

УДК 531.36

©2010. А.А. Клименко, Ю.В. Михлин

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МАЯТНИКОВЫМ ГАСИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрены нелинейные нормальные формы колебаний механической системы, содержащей маятниковый гаситель колебаний. Выделены связанная и локализованная формы колебаний. В последнем случае основная энергия колебаний сосредоточена в маятнике, поэтому эта форма колебаний наиболее благоприятна для виброгашения. Изучена устойчивость форм колебаний.

**Ключевые слова:** маятниковый гаситель колебаний, нелинейные нормальные формы колебаний.

**Введение.** Маятниковые системы, изучение динамики которых продолжается и в настоящее время, представляют большой интерес для нелинейной теории колебаний [1–3]. Известны также многочисленные применения подобных систем в технике, в частности, в задачах виброгашения [4–6], а также при описании физических процессов [7, 8]. Несмотря на то, что движения маятниковых систем детально изучались как в прошлом [9], так и в последнее время [10, 11], аналитические результаты получены только лишь для колебаний с относительно небольшими амплитудами. В настоящей работе рассмотрена динамика маятниковой системы, которая имеет отношение к гашению колебаний механических систем. Новые методы теории возмущений в сочетании с вычислительными процедурами используются для построения и анализа устойчивости нелинейных нормальных форм [12–14] как для малых, так и для больших амплитуд колебаний.

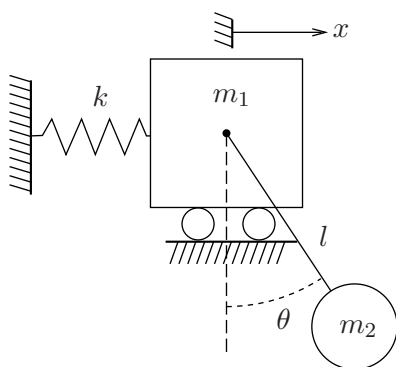


Рис. 1. Модель механической системы.

**1. Построение нелинейных нормальных форм колебаний.** Рассматриваются свободные колебания системы с двумя степенями свободы, модель которой представлена на рис. 1. В представленной модели механическая система, колебания которой необходимо загасить, представляет собой точечную массу  $m_1$  на линейной пружине с жесткостью  $k$ . К линейному осциллятору присоединен маятниковый гаситель колебаний с массой  $m_2$  и длиной  $l$ . Колебания системы описываются двумя обобщенными координатами  $x$  (смещение массы  $m_1$ ) и  $\theta$  (угол отклонения маятника с массой

$m_2$ ). Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\theta} \cos \theta - m_2l\dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0, \\ \ddot{x} \cos \theta + l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Функции  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  раскладываются в ряд Маклорена, причем отбрасываются слагаемые, содержащие  $\theta$  в степени, выше третьей. Сделаем предположение о малости массы маятника по отношению к массе основной линейной подсистемы, вводя преобразование  $m_2 \rightarrow \varepsilon m_2$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр. Это предположение вводится из соображений инженерной практики. Теперь уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} (m_1 + \varepsilon m_2)\ddot{x} + \varepsilon m_2l\ddot{\theta} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - \varepsilon m_2l\dot{\theta}^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) + kx = 0, \\ \ddot{x} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + l\ddot{\theta} + g \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) можно выделить две формы колебаний:

а) форма связанных колебаний  $x = x(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ , когда амплитуды движений по двум обобщенным координатам сравнимы;

б) локализованная форма колебаний (имеются незначительные смещения массы  $m_1$  наряду с большими колебаниями гасителя  $m_2$ ).

*Построение форм колебаний методом многих масштабов.* Для построения первой формы колебаний используются ряды по малому параметру:  $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ ,  $\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots$ , а также метод многих масштабов, в соответствии с которым решение зависит от различных временных масштабов:  $x(t, \varepsilon) = x(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon)$ ;  $\theta(t, \varepsilon) = \theta(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon)$ , где  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ ,  $T_2 = \varepsilon^2 t$ , ... [15]. Уравнения, определяющие движение системы по первой нелинейной форме колебаний, записываются таким образом

$$\begin{cases} m_1 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + kx_0 + \varepsilon \left( m_1 \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + m_2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + kx_1 \right) + \\ + \varepsilon m_2 l \left( \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) - \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 \left( \theta_0 - \frac{1}{6} \theta_0^3 \right) \right) + \dots = 0, \\ \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) + l \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + g \left( \theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6} \right) + \varepsilon l \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + \\ + \varepsilon \left( \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_0^2 \right) \left( g \theta_1 + \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \right) \right) - \theta_0 \theta_1 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} \right) + \dots = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения нулевого и первого приближений, которые здесь не приводятся, получаются путем приравнивания нулю соответствующих коэффициентов при  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ .

На рис. 2 сравниваются решения, полученные методом многих масштабов и путем численного интегрирования с использованием процедуры Рунге–Кутты. На рис. 2, *а* показано изменение во времени переменной  $x$ , а на рис. 2, *б* – переменной  $\theta$ . Расчет проводился при следующих значениях параметров системы:  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.1$ ,  $l = 1$ ,  $k = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  с начальными условиями  $x(0) = 0.1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = -1.3$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Сравнение демонстрирует хорошую точность аналитического расчета.

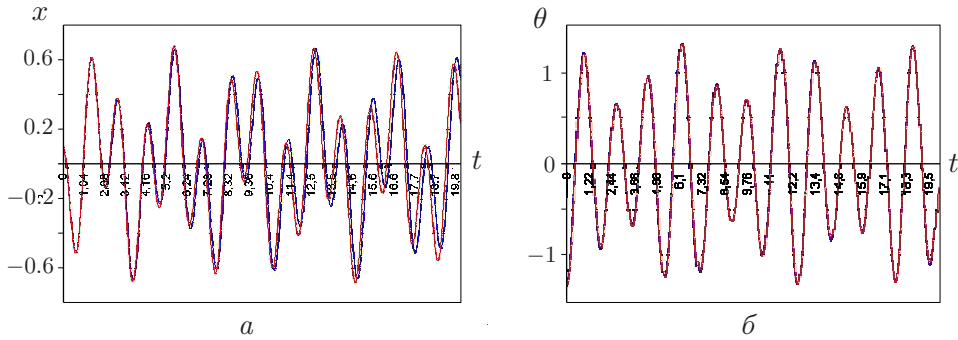


Рис. 2. Первая форма колебаний.

*Построение траектории формы связанных колебаний.* Далее используется построение форм колебаний с использованием траекторий в конфигурационном пространстве [12–14]. Этот метод позволяет получать решения без ограничений на амплитуды колебаний. Траекторию связанной формы колебаний ищем в виде однозначной функции  $\theta = \theta(x)$ . В таком случае используются соотношения  $\dot{\theta} = \theta' \dot{x}$ ,  $\ddot{\theta} = \theta'' \dot{x}^2 + \theta' \ddot{x}$ , где штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной  $x$ . Кинетическую энергию запишем в таком виде:

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \varepsilon \dot{x}^2 \left[ 1 + 2l\theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l^2 \theta'^2 \right] = \dot{x}^2 (K_0 + \varepsilon K_1) = \dot{x}^2 \tilde{K}, \quad (4)$$

где  $\tilde{K} = K_0 + \varepsilon K_1$ ,  $K_0 = \frac{1}{2} m_1$ ,  $K_1 = \frac{1}{2} m_2 \left[ 1 + 2l\theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + l^2 \theta'^2 \right]$ .

Потенциальная энергия запишется следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} \varepsilon m_2 g l \theta^2 = V_0 + \varepsilon V_1; \quad V_0 = \frac{1}{2} kx^2, \quad V_1 = \frac{1}{2} m_2 g l \theta^2. \quad (5)$$

Из интеграла энергии и уравнения (4) можно получить

$$\dot{x}^2 = \frac{K}{K_0 + \varepsilon K_1} = \frac{h - V}{\tilde{K}}. \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (2) с учетом (6) находим

$$\ddot{x} = \frac{-kx}{m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' (1 - \frac{\theta^2}{2})} + \frac{\varepsilon m_2 l (h - V) \left[ \theta'^2 (\theta - \frac{\theta^3}{6}) - \theta'' (1 - \frac{\theta^2}{2}) \right]}{\tilde{K} \left[ m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' (1 - \frac{\theta^2}{2}) \right]}. \quad (7)$$

После подстановки выражений (6) и (7) во второе уравнение системы (2) получаем уравнение для определения траектории первой нелинейной нормальной формы колебаний  $\theta = \theta(x)$  в конфигурационном пространстве:

$$\begin{aligned} & (h - V) \varepsilon m_2 l \left[ \theta'^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) - \theta'' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \left( l \theta' + 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + \\ & + (h - V) l \theta'' \left[ m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] + \\ & + \tilde{K} \left\{ -kx \left( l \theta' + 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \left[ m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет особую точку на максимальной изоэнергетической поверхности  $h - V = 0$ , где все скорости обращаются в нуль. Аналитическое продолжение траектории на эту поверхность возможно, если реализуется граничное условие [12–14]

$$\tilde{K} \left[ -kx \left( l \theta' + 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \left[ m_1 + \varepsilon m_2 + \varepsilon m_2 l \theta' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \right] = 0, \quad (9)$$

которое должно выполняться при амплитудных значениях  $x = x_0$  с  $\dot{x} = 0$ .

Решение уравнения (8), следуя [12–14], ищем в виде ряда по степеням малого параметра:  $\theta = \theta(x) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots$ , где  $\theta_0$  и  $\theta_1$  в свою очередь представляются рядами по степеням  $x$ :  $\theta_0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ ;  $\theta_1 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$ . Эта методика решения разработана в работах [12–14].

Подставляя эти ряды в уравнения (8) и (9) и выделяя вначале слагаемые порядка  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , а затем группируя слагаемые, стоящие при  $x^0$  и  $x^1$ , получаем уравнения для определения коэффициентов рядов.

В нулевом приближении по малому параметру имеем:

$$\varepsilon^0: \quad x^0: \quad 2hla_2 + \frac{1}{2} m_1 g \left( a_0 - \frac{1}{6} a_0^3 \right) = 0; \quad (10)$$

$$x: \quad 6hla_3 + \frac{1}{2} \left[ m_1 g a_1 \left( 1 - \frac{a_0^2}{2} \right) - k \left( la_1 + 1 - \frac{a_0^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

и так далее, а граничные условия имеют вид (при амплитудных значениях  $x = x_0$ ):

$$\begin{aligned} & m_1 g \left( x (a_1 + a_2 x) \left( 1 - \frac{1}{2} a_0^2 \right) - \frac{1}{6} a_0^3 + a_0 - \frac{1}{2} a_0 a_1^2 x^2 \right) + \\ & + kx \left( \frac{1}{2} a_0^2 + a_0 a_1 x - 1 - la_1 - 2xla_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Полная энергия системы также раскладывается по малому параметру:  $h = h_0 + \varepsilon h_1$ . Полная энергия решения нулевого приближения по малому параметру (при  $\varepsilon = 0$ ) имеет вид  $h_0 = V_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$ . Вычисления в равенстве (12) проводятся при амплитудных значениях  $x = x_0$ , при этом  $\dot{x} = 0$ . Задавая значения параметров системы  $m_1, l, k$  и амплитуду колебаний (или энергию системы) и разрешая систему уравнений (10)–(12), находим коэффициенты ряда

$$\theta_0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

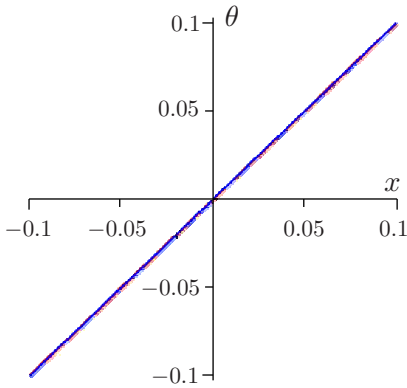


Рис. 3. Траектория первой нормальной формы колебаний.

Аналогичным образом определяем решение первого приближения  $\theta_1$  в виде ряда по степеням  $x$ , разрешая уравнения, полученные из равенств (8) и (9) группированием членов порядка  $\varepsilon$ .

Траектория в конфигурационном пространстве первой нормальной формы связанных колебаний в двух приближениях по малому параметру представлена на рис. 3. Аналитическое решение, полученное при тех же параметрах и начальных условиях, что и ранее, и проверочный числовой расчет почти полностью совпадают. Траектория этой формы колебаний близка к прямой линии, что используется далее при исследовании устойчивости.

*Траектория локализованной формы колебаний.* Траекторию второй, локализованной, формы колебаний определим в виде функции  $x = x(\theta)$ .

В этом случае будем использовать следующие соотношения:  $\dot{x} = x'\dot{\theta}$  и  $\ddot{x} = x''\dot{\theta}^2 + x'\ddot{\theta}$ , где штрихом обозначено дифференцирование по  $\theta$ . Тогда кинетическая и потенциальная энергии представимы в виде

$$K = \varepsilon(K_1 + \varepsilon K_2)\dot{\theta}^2 = \tilde{K}\dot{\theta}^2, \quad (13)$$

где  $\tilde{K} = \varepsilon(K_1 + \varepsilon K_2)$ ,  $K_1 = \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2$ ,  $K_2 = \left[ \frac{1}{2}m_1x'^2 + m_2lx' \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \dot{\theta}^2$ ;

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon(m_2gl\theta^2 + \varepsilon kx^2) = \varepsilon(V_1 + \varepsilon V_2); \quad V_1 = \frac{1}{2}m_2gl\theta^2, \quad V_2 = \frac{1}{2}kx^2. \quad (14)$$

Как и в случае первой формы колебаний, из интеграла энергии получаем выражение для  $\dot{\theta}^2$ , после чего из второго уравнения системы (2) получаем выражение для  $\ddot{\theta}$ . Теперь уравнение для определения траектории второй нелинейной нормальной формы колебаний  $x = x(\theta)$  в конфигурационном

пространстве приобретает вид

$$(h - V) \left[ (m_1 + \varepsilon m_2)(2x'\sigma + l)x'' + \varepsilon m_2 l \left( x''\sigma^2 - (x'\sigma + l) \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \right) \right] + \tilde{K} \left[ kx(x'\sigma + l) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) (x'(m_1 + \varepsilon m_2) + \varepsilon m_2 l \sigma) \right] = 0, \quad (15)$$

где  $\sigma = (1 - \theta^2/2)$ . Граничные условия, гарантирующие аналитическое продолжение траектории на максимальную изоэнергетическую поверхность, записываются так

$$\tilde{K} \left[ kx(x'\sigma + l) + g \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) (x'(m_1 + \varepsilon m_2) + \varepsilon m_2 l \sigma) \right] = 0. \quad (16)$$

Условия выполняются при амплитудных значениях  $\theta = \theta_0$ , при этом  $\dot{\theta} = 0$ .

Решение уравнения (15) ищем в виде ряда по степеням малого параметра  $x = x(\theta) = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ , где  $x_1$  и  $x_2$ , в свою очередь, раскладываются в ряды по степеням  $\theta$ :

$$x_1 = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + \dots; \quad (17)$$

$$x_2 = b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 + \dots \quad (18)$$

Аналогично методике для построения первой формы колебаний, описанной выше, определяем коэффициенты рядов (17) и (18). На рис. 4 представлена близкая к прямолинейной траектория второй, локализованной нормальной

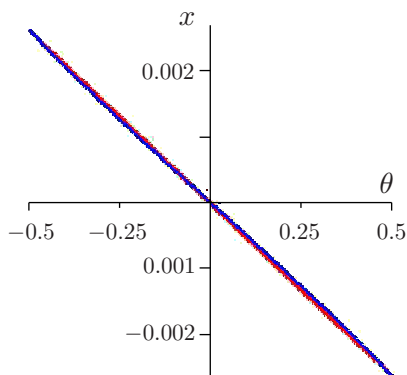


Рис. 4. Траектория второй нормальной формы колебаний.

формы колебаний в конфигурационном пространстве системы.

**2. Анализ устойчивости форм колебаний.** Устойчивость связанной формы колебаний. Анализ устойчивости форм колебаний вначале проводится в упрощенной форме, с использованием приведения уравнения в вариациях к виду уравнения Матье.

Поскольку траектория первой нормальной формы связанных колебаний близка к прямой, то, повернув систему координат, устойчивость этой формы будем определять вариациями в ортогональном к данной траектории направлении (см. на рис. 5). Используя поворот системы координат  $0x\theta$  на угол  $\alpha$ ,

получаем вместо уравнений (2) систему уравнений в новых переменных  $\tilde{x}, \tilde{\theta}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_1 + \varepsilon m_2)(\ddot{\tilde{x}} \cos \alpha - \ddot{\tilde{\theta}} \sin \alpha) + k(\tilde{x} \cos \alpha - \tilde{\theta} \sin \alpha) - \\ - \varepsilon m_2 l (\dot{\tilde{x}} \sin \alpha + \dot{\tilde{\theta}} \cos \alpha)^2 [\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha - \frac{1}{6}(\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha)^3] + \\ + \varepsilon m_2 l (\ddot{\tilde{x}} \sin \alpha + \ddot{\tilde{\theta}} \cos \alpha) [1 - \frac{1}{2}(\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha)^2] = 0, \\ (\ddot{\tilde{x}} \cos \alpha - \ddot{\tilde{\theta}} \sin \alpha) [1 - \frac{1}{2}(\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha)^2] + l(\ddot{\tilde{x}} \sin \alpha + \ddot{\tilde{\theta}} \cos \alpha) + \\ + g[\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha - \frac{1}{6}(\tilde{x} \sin \alpha + \tilde{\theta} \cos \alpha)^3] = 0. \end{array} \right. \quad (19)$$

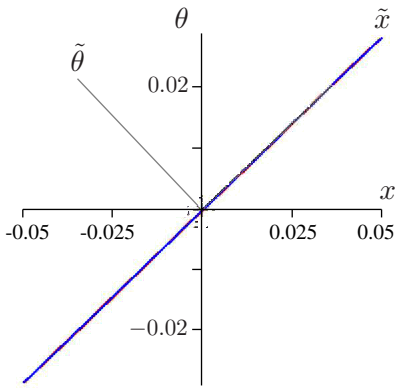


Рис. 5. Преобразование системы координат.

Линеаризованное уравнение в вариациях, определяющее устойчивость первой формы колебаний, имеет вид

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2 \sin^2 \alpha\right)(-\ddot{v} \sin \alpha + vg \cos \alpha) + \cos \alpha(\ddot{v}l - vx\ddot{x} \sin \alpha \cos \alpha) = 0, \quad (20)$$

где  $x$  и  $v$  – вариации переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{\theta}$  соответственно. С учетом равенства  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $k_1$  – угловой коэффициент прямолинейной аппроксимации формы колебаний, и гармонической аппроксимации решения вида  $x = A \cos \omega t$ , уравнение (20) после некоторых алгебраических преобразований примет вид известного уравнения Матье:

$$\ddot{v} + v(a - 2b \cos 2\omega t) = 0, \quad (21)$$

где

$$a = \frac{A^2 k_1 (\omega^2 + \frac{1}{2} k_1 g) (3A^2 k_1^3 - 8(l - k_1)(1 + k_1^2))}{16(l - k_1)^2 (1 + k_1^2)^2} + \frac{4g(1 + k_1^2) (4(l - k_1)(1 + k_1^2) - A^2 k_1^3)}{16(l - k_1)^2 (1 + k_1^2)^2},$$

$$b = \frac{4gA^2 k_1^3 (1 + k_1^2) - A^2 k_1 (\omega^2 + \frac{1}{2} k_1 g) (3A^2 k_1^3 - 4(l - k_1)(1 + k_1^2))}{16(1 + k_1^2)^2 (l - k_1)^2}.$$

Границы областей устойчивости и неустойчивости уравнения Матье хорошо известны.

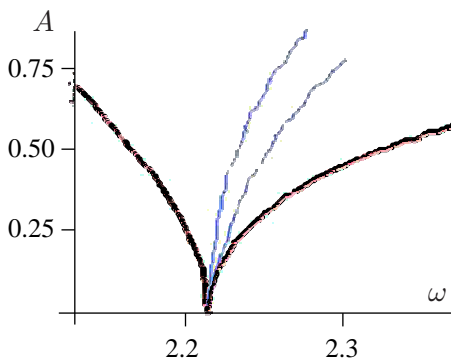


Рис. 6. Границы области устойчивости / неустойчивости.

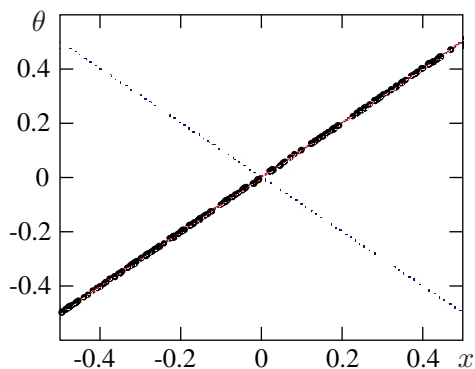


Рис. 7. Траектории отщепляющихся движений.

Другой, более точный, метод исследования устойчивости первой формы колебаний предполагает использование уравнения Хилла. Для этого запишем уравнение в вариациях таким образом:

$$\ddot{v} \left[ l - k_1 + \frac{A^2 k_1^3}{4(1 + k_1^2)} (1 + \cos 2\omega t) \right] = -v \left[ g + \frac{A^2 k_1}{2(1 + k_1^2)} (\omega^2 - \frac{1}{2} g k_1) (1 + \cos 2\omega t) \right].$$

Решения, соответствующие границам устойчивости, имеют период  $T$  и  $2T$ , где  $T$  – период коэффициентов уравнения в вариациях. Эти решения будем искать в виде

$$v = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + \dots, \quad (22)$$

$$v = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \omega t + a_3 \cos \frac{3\omega}{2} t + a_4 \cos 2\omega t + a_5 \cos \frac{5\omega}{2} t + \dots \quad (23)$$

Подставляя разложения (22) и (23) поочередно в уравнение в вариациях и группируя члены при различных гармониках, получаем системы однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений. Приравнявая определители этих систем нулю, получим уравнения для определения тех значений параметров системы, которые определяют границы областей устойчивости и неустойчивости связанной формы колебаний.

На рис. 6 представлены границы областей устойчивости и неустойчивости, полученные с использованием уравнений Матье (светлая линия) и Хилла (темная линия). Можно заметить, что уравнение в вариациях в форме уравнения Матье пригодно только для довольно малых амплитуд колебаний.

Во внутренней области наблюдаются неустойчивые движения. Потеря устойчивости первой формы влечет за собой переход к другим формам колебаний. При ветвлении появляется пара новых форм колебаний, которые также являются нелокальными. Траектории их в области неустойчивости



первой формы колебаний – траектории ответвляющихся движений – изображены на рис. 7. Расчет проводился для следующих значений параметров системы:  $l = 1$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $k = 5$ ,  $x(0) = 0.5$ .

*Устойчивость локализованной формы колебаний.* Устойчивость второй формы колебаний исследовалась с использованием уравнения Хилла. Для этого использовалось следующее уравнение в вариациях:

$$\ddot{u} \left( m_1 + \varepsilon m_2 \left( 1 - lk_1 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{1 + k_1^2} \right) \right) \right) + i\varepsilon m_2 l \theta \dot{\theta} \frac{k_1}{1 + k_1^2} \left( 2 - \frac{\theta^2}{3} \frac{1}{1 + k_1^2} \right) + u \left( k + \varepsilon m_2 l \frac{k_1}{1 + k_1^2} \left( \theta \ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{1 + k_1^2} \right) \right) \right) = 0,$$

где  $u$  и  $\theta$  – вариации переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{\theta}$  соответственно.

Решения, соответствующие границам устойчивости, будем искать в виде

$$u = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + \dots,$$

$$\theta = a_1 \cos \frac{\omega}{2} t + a_2 \cos \omega t + a_3 \cos \frac{3\omega}{2} t + a_4 \cos 2\omega t + a_5 \cos \frac{5\omega}{2} t + \dots$$

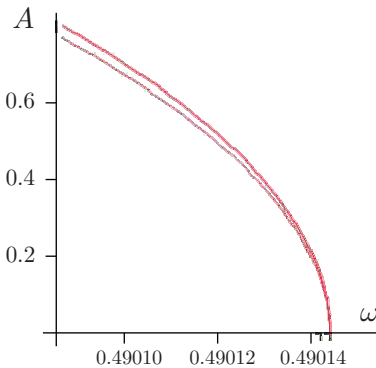


Рис. 8. Границы областей устойчивости/неустойчивости локализованной формы колебаний.

Границы областей устойчивости и неустойчивости второй формы колебаний представлены на рис. 8. Заметим, что область неустойчивости этой формы колебаний, благоприятной для виброгашения основной линейной подсистемы, чрезвычайно узкая.

**Выводы.** В работе проведено аналитическое исследование нелинейных нормальных форм колебаний системы, содержащей маятниковый виброгаситель, с использованием асимптотических методов, теории нелинейных нормальных форм колебаний и численных процедур. Построены границы областей устойчивости нормальных форм колебаний в плоскости параметров системы. Показа-

но, что локализованная форма колебаний, наиболее благоприятная для виброгашения, устойчива в широкой области параметров системы и амплитуд колебаний.

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 492 с.
2. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. – М: Мир, 1969. – 400 с.
3. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. – New York: Wiley, 1979. – 704 p.
4. Вибрации в технике /под ред. К.В.Фролова. – М.: Машиностроение, 1995. – Т. 5. – 496 с.

5. *Cuvalci O., Ertas A.* Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory. Trans. of the ASME // J. of Vibrations and Acoustics. – 1996. – **118**. – P. 558–566.
6. *Lee C.-T., Shaw S. W.* Nonlinear dynamic response of paired centrifugal pendulum vibration absorbers // J. of Sound and Vibration. – 1997. – **203**. – P. 731–743.
7. *Витт А.А., Горелик Г.С.* Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем // Журн. техн. физики. – 1933. – **3**, № 2–3. – С. 294–307.
8. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с.
9. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 255 с.
10. *Wang F., Bajaj A., Kamiya K.* Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system // Nonlinear Dynamics. – 2005. – **42** (3). – P. 233–265.
11. *Warminski J., Kecik K.* Regular and chaotic motions of an autoparametric real pendulum system with the use of a MR damper. – In: Modeling, simulation and control of nonlinear engineering dynamical systems / Ed. J. Awrejcewicz. – Springer, 2009. – P. 267
12. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. – 216 с.
13. *Mikhlin Yu.* Normal vibrations of a general class of conservative oscillators// Nonlinear Dynamics. – 1996. – **11**. – P. 1–16.
14. *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N, Zevin A.A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley Interscience, 1996. – 552 p.
15. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 456 с.

**A.A. Klimenko, Yu.V. Mikhlin**

### **Nonlinear normal vibration of a mechanical system having the pendulum vibration absorber**

The nonlinear normal vibration modes of a mechanical system having the pendulum vibration absorber, are considered. The coupled and localized vibration modes are selected. In the last case the main vibration energy is concentrated in the pendulum, so this vibration mode is the most appropriate for the vibration absorption. The modes stability is investigated.

**Keywords:** *pendulum vibration absorber, nonlinear normal vibration modes.*

**Г.О. Клименко, Ю.В. Міхлін**

### **Нелінійні форми коливань механічної системи з маятниковим гасителем коливань**

Розглянуто нелінійні нормальні форми коливань механічної системи, що містить маятниковий гаситель коливань. Виділено зв'язану та локалізовану форми коливань. В останньому випадку основна енергія коливань зосереджена в маятнику, тому ця форма коливань найбільш сприятлива для віброгасіння. Вивчено стійкість форм коливань.

**Ключові слова:** *маятниковий гаситель коливань, нелінійні нормальні форми коливань.*

Национальный техн. ун-т  
“Харьковский политехнический ин-т”  
muv@kpi.kharkov.ua

Получено 10.08.10