс рассматриваемых объектов системами, правые части которых линейны относительно неизмеряемых переменных $x_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2, \\ \ y = x_1. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $g_1(x_1), g_2(x_1)$ – матрицы размерностей $k \times (n-k)$ и $(n-k) \times (n-k)$ соответственно.

Дополним исходную систему ее управляемым аналогом. Для этого перепишем систему (3), подставляя в правые части вместо p_1 известные значения x_1 и вводя n вспомогательных функций $u_1(x_1, p_1, p_2) \in R^k, u_2(x_1, p_1, p_2) \in R^{n-k}$. Получаем

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= f_1(x_1) + g_1(x_1)p_2 + u_1, \\ \dot{p_2} &= f_2(x_1) + g_2(x_1)p_2 + u_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Будем рассматривать систему (4) как динамическое расширение системы дифференциальных уравнений (3), с помощью которого необходимо определить неизвестные компоненты фазового вектора $x_2(t)$.

Один из основных подходов в решении задачи наблюдения предполагает построение для системы (3) уравнений наблюдателя [1]. В частности, если управления u_1, u_2 можно подобрать такими, чтобы все решения системы (4) асимптотически стремились к наблюдаемому решению системы (3), то полученная система (4) будет наблюдателем для системы (3). Для линейных систем известны методы построения наблюдателей, в нелинейном случае общего метода решения этой задачи не существует.

В данной работе используется подход, предложенный в [2, 3], который не связан с непосредственным построением нелинейного наблюдателя для системы (3). Предлагается более общая конструкция, состоящая в синтезе алгебраических соотношений, которые вдоль любых решений расширенной системы (3), (4) выражают неизвестные величины $x_2(t)$ через известные: наблюдаемый выход $x_1(t)$ и функции $p_1(t), p_2(t)$ – решения вспомогательной системы (4).

Иными словами, предлагаемый способ решения задачи наблюдения состоит в подборе управлений $u_1(.), u_2(.)$ таким образом, чтобы существовала некоторая функция $\Psi(x_1, p_1, p_2)$ – новый выход для расширенной системы (3), (4), значения которой вдоль решений системы (3), (4) позволяли бы оценить вектор $x_2(t)$ по формуле

$$x_2 = \Psi(x_1, p_1, p_2). \tag{5}$$

Равенства (5) определяют в расширенном фазовом пространстве переменных x_1, x_2, p_1, p_2 многообразие размерности $n + k$. Основные этапы предлагаемой схемы решения задачи наблюдения состоят в следующем.

Первый этап – выбор управлений. В [2] показано, что для систем рассматриваемого класса всегда существуют управления u_1, u_2, при которых для любой дифференцируемой функции $\Psi(x_1, p_1, p_2)$ многообразие, описываемое соотношениями (5), станет инвариантным для некоторых решений системы (3), (4).

Второй этап – свойство притяжения. Чтобы равенства (5) можно было использовать для оценки всех решений системы (3), (4), на втором этапе выбирается такое семейство функций $\Psi(x_1, p_1, p_2)$, при котором сгенерированное инвариантное многообразие обладает свойством глобального притяжения.

Применим указанную схему для построения соотношений, позволяющих с помощью решений вспомогательной системы получать асимптотические оценки вектора угловой скорости гиростата при измерениях одной из его проекций на связанные с телом оси. Отметим, что аналогичная задача, но с известными двумя компонентами угловой скорости, была рассмотрена в [3].

2. Определение угловой скорости гиростата как задача наблюдения. В качестве уравнения движения гиростата возьмем уравнения [4]

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости носителя; $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянный вектор гиростатического момента.

Перепишем (6) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\omega_1} &= a_1\omega_2\omega_3 - a_{31}\omega_2 + a_{21}\omega_3, \\ \dot{\omega_2} &= a_2\omega_1\omega_3 + a_{32}\omega_1 - a_{12}\omega_3, \\ \dot{\omega_3} &= a_3\omega_1\omega_2 - a_{23}\omega_1 + a_{13}\omega_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $a_{ij} = \dfrac{\lambda_i}{A_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$; $a_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}$. Предположим, что в процессе движении гиростата измеряется проекция вектора угловой скорости на одну из связанных с носителем главных осей системы координат. Пусть, для определенности, в любой момент времени известно значение $\omega_1(t)$. Требуется по этой информации восстановить значения $\omega_2(t), \omega_3(t)$, т.е. решить задачу наблюдения полного вектора состояния системы (7) по выходу $y(t) = \omega_1$.

В качестве уравнений обобщенного наблюдателя для системы (7) выберем их аналог. Обозначим фазовый вектор наблюдателя $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ и заменим в (7) вектор ω на вектор p, подставляя в правые части вместо $p_1(t)$ известную функцию времени $\omega_1(t)$. Кроме того, введем функции u_2, u_3 – компоненты вектора управления, с помощью которых будем модифицировать эти уравнения таким образом, чтобы использовать их решения для целей наблюдения. Получаем

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= a_1p_2p_3 - a_{31}p_2 + a_{21}p_3, \\ \dot{p_2} &= a_2\omega_1p_3 + a_{32}\omega_1 - a_{12}p_3 + u_2, \\ \dot{p_3} &= a_3\omega_1p_2 - a_{23}\omega_1 + a_{13}p_2 + u_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Правые части системы (8) не содержат неопределенных величин. Поэтому для любых допустимых управлений u_2, u_3 и начальных условий $p(0)$ значения $p(t)$ могут быть найдены в результате решения задачи Коши. Далее компоненты вектора $p(t)$ будут считаться известными функциями времени.

3. Синтез инвариантных многообразий. Составим уравнения для отклонений решений систем (7) и (8). Обозначим $e_i(t) = p_i(t) - \omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Вычитая (7) из (8), получаем

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= a_1(p_2p_3 - \omega_2\omega_3) + a_{21}e_3 - a_{31}e_2, \\ \dot{e_2} &= (a_2\omega_1 - a_{12})e_3 + u_2, \\ \dot{e_3} &= (a_3\omega_1 + a_{13})e_2 + u_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Последние два уравнения системы (9) являются линейными относительно неизвестных e_2, e_3, поэтому для решения задачи наблюдения можно применять схему, описанную в [2]. Пусть $f_2(e_1, \omega_1)$, $f_3(e_1, \omega_1)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Будем искать такие управления u_2 и u_3, чтобы выражения

$$e_2 = f_2(e_1, \omega_1), \qquad e_3 = f_3(e_1, \omega_1) \tag{10}$$

были инвариантными соотношениями для системы (7), (9). Иными словами, если равенства (10) выполнены в какой-то момент времени для некоторых решений системы (7), (9), то они будут выполнены для любых моментов времени. На таких решениях неизвестные $e_2(t), e_3(t)$, а, следовательно, и искомые $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ выражаются по формулам (10) через известные функции времени $e_1(t)$, $\omega_1(t)$, что решает задачу наблюдения.

В соответствии с изложенной схемой покажем вначале, что такие управления существуют. Выполним в системе (9) замену переменных e_2, e_3 по формулам

$$\eta_2 = e_2 - f_2(e_1, \omega_1), \qquad \eta_3 = e_3 - f_3(e_1, \omega_1).$$

Для того, чтобы многообразия, определяемые равенствами (10), стали инвариантными для (9), достаточно управления u_2, u_3 выбрать такими, чтобы после подстановки их в систему (9) последняя стала однородной относительно новых переменных η_2, η_3. Действительно, полагая

$$\begin{aligned} u_2 &= A(\omega_1)f_3 + a_{12}f_3 + V_2[a_1(p_2p_3 - \tilde{p_2}\tilde{p_3}) + a_{21}f_3 - a_{31}f_2] + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial \omega_1}(a_1p_2p_3 + a_{21}p_3 - a_{31}p_2 - a_1(p_2p_3 - \tilde{p_2}\tilde{p_3})) - a_{21}f_3 + a_{31}f_2), \\ u_3 &= -A(\omega_1)f_2 + a_{12}f_3 + V_2[a_1(p_2p_3 - \tilde{p_2}\tilde{p_3}) + a_{21}f_3 - a_{31}f_2] + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial \omega_1}(a_1p_2p_3 + a_{21}p_3 - a_{31}p_2 - a_1(p_2p_3 - \tilde{p_2}\tilde{p_3})) - a_{21}f_3 + a_{31}f_2), \end{aligned}$$

где $A(\omega_1) = a_2\omega_1 - a_{21}$, $\tilde{p_i} = p_i - f_i$, $V_i = \dfrac{\partial f_i}{\partial e_1} - \dfrac{\partial f_i}{\partial \omega_1}$, $i = 2, 3$, получаем, что в переменных η_2, η_3 два последних уравнения системы (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\eta_2} &= (a_1\tilde{p_3} - a_{31})V_2\eta_2 + [A(\omega_1) + (a_1\tilde{p_2} + a_{21})V_2]\eta_3 - a_1V_2\eta_2\eta_3, \\ \dot{\eta_3} &= [-A(\omega_1) + (a_1\tilde{p_3} - a_{31})V_3]\eta_2 + (a_1\tilde{p_2} + a_{21})V_3\eta_3 - a_1V_3\eta_2\eta_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, функции $\eta_2 \equiv 0$, $\eta_3 \equiv 0$ удовлетворяют системе (11), что и доказывает существование многообразия, определяемого равенствами (10).

Для того, чтобы использовать соотношения (10) в качестве формул, определяющих оценки любого решения, не определенные пока функции $f_2(e_1, \omega_1)$, $f_3(e_1, \omega_1)$ нужно выбрать такими, чтобы найденное тривиальное решение системы (11) обладало свойством глобальной асимптотической устойчивости.

В общем случае выбор $f_2(e_1, \omega_1), f_3(e_1, \omega_1)$ требует дополнительного исследования. Ниже будет рассмотрен частный случай: гиростат с осесимметричным носителем, для которого достаточно просто синтезировать многообразия (10) такими, чтобы тривиальное решение уравнений ошибок (11) обладало свойством глобальной асимптотической устойчивости.

4. Осесимметричный случай. Свойство глобального притяжения. Пусть $A_2 = A_3$, тогда $a_1 = 0$, $a_3 = -a_2$, $a_{12} = a_{13}$ и уравнения движения гиростата принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{\omega_1} &= a_{21}\omega_3 - a_{31}\omega_2, \\
\dot{\omega_2} &= a_2\omega_1\omega_3 + a_{32}\omega_1 - a_{12}\omega_3, \\
\dot{\omega_3} &= -a_2\omega_1\omega_2 + a_{12}\omega_2 - a_{23}\omega_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Запишем управления, гарантирующие существование инвариантных многообразий

$$\begin{aligned}
u_2 &= -A(\omega_1)f_3 + V_2(a_{21}f_3 - a_{31}f_2) + (a_{21}p_3 - a_{31}p_2)\frac{\partial f_2}{\partial \omega_1}, \\
u_3 &= A(\omega_1)f_2 + V_3(a_{21}f_3 - a_{31}f_2) + (a_{21}p_3 - a_{31}p_2)\frac{\partial f_3}{\partial \omega_1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения ошибок в рассматриваемом случае также упрощаются:

$$\begin{aligned}
\dot{e_1} &= a_{21}e_3 - a_{31}e_2, \\
\dot{e_2} &= A(\omega_1)e_3 + u_2, \\
\dot{e_3} &= -A(\omega_1)e_2 + u_3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что рассматриваемый случай представляет дополнительный интерес в связи с тем, что в отличие от используемого в работе метода синтеза инвариантных многообразий, использование стандартного подхода решения задачи наблюдения, основанного на построении нелинейного наблюдателя, невозможно. Действительно, легко видеть, что для решений системы уравнений (14) при $u_2 = u_3 = 0$ имеет место тождество ${e_2}^2 + {e_3}^2 = \text{const}$. Следовательно, для ее правых частей нарушены необходимые условия стабилизируемости Броккета и система (14), являясь управляемой, не может быть стабилизирована гладким управлением. А это значит, что задача наблюдения для исходной системы не может быть решена путем построения асимптотического наблюдателя вида (8) с управлениями соответствующего класса.

Введем отклонения η_2, η_3 и сделаем в уравнениях (14) замену переменных по формулам

$$e_1 = e_1, \quad e_2 = f_2(e_1, \omega_1) + \eta_2, \quad e_3 = f_3(e_1, \omega_1) + \eta_3.$$

В переменных η_2, η_3 два последних уравнения (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\eta_2} &= a_{31}V_2\eta_2 + [A(\omega_1) - a_{21}V_2]\eta_3, \\ \dot{\eta_3} &= [-A(\omega_1) - a_{31}V_3]\eta_2 - a_{21}V_3\eta_3. \end{aligned} \tag{15}$$

Для решения задачи наблюдения по предложенной схеме требуется, чтобы тривиальное решение системы (15) обладало свойством асимптотической устойчивости. Для обеспечения этого в нашем распоряжении остаются неопределенные пока функции $V_2(\omega_1, e_1), V_3(\omega_1, e_1)$.

Преобразуем последнее уравнение системы (15), вводя вместо η_3 новую переменную $\varepsilon = \eta_3 - \eta_2$, и потребуем выполнения равенства

$$\dot{\varepsilon} = \lambda\varepsilon + W_3(\omega_1, e_1)\eta_2,$$

где $W_3(\omega_1, e_1)$ – некоторая функция, подлежащая определению. Для этого достаточно, чтобы $W_3(\omega_1, e_1)$ была связана с функциями $V_2(\omega_1, e_1), V_3(\omega_1, e_1)$ соотношением

$$V_3 = V_2 + \frac{W_3 + (1 + \lambda)A(\omega_1)}{-\lambda a_{21} + a_{31}}. \tag{16}$$

Здесь λ – отрицательная константа. В результате замены (16) система (15) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\eta_2} &= [(a_{31} - a_{21})V_2 + A(\omega_1)]\eta_2 + [A(\omega_1) - a_{21}V_2]\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= \lambda\varepsilon + W_3(\omega_1, e_1)\eta_2. \end{aligned} \tag{17}$$

На последнем этапе определим свободные функции $V_2(\omega_1, e_1)$, $W_3(\omega_1, e_1)$ по формулам

$$V_2 = \frac{\lambda - A(\omega)}{a_{31} - a_{21}}, \qquad W_3 = -A(\omega_1) + a_{21}V_2 = \frac{a_{21}\lambda - a_{31}A(\omega_1)}{a_{31} - a_{21}}. \tag{18}$$

В качестве функции Ляпунова для системы (17) выберем функцию

$$V = \frac{1}{2}({\eta_2}^2 + \varepsilon^2).$$

Ее производная с учетом (18) является отрицательно определенной

$$\dot{V} = \dot{\eta_2}\eta_2 + \dot{\varepsilon}\varepsilon = \lambda({\eta_2}^2 + \varepsilon^2).$$

В результате установлено, что при выбранных V_2, V_3 всякое решение системы (17) $\eta_2 = \eta_2(t)$, $\varepsilon = \eta_3(t) - \eta_2(t)$, а следовательно, и решение системы

(15), асимптотически стремится к нулю. Тем самым показано, что соотношения (10) могут быть использованы для нахождения асимптотических оценок неизвестных $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ компонент вектора угловой скорости гиростата.

Осталось установить класс функций $f_2(e_1, \omega_1)$, $f_3(e_1, \omega_1)$ и соответствующие им управления (13). Функции V_2, V_3 определены формулами (16), (18) и являются линейными функциями от ω_1:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{a_{31} - a_{21}}(-a_2\omega_1 + a_{21} + \lambda), \\ V_3 &= \frac{1}{(a_{31} - a_{21})(a_{21}\lambda - a_{31})}[a_2(a_{21} + a_{31}(1 - \lambda))\omega_1 + a_{21}\lambda^2 - \\ &\quad -(a_{21} + a_{31} - a_{21}a_{31})\lambda - a_{21}(a_{21} + a_{31})]. \end{aligned} \tag{19}$$

Для нахождения функций $f_2(e_1, \omega_1)$, $f_3(e_1, \omega_1)$, определяющих инвариантное многообразие (10) со свойством глобального притяжения, достаточно выбрать какое-либо частное решение уравнения в частных производных первого порядка, свободный член которого является линейной функцией с постоянными коэффициентами относительно переменной ω_1

$$\frac{\partial f_i}{\partial e_1} - \frac{\partial f_i}{\partial \omega_1} = V_i = c_i + d_i\omega_1, \tag{20}$$

где c_i, d_i, $i = 2, 3$ – соответствующие коэффициенты в (19). Общее решение (20) имеет вид

$$f_i(\omega_1, e_1) = -1/2\, d_i{\omega_1}^2 - c_i\omega_1 + F_i(e_1 + \omega_1), \tag{21}$$

где $F_i(e_1 + \omega_1)$, $i = 2, 3$, – произвольные дифференцируемые функции.

Зафиксируем функции семейства (21) выбором $F_i(e_1 + \omega_1)$, например, положив $F_i(e_1 + \omega_1) = 0$. По формулам (13) находим управления u_2, u_3 и, после подстановки их во вспомогательную систему дифференциальных уравнений (8), вычисляем функции $p_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, в результате решения задачи Коши с произвольными начальными условиями. В силу проведенных построений для функций $\omega_2(t), \omega_3(t)$ выполнены равенства $e_i = f_i(e_1,\ \omega_1) + \eta_i$, которые теперь можно записать в виде

$$\omega_i(t) = p_i(t) + 1/2\, d_i{\omega_1}^2(t) + c_i\omega_1(t) + O(e^{\lambda t}), \quad i = 2, 3. \tag{22}$$

Формулы (22) и определяют асимптотические оценки искомых переменных $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$.

1. *Luenberger D.* Introduction to observers // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1977. – **3**. – P. 47–52.
2. *Щербак В.Ф.* Задача отслеживания состояния нелинейной системы при неполной информации о движении // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 127–132.
3. *Щербак В.Ф.* Синхронизация угловых скоростей гиростатов // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 127–132.

4. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 175 с.

V.F. Shcherbak, I.S. Dmitrenko

Determination of a gyrostat angular velocity on its projection

The observation problem for differential equations whose right-hand sides are linear functions with respect to unmeasured components of the phase vector is studied. A scheme of invariant manifold synthesis for determination of unknown quantities is developed. The method is based on a dynamic expansion of the original system and nonlinear methods of stabilization control. The problem of determining the gyrostat angular velocity on measurements of one of its projections is solved.

Keywords: *nonlinear observer, invariant manifolds, gyrostat.*

В.Ф. Щербак, І.С. Дмитренко

Визначення кутової швидкості гіростата за її проекцією

Пропонується метод розв'язання задачі спостереження для диференціальних рівнянь, праві частини яких є лінійними функціями щодо невідомих компонент фазового вектора. Для таких систем наведено схему побудови розширення вихідної системи та синтезу інваріантних многовидів, які визначають невідомі, як функції від відомих величин. Метод засновано на динамічному розширенні вихідної системи її керованим прототипом та на нелінійних методах синтезу стабілізуючих керувань. Розв'язано задачу визначення вектору кутової швидкості гіростата за вимірюваннями однієї з його проекцій на осі рухомої системи координат.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, інваріантні многовиди, гіростат.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 07.02.10