УДК 531.38

©2010. **А.В. Мазнев**

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Для класса прецессионных движений гиростата указана редукция шести уравнений Кирхгофа–Пуассона к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве примера исследованы условия маятниковых движений гиростата.

Ключевые слова: *гиростат, прецессия, гиростатический момент, маятниковые движения, потенциальные и гироскопические силы.*

При изучении задач динамики твердого тела большое место отводилось исследованию равномерных, маятниковых и прецессионных движений твердого тела и гиростата. Равномерные движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой изучал О. Штауде [1], маятниковые движения – Б.К. Млодзеевский [2]. Множество осей равномерных вращений тяжелого твердого тела можно описать конусом О. Штауде [1]. Свойства маятниковых вращений, которые установил Б.К. Млодзеевский [2], характеризуются условиями горизонтальности оси вращения и принадлежности центра масс главной плоскости эллипсоида инерции.

П.В. Харламов [3] рассмотрел равномерные движения гиростата относительно вертикали. Он получил уравнение, описывающее множество осей равномерных вращений гиростата, и значение угловой скорости равномерного вращения. А.М. Ковалев [4] изучил направляющую линию осей равномерных движений в данной задаче.

Обзор результатов по исследованию прецессионных движений (движений, при которых постоянен угол между осями, одна из которых фиксирована в гиростате, а другая – в неподвижном пространстве) дан в монографии [5].

Как показано в [6, 7], осуществить равномерное движение тяжелого гиростата можно с помощью маховиков, которые обеспечивают переменность гиростатического момента по величине. В [8] для случая переменного гиростатического момента сохраняется определение “гиростат”. В дальнейшем, как и в [9, 10], будем использовать этот термин.

Данная статья посвящена исследованию условий существования прецессионных движений гиростата [5] с переменным гиростатическим моментом [8] в случае, когда на гиростат действуют специальные потенциальные и гироскопические силы [11]. Указан метод исследования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом, который является обобщением метода [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему – гиростат с переменным гиростатическим моментом [8]. Уравнения движения такого гиростата в силовом поле, являющемся суперпозицией магнитного, электрического и центрального ньютоновского полей, можно записать в виде [8, 11]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (B\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}), \qquad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $\lambda(t)$ – величина гиростатического момента; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точка обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1), (2) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \qquad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Система уравнений (1), (2) не замкнута, так как не определена функция $\lambda(t)$. Воспользуемся методом решения обратных задач динамики твердого тела: задав решение $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_*(t)$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_*(t)$, найти функцию $\lambda(t)$. Функции $\boldsymbol{\omega}_*(t)$, $\boldsymbol{\nu}_*(t)$ должны удовлетворять определенным требованиям, а именно, описывать заданные режимы движения гиростата, например, [6, 7, 9, 10]. Полученные таким способом результаты можно использовать в теории управления.

В данной статье для уравнений (1), (2) рассмотрим класс прецессионных движений гиростата относительно вертикали. Пусть в процессе движения угол между единичным вектором $\boldsymbol{a}$, неизменно связанным с гиростатом, и вектором $\boldsymbol{\nu}$ постоянен и равен θ_0. Тогда имеет место инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \qquad (a_0 = \cos\theta_0). \qquad (4)$$

В [5] получены следующие равенства:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0), \quad \boldsymbol{a} = (0, 0, 1), \qquad (5)$$

где $a_0' = \sin\theta_0$, φ и ψ – новые переменные. Подстановка значений (5) в уравнение (2) дает тождество. Таким образом, необходимо рассмотреть уравнение (1) при наличии равенств (5). Внесем выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (5) в уравнение (1):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\dot{\psi}[Sp(A)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) - 2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a})] - \\ -\lambda(t)[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})] - \dot{\varphi}^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) - \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) - \\ -\dot{\varphi}(\boldsymbol{a} \times B\boldsymbol{\nu}) - \dot{\psi}(\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}) = \mathbf{0}.\end{gathered} \qquad (6)$$

Здесь $Sp(A)$ — след матрицы A.

Будем считать, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}$ составляют базис. Спроектируем уравнение (6) на оси этого базиса:

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})+\ddot{\varphi}(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+\ddot{\psi}(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})-\lambda(t)\dot{\psi}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu})]-\\-\dot{\psi}^2[\boldsymbol{a}\cdot(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu})]-\dot{\psi}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times B\boldsymbol{\nu})]-[\boldsymbol{a}\cdot(\mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu})]-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu})=0,\end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})+\ddot{\varphi}(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})+\ddot{\psi}(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})+2\dot{\varphi}\dot{\psi}[A\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]+\\+\lambda(t)\dot{\varphi}[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]-\dot{\varphi}[B\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]+\dot{\varphi}^2[A\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]=0,\end{gathered}\tag{8}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}(t)[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]+\ddot{\varphi}[A\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]+\ddot{\psi}[A\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})]+\\+\lambda(t)\{\dot{\varphi}[a_0(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})]+\dot{\psi}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a})-a_0(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu})]\}+\\+\dot{\psi}\dot{\varphi}[a_0'^2Sp(A)-2(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})+2a_0(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})]-\\-\dot{\varphi}^2[(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})-a_0(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})]-\dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})]+\\+\dot{\varphi}[(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-a_0(B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})]+\dot{\psi}[a_0(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-(B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu})]+\\+(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{s})-a_0(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu})+a_0(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})-(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a})=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений (7)–(9), в отличие от системы (1), (2), является замкнутой системой относительно функций $\varphi(t),\psi(t),\lambda(t)$. В общем случае система (1), (2) имеет сложный вид. Поэтому ее применение целесообразно для заданных классов прецессий гиростата.

2. Скалярная форма уравнений (7)–(9). Для получения скалярных уравнений, вытекающих из системы (7)–(9), ведем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\beta_0=a_0A_{33},\qquad \beta_1=a_0'A_{23},\qquad \beta_1'=a_0'A_{13},\\ \gamma_0=a_0B_{33},\qquad \gamma_1=a_0'B_{23},\qquad \gamma_1'=a_0'B_{13},\\ \varepsilon_0=a_0C_{33},\qquad \varepsilon_1=a_0'C_{23},\qquad \varepsilon_1'=a_0'C_{13},\\ \varkappa_0=a_0^2-a_0'^2,\qquad \varkappa_1=a_0's_2-a_0\varepsilon_1,\qquad \varkappa_1'=a_0's_1-a_0\varepsilon_1',\\ \delta_1=(2a_0^2-1)\varepsilon_1-a_0a_0's_2,\qquad \delta_1'=(2a_0^2-1)\varepsilon_1'-a_0a_0's_1,\\ A_2=\frac{a_0'^2}{2}(A_{22}-A_{11}),\quad A_2'=a_0'^2A_{12},\quad A_0=\frac{1}{2}[a_0'^2(A_{11}+A_{22})+2a_0^2A_{33}],\\ B_2=\frac{a_0'^2}{2}(B_{22}-B_{11}),\quad B_2'=a_0'^2B_{12},\quad B_0=\frac{1}{2}[a_0'^2(B_{11}+B_{22})+2a_0^2B_{33}],\\ C_2=\frac{a_0'^2}{2}(C_{22}-C_{11}),\quad C_2'=a_0'^2C_{12},\quad C_0=\frac{1}{2}[a_0'^2(C_{11}+C_{22})+2a_0^2C_{33}],\\ D_0=\frac{a_0'^2}{2}(A_{11}+A_{22}-2A_{33}),\qquad E_0=\frac{a_0'^2}{2}(B_{11}+B_{22}-2B_{33}),\\ F_0=\frac{a_0'^2}{2}(C_{11}+C_{22}-2C_{33}),\quad G_0=\frac{a_0'^2}{2}[2s_3+a_0(C_{11}+C_{22}-2C_{33})],\\ A_0^*=-\frac{1}{2}a_0'^2(A_{11}+A_{22}),\quad B_0^*=-\frac{1}{2}a_0'^2(B_{11}+B_{22}),\quad C_0^*=-\frac{1}{2}a_0'^2(C_{11}+C_{22})\end{gathered}\tag{10}$$

и воспользуемся последними двумя векторными равенствами из (5). Тогда с учетом (5), (10) из уравнений (7)–(9) получаем

$$\begin{aligned}\alpha_3\dot{\lambda}(t) - a_0'(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\dot{\psi}\lambda(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\ddot{\psi}+\\ + (A_2\sin 2\varphi - A_2'\cos 2\varphi + a_0\beta_1\sin\varphi - a_0\beta_1'\cos\varphi)\dot{\psi}^2+\\ + (B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0\gamma_1'\cos\varphi - a_0\gamma_1\sin\varphi)\dot{\psi}+\\ + (C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi - \varkappa_1'\cos\varphi + \varkappa_1\sin\varphi) = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_1 a_0'\sin\varphi + \alpha_2 a_0'\cos\varphi + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t) + a_0'(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\lambda(t)\dot{\varphi}+\\ + (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\ddot{\varphi} + (\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi)\dot{\varphi}^2+\\ + (A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + 2a_0\beta_1\cos\varphi + 2a_0\beta_1'\sin\varphi + A_0)\ddot{\psi}+\\ + 2(A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + a_0\beta_1'\cos\varphi - a_0\beta_1\sin\varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi}-\\ - (B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0\gamma_1'\cos\varphi - a_0\gamma_1\sin\varphi)\dot{\varphi} = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}a_0'(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\dot{\lambda}(t) + a_0'[(\alpha_3 a_0' - \alpha_1 a_0\sin\varphi - \alpha_2 a_0\cos\varphi)\dot{\psi}-\\ - (\alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi)\dot{\varphi}]\lambda(t) + (\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi)\ddot{\varphi}+\\ + (A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + a_0\beta_1'\cos\varphi - a_0\beta_1\sin\varphi)\ddot{\psi}-\\ - (2A_2\cos 2\varphi + 2A_2'\sin 2\varphi + 2a_0\beta_1\cos\varphi + 2a_0\beta_1'\sin\varphi - a_0'^2 A_{33})\dot{\psi}\dot{\varphi}-\\ - (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 - (a_0 A_2\cos 2\varphi + a_0 A_2'\sin 2\varphi + \varkappa_0\beta_1\cos\varphi+\\ + \varkappa_0\beta_1'\sin\varphi + a_0 D_0)\dot{\psi}^2 + (B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi+\\ + a_0\gamma_1'\sin\varphi - B_0^*)\dot{\varphi} + (a_0 B_2\cos 2\varphi + a_0 B_2'\sin 2\varphi + \varkappa_0\gamma_1\cos\varphi + \varkappa_0\gamma_1'\sin\varphi+\\ + a_0 E_0)\dot{\psi} + (a_0 C_2\cos 2\varphi + a_0 C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + G_0) = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (11)–(13) допускают интеграл

$$\begin{aligned}\lambda(t)(\alpha_1 a_0'\sin\varphi + \alpha_2 a_0'\cos\varphi + \alpha_3 a_0) + (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\dot{\varphi}+\\ +(A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + 2a_0\beta_1\cos\varphi + 2a_0\beta_1'\sin\varphi + A_0)\dot{\psi}-\\ -\frac{1}{2}(B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + 2a_0\gamma_1\cos\varphi + 2a_0\gamma_1'\sin\varphi + B_0) = k,\end{aligned} \tag{14}$$

который является следствием второго интеграла из (3) на инвариантных соотношениях (5).

Метод исследования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом состоит в том, что с помощью равенства (14) в общем случае можно определить $\lambda(t)$ и, подставив полученное значение в уравнения (11), (13), получить два дифференциальных уравнения, содержащих величины $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$. Это позволяет найти только одно уравнение на функцию $\varphi(t)$. Оно очевидно будет иметь нелинейный характер и содержать $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$. Условия существования решения $\varphi(t)$ данного уравнения и будут служить условиями существования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом. Особый случай выражается условиями $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Он требует применения другого метода.

3. Маятниковые движения гиростата. Пусть вектор угловой скорости гиростата (см. (5)) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a}. \tag{15}$$

Поскольку $\dot{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$ и вектор $\boldsymbol{a}$ сонаправлен с угловой скоростью, то $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \mathbf{0}$, т.е. вектор $\boldsymbol{a}$ неподвижен в пространстве. Движение гиростата с угловой скоростью (15) при $\dot{\varphi} \neq \mathrm{const}$ называется маятниковым движением [2, 5, 10]. Положим $\dot{\psi} = 0$ в уравнениях (11)–(14). Тогда, выбирая подвижную систему координат так, чтобы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$, получим из (11)–(14):

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} = C_2\sin 2\varphi - C_2'\cos 2\varphi + \varkappa_1'\cos\varphi - \varkappa_1\sin\varphi, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}(\alpha_1 a_0'\sin\varphi + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t) + a_0'\alpha_1\cos\varphi\dot{\varphi}\lambda(t) +\\ +(\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\ddot{\varphi} + (\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 +\\ +(B_2\sin 2\varphi - B_2'\cos 2\varphi - a_0\gamma_1'\cos\varphi + a_0\gamma_1\sin\varphi)\dot{\varphi} = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}a_0'\alpha_1\cos\varphi\dot{\lambda}(t) - a_0'\alpha_1\sin\varphi\,\dot{\varphi}\lambda(t) +\\ +(\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi)\ddot{\varphi} - (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 +\\ +(B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi - B_0^*)\dot{\varphi} +\\ +(a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + G_0) = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_1 a_0'\sin\varphi + \alpha_3 a_0}\Big[\frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi +\\ +a_0\gamma_1'\sin\varphi + \Big(k + \frac{1}{2}B_0\Big) - (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\dot{\varphi}\Big].\end{gathered} \tag{19}$$

В формуле (19) предполагаем $(\alpha_1 a_0')^2 + (\alpha_3 a_0)^2 \neq 0$.

Рассмотрим случай $\alpha_3 = 0$. Тогда $\alpha_1 = 1$ и из уравнения (16) следует

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{A_{33}}(-C_2\cos 2\varphi - C_2'\sin 2\varphi + 2\varkappa_1'\sin\varphi + 2\varkappa_1\cos\varphi + c_*), \tag{20}$$

где c_* — произвольная постоянная.

Поскольку уравнение (19) является следствием уравнения (17), то подставим $\lambda(t)$ из (19) в уравнение (18)

$$\begin{gathered}(\beta_0\cos\varphi + \beta_1)\sin\varphi\ddot{\varphi} - (\beta_1\cos\varphi + \beta_0)\dot{\varphi}^2 -\\ -\Big[\frac{1}{2}B_0^*\cos 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi - \frac{1}{2}(2k + B_2 + B_0 + B_0^*)\Big]\dot{\varphi} -\\ -(a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + G_0)\sin^2\varphi = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Уравнение (21) с учетом (20), (10) запишется так:

$$p_3\cos 3\varphi + p_3'\sin 3\varphi + p_2\cos 2\varphi + p_2'\sin 2\varphi + p_1\cos\varphi + p_1'\sin\varphi + \\ + p_0 = A_{33}\Big[\frac{1}{2}B_0^*\cos 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi - \frac{1}{2}(2k + B_2 + B_0 + B_0^*)\Big]\dot{\varphi}. \tag{22}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{a_0'^3 A_{33}C_{23}}{4}, \quad p_3' = \frac{a_0'^3 A_{33}C_{13}}{4}, \\ p_2 &= \frac{a_0'^2}{2}[A_{23}(s_2 - a_0C_{23}) - a_0A_{33}(C_{22} - C_{33}) - s_3A_{33}], \\ p_2' &= \frac{a_0'^2}{2}[A_{23}(s_1 - a_0C_{13}) - a_0A_{33}C_{12}], \\ p_1 &= \frac{a_0'}{4}\Big\{8a_0s_2A_{33} - (1 + 7a_0^2)A_{33}C_{23} + 4A_{23}\Big[c_* - \frac{1}{2}a_0'^2(C_{22} - C_{11})\Big]\Big\}, \\ p_1' &= \frac{a_0'}{4}[4a_0s_1A_{33} - (a_0^2 + 3)A_{33}C_{13} - 4a_0'^2A_{23}C_{12}], \\ p_0 &= \frac{1}{2}[3a_0'^2A_{23}(s_2 - a_0C_{23}) + a_0a_0'^2A_{33}(C_{11} - C_{33}) + a_0'^2s_3A_{33} + 2a_0A_{33}c_*]. \end{aligned} \tag{23}$$

Потребуем, чтобы правая часть уравнения (22) обращалась в нуль для любых значений $\dot{\varphi}$. Тогда в силу (22), (23) должны выполняться условия

$$\begin{gathered} B_{22} = -B_{11}, \quad a_0B_{23} = 0, \quad k = \frac{1}{2}(a_0'^2B_{11} - a_0^2B_{33}), \\ C_{23} = C_{13} = 0, \quad s_1A_{23} - a_0A_{33}C_{12} = 0, \\ s_2A_{23} - s_3A_{33} - a_0A_{33}(C_{22} - C_{33}) = 0, \quad a_0s_1A_{33} - a_0'^2A_{23}C_{12} = 0, \\ 3s_2a_0'^2A_{23} + a_0a_0'^2A_{33}(C_{11} - C_{33}) + a_0'^2s_3A_{33} + 2a_0A_{33}c_* = 0, \\ 2a_0s_2A_{33} + c_*A_{23} - \frac{1}{2}a_0'^2A_{23}(C_{22} - C_{11}) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Запишем условия (24) для *классического случая*: $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$. Общий вариант маятниковых движений рассмотрен в [10].

Если $A_{23} \neq 0$, то имеем

$$k = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2A_{23} - s_3A_{33} = 0, \quad \operatorname{ctg}^2\theta_0 = \frac{A_{23}^2}{A_{33}^2}. \tag{25}$$

Из формул (19), (20) получим зависимости $\lambda(t), \dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2s_2}{A_{23}A_{33}}(A_{23}a_0'\cos\varphi - a_0A_{33}), \tag{26}$$

$$\lambda(t) = -\frac{(A_{23}a_0' \cos\varphi + A_{13}a_0' \sin\varphi + A_{33}a_0)\dot{\varphi}}{a_0' \sin\varphi}. \tag{27}$$

Когда $a_0 = 0$, т. е. $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $A_{23} = 0$, $s_3 = 0$. Это означает, что выполняется условие $\mathbf{s} \perp \boldsymbol{a}$. Кроме этого $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{a}$. Из системы (24) следует, что c_* — произвольная постоянная. Из формулы (20) находим

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{A_{33}}(2s_1 \sin\varphi + 2s_2 \cos\varphi + c_*), \tag{28}$$

а из (27) –

$$\lambda(t) = -A_{13}\dot{\varphi}.$$

Решение системы (24) разобьем на три случая. В первом случае

$$a_0 = 0, \quad A_{23} = 0, \quad B_{22} = -B_{11}, \quad k = \frac{1}{2}B_{11}, \quad C_{13} = C_{23} = 0, \quad s_3 = 0 \ \text{ и}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{A_{33}}\Big(-\frac{1}{2}(C_{22} - C_{11})\cos 2\varphi - C_{12}\sin 2\varphi + 2s_1 \sin\varphi + 2s_2\cos\varphi\Big), \\
\lambda(t) = \frac{1}{\sin\varphi}\Big(\frac{1}{2}B_{12}\sin 2\varphi - B_{11}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_{11} - \dot{\varphi}A_{13}\sin\varphi\Big).
\end{gathered} \tag{29}$$

Во втором случае –

$$\begin{gathered}
a_0 = 0, \quad A_{23} \neq 0, \quad s_3 = s_2 = s_1 = 0, \quad C_{ij} = 0 \ (i \neq j), \\
B_{22} = -B_{11}, \quad k = \frac{1}{2}B_{11}
\end{gathered} \tag{30}$$

и из (19), (20) находим

$$\begin{gathered}
\lambda(t) = \frac{1}{\sin\varphi}\Big[-B_{11}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_{12}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}B_{11} - (A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\dot{\varphi}\Big], \\
\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{C_{22} - C_{11}}{A_{33}}}\sin\varphi.
\end{gathered} \tag{31}$$

Для третьего случая условия (24) перепишем в виде

$$\begin{gathered}
B_{22} = -B_{11}, \quad B_{23} = 0, \quad k = \frac{1}{2}(a_0'^2 B_{11} - a_0^2 B_{33}), \\
C_{23} = C_{13} = 0, \quad C_{12} = \frac{s_1 A_{23}}{a_0 A_{33}}, \\
s_1(a_0^2 A_{33}^2 - a_0'^2 A_{23}^2) = 0, \quad s_2 A_{23} - s_3 A_{33} - a_0 A_{33}(C_{22} - C_{33}) = 0, \\
c_* = \frac{1}{A_{23}}\Big[\frac{1}{2}a_0'^2 A_{23}(C_{22} - C_{11}) - 2a_0 s_2 A_{33}\Big], \\
2s_2(a_0'^2 A_{23}^2 - a_0^2 A_{33}^2) + a_0 a_0'^2 A_{33}(C_{22} - C_{33}) = 0.
\end{gathered} \tag{32}$$

При выполнении равенства $\mathrm{ctg}^2\,\theta_0 = \dfrac{A_{23}^2}{A_{33}^2}$ можно считать $s_1 \neq 0$, тогда часть условий из (32) упрощается; запишем их отдельно от системы (31):

$$s_2 A_{23} - s_3 A_{33} = 0, \qquad C_{22} = C_{33}.$$

Если же $\mathrm{ctg}^2\,\theta_0 \neq \dfrac{A_{23}^2}{A_{33}^2}$, то необходимо полагать $s_1 = 0$. В обоих случаях можно пользоваться формулами (19), (20), с учетом полученных условий. Основное свойство зависимости $\varphi(t)$ вытекает из дифференциального уравнения (20). Очевидно $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени. В случае (26) эта функция также является эллиптической функцией времени.

Таким образом, в случае $\alpha_3 = 0$, т. е. при выполнении условия $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = 0$, возможны три класса движений, которые включают варианты: $a_0 = 0$ (ось маятникового движения горизонтальна); $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ (центр масс неподвижен); вариант (32), для которого в общем случае $\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{a} \neq 0$, $a_0 \neq 0$. Последний вариант интересен тем, что при $s_1 \neq 0$ маятниковое движение происходит относительно оси, которая составляет с вектором вертикали угол θ_0: $\mathrm{ctg}^2\,\theta_0 = \dfrac{A_{23}^2}{A_{33}^2}$, зависящий от компонент тензора инерции.

При рассмотрении случая $\alpha_3 = 0$ возможен и вариант, когда правая часть (22) не обращается в нуль для всех значений $\dot{\varphi}$. Для его исследования подставим в уравнение (22) выражение (20):

$$\begin{gathered} A_{33}(p_3\cos 3\varphi + p_3'\sin 3\varphi + p_2\cos 2\varphi + p_2'\sin 2\varphi + p_1\cos\varphi + \\ + p_1'\sin\varphi + p_0)^2 - (C_2\cos 2\varphi + C_2'\sin 2\varphi - 2\varkappa_1'\sin\varphi - \\ -2\varkappa_1\cos\varphi - c_*)\Big[\frac{1}{2}B_0^*\cos 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + \Big(k + \frac{1}{2}B_0\Big)\Big]^2 = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Требование того, чтобы уравнение (33) было тождеством по φ, приводит к условиям существования маятниковых движений гиростата. Здесь эти условия выписывать не будем в силу их громоздкости.

Случай $\alpha_3 \neq 0$. Поскольку выражение (19) получено из первого интеграла моментов (3), то, предполагая $\alpha_1 \neq 0$ из уравнений (16)–(19), рассмотрим уравнение, полученное подстановкой (19) в (16), и комбинацию уравнений (17) и (18):

$$\begin{gathered} a_0'(A_{13}\alpha_3 - A_{33}\alpha_1)\ddot{\varphi} - a_0'\alpha_3 A_{23}\dot{\varphi}^2 + \\ + \alpha_3(B_2'\sin\varphi + a_0'^2 B_{22}\cos\varphi + a_0 a_0' B_{23})\dot{\varphi} - \\ - a_0'\Big(\alpha_1 C_2' + \frac{1}{2}a_0'\alpha_3\varepsilon_1\Big)\cos 2\varphi + a_0'\Big(\alpha_1 C_2 - \frac{1}{2}a_0'\alpha_3\varepsilon_1'\Big)\sin 2\varphi + \\ + [a_0'\alpha_1\varkappa_1' + \alpha_3(a_0 C_2 + G_0)]\cos\varphi - (a_0'\alpha_1\varkappa_1 - \alpha_3 a_0 C_2')\sin\varphi + \\ + \frac{\alpha_3}{2}[(3a_0^2 - 1)\varepsilon_1 - 2a_0 a_0' s_2] = 0, \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}
a_0'(\alpha_1 a_0' \sin\varphi + \alpha_3 a_0)[(\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13})\sin\varphi - \alpha_3 A_{23}\cos\varphi]\ddot{\varphi} + \\
+ a_0'\alpha_3[(\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13})\cos\varphi + a_0\alpha_3 A_{23}\sin\varphi + a_0'\alpha_1 A_{23}]\dot{\varphi}^2 + \\
+ \alpha_3\Big[\frac{1}{4}a_0'\alpha_1 B_2\cos 3\varphi + \frac{1}{4}a_0'\alpha_1 B_2'\sin 3\varphi - a_0\alpha_3 B_2'\cos 2\varphi - \\
- a_0\alpha_3 B_2\sin 2\varphi + \Big(a_0^2\alpha_3\gamma_1' - a_0'\alpha_1\Big(k + \frac{3}{4}B_2 + \frac{1}{2}B_0\Big)\Big)\cos\varphi - \\
- (a_0^2\alpha_3\gamma_1 + \frac{3}{4}a_0'\alpha_1 B_2')\sin\varphi - a_0 a_0'\alpha_1\gamma_1\Big]\dot{\varphi} - (\alpha_1 a_0'\sin\varphi + \alpha_3 a_0)^2 \times \\
\times (C_2\sin 2\varphi + C_2'\cos 2\varphi + \varkappa_1'\cos\varphi - \varkappa_1\sin\varphi) = 0.
\end{gathered} \tag{35}$$

Условия существования решений системы дифференциальных уравнений (34), (35) в общем случае можно найти следующим образом. Необходимо из уравнений (34), (35), исключив $\ddot{\varphi}$, определить функцию $\dot{\varphi} = \Phi(\varphi)$. Подстановка этой функции в одно из уравнений (34), (35) и требование того, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ, приводит к условиям существования решения системы (34), (35). В данной статье рассмотрим два особых случая.

Потребуем, чтобы уравнение (34) было тождеством. Тогда получим следующие условия:

$$\begin{gathered}
A_{23} = 0, \quad A_{13}\alpha_3 - A_{33}\alpha_1 = 0, \quad B_{22} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{23}a_0 = 0, \\
2\alpha_1 C_{12} + \alpha_3 C_{23} = 0, \quad \alpha_1(C_{22} - C_{11}) - \alpha_3 C_{13} = 0, \\
\alpha_3(\alpha_1 s_1 + \alpha_3 s_3) + a_0[\alpha_1^2 C_{11} + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)C_{22} - \alpha_3^2 C_{33}] = 0, \\
2\alpha_1^2 s_2 + a_0 C_{23}(\alpha_3^2 - 2\alpha_1^2) = 0, \quad (3a_0^2 - 1)C_{23} - 2a_0 s_2 = 0.
\end{gathered} \tag{36}$$

Пусть в системе (36) $a_0 = 0$, т.е. $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда из (36) имеем

$$\begin{gathered}
A_{23} = 0, \quad A_{13}\alpha_3 - A_{33}\alpha_1 = 0, \quad B_{22} = B_{12} = 0, \quad C_{12} = C_{23} = 0, \\
\alpha_1(C_{22} - C_{11}) - \alpha_3 C_{13} = 0, \quad \alpha_1 s_1 + \alpha_3 s_3 = 0, \quad s_2 = 0.
\end{gathered} \tag{37}$$

При выполнении условий (37) из (19) и (35) находим

$$\begin{gathered}
\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_1\sin\varphi}\Big[-\frac{1}{4}B_{11}\cos 2\varphi + \Big(k + \frac{1}{4}B_{11}\Big) - A_{13}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\Big], \\
\alpha_3\Big[\Big(k - \frac{B_{11}}{8}\Big)\cos\varphi + \frac{1}{8}B_{11}\cos 3\varphi\Big]\dot{\varphi} = \\
= \alpha_1\sin^2\varphi\Big[\frac{1}{2}(C_{11} - C_{22})\sin 2\varphi - s_1\cos\varphi\Big].
\end{gathered} \tag{38}$$

Случай (37), (38) распространяется и на *классический вариант*: $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$. Тогда выполняются равенства

$$A_{23} = 0, \qquad A_{13}\alpha_3 - A_{33}\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_1 s_1 + \alpha_3 s_3 = 0, \qquad s_2 = 0. \tag{39}$$

Из последних двух условий (39) следует $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}=0$. Выражения для $\lambda(t)$ и $\dot\varphi$ из (38) упрощаются:

$$\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1\sin\varphi}(k-A_{13}\dot\varphi\sin\varphi),\qquad \dot\varphi^2=-\frac{\alpha_1 s_1\sin^2\varphi}{\alpha_3 k}. \tag{40}$$

Второе уравнение позволяет установить, что $\varphi(t)$ — элементарная функция времени.

Если в (36) положить $C_{23}=0$, $a_0\neq 0$, то $s_2=0$, $B_{23}=0$. Остальные условия (36) остаются без изменений.

В случае $C_{23}\neq 0$ из последних двух равенств системы (36) вытекает

$$\alpha_1=\cos\theta_0,\qquad \alpha_3=\sin\theta_0. \tag{41}$$

Из (41) заключаем, что в рассматриваемом случае углы между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ совпадают, а из (19) и (35) находим

$$\begin{gathered}\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1 a_0'\sin\varphi+\alpha_3 a_0}\Big[-\frac{1}{4}a_0'^2B_{11}\cos 2\varphi+a_0a_0'B_{13}\sin\varphi+\\ +\Big(k+\frac{1}{4}a_0'^2B_{11}+a_0^2B_{33}\Big)-(a_0'A_{13}\sin\varphi+a_0A_{33})\dot\varphi\Big],\end{gathered} \tag{42}$$

$$\begin{gathered}\alpha_3\dot\varphi\Big[-\frac{1}{8}a_0'^2\alpha_1B_{11}\cos 3\varphi+\frac{1}{2}a_0a_0'B_{11}\sin 2\varphi+\\ +\Big(a_0^2\alpha_3B_{13}-\alpha_1\Big(k-\frac{1}{8}B_{11}+a_0^2B_{33}\Big)\Big)\cos\varphi\Big]=\\ =(\alpha_1a_0'\sin\varphi+\alpha_3a_0)^2\Big[\frac{1}{2}a_0'(C_{22}-C_{11})\sin 2\varphi+a_0'C_{12}\cos 2\varphi+\\ +(s_1-a_0C_{13})\cos\varphi-(s_2-a_0C_{23})\sin\varphi\Big].\end{gathered} \tag{43}$$

Функция $\varphi(t)$ в данном случае – элементарная функция времени.

Отметим, что в *классическом варианте* при $a_0\neq 0$ из (36) следуют условия (39). Формулы (42), (43) принимают вид

$$\begin{gathered}\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1a_0'\sin\varphi+\alpha_3a_0}[k-(a_0'A_{13}\sin\varphi+a_0A_{33})\dot\varphi],\\ \dot\varphi=-\frac{s_1}{\alpha_1\alpha_3k}(\alpha_1a_0'\sin\varphi+\alpha_3a_0)^2.\end{gathered} \tag{44}$$

В случае (44) так же, как и в случае (39), $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{s}=0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}\neq 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (35) становится тождеством. Тогда

$$\begin{gathered}A_{13}\alpha_3-A_{33}\alpha_1=0,\quad A_{23}=0,\quad B_{11}=B_{22},\quad B_{12}=0,\quad B_{23}=0,\\ C_{11}=C_{22},\quad C_{12}=0,\quad s_1=a_0C_{13},\quad s_2=a_0C_{23},\\ k=\frac{1}{\alpha_1}\Big[a_0^2\alpha_3B_{13}-\frac{1}{2}\alpha_1(a_0'^2B_{11}+a_0^2B_{33})\Big].\end{gathered} \tag{45}$$

При наличии ограничений (45) уравнение (34) приводится к виду

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{B_{22}}[a_0' C_{23}\cos\varphi + a_0' C_{13}\sin\varphi - (s_3 + a_0(C_{11} - C_{33}))], \tag{46}$$

а из уравнения (19) имеем

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_1}(a_0 B_{13} - A_{13}\dot{\varphi}). \tag{47}$$

Интерес формулы (47) заключается в ее линейной относительно $\dot{\varphi}$ зависимости.

Классический вариант в силу (46), (47) приводится к случаю $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. В этом случае $\varphi(t)$ — произвольная функция времени, а $\lambda(t) = -\dfrac{A_{13}}{\alpha_1}\dot{\varphi}$. Угол θ_0 является произвольным. Следовательно, когда гиростат имеет неподвижный центр масс, маятниковое движение может происходить с произвольной угловой скоростью и при произвольном значении угла между осью вращения (вектором $\boldsymbol{a}$) и вектором $\boldsymbol{\nu}$, если вектор $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ специальным образом выбран в гиростате $\left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} = \dfrac{A_{33}}{A_{13}}\right)$.

Итак, в данной статье предложен метод исследования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом; получены три уравнения на неизвестные функции $\lambda(t), \varphi(t), \psi(t)$; приведены примеры маятниковых движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые описываются уравнениями Кирхгофа–Пуассона.

1. *Staude O.* Über permanente Ratetionsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. reina und angew. Math. – 1894. — **113**, №4. – P. 318–334.
2. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук. о-ва любителей естествознания. — 1894. — **7**, вып. 1. – С. 46–48.
3. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. — 1965. — **29**, вып. 2. – С. 373–375.
4. *Ковалев А.М.* О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. — 1968. — Вып. 5. – С. 87–102.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. — Донецк: ДонНУ, 2009. — 222 с.
6. *Дружинин Э.К.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. — 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
7. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
8. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Там же. — 1972. — Вып. 4. – С. 52–73.
9. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Там же. — 2008. — Вып. 38. — С. 80–86.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Там же. — 2009. — Вып. 39. – С. 42–49.

11. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan Theor. Appl. — 1986. — **5**, N 5. — P. 747–754.

O.V. Maznyev

Precessional motions of a gyrostat with variable gyrostatic momentum under the potential and gyroscopic forces

The problem of gyrostat motion under the potential and gyroscopic forces is considered for the case of variable gyrostatic momentum. For the class of precessional motions, a reduction of the six Kirchhoff–Poisson equations to the system of three ordinary differential equations is presented. The pendulum motions are investigated as an example.

Keywords: *gyrostat, precession, gyrostatic momentum, pendulum motions, potential and gyroscopic forces.*

O.V. Мазнєв

Прецесійні рухи гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил

Розглянуто задачу про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. Для класу прецесійних рухів гіростата указано редукцію шести рівнянь Кірхгофа–Пуассона до трьох звичайних диференціальних рівнянь. Як приклад досліджено маятникові рухи гіростата.

Ключові слова: *гіростат, прецесія, гіростатичний момент, маятникові рухи, потенціальні і гіроскопічні сили.*

Национальный ун-т, Донецк Получено 07.12.10

maznev_av@rambler.ru