

УДК 531.3, 517.9, 62-50

©2009. В.Н. Неспирный, В.А. Королев

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОГО РАВНОВЕСИЯ

Для задачи о стабилизации математического маятника с вибрирующей точкой подвеса в наклонном положении получены условия существования равновесия. Показано, что при любом ограниченном движении подвеса точными равновесными состояниями маятника могут быть лишь вертикальные (верхнее и нижнее) положения. Этот результат обобщен на случай законов движения подвеса, имеющих разрывы по скорости, что механически означает импульсные воздействия в соответствующие моменты времени. Для наклонных положений построены управляющие воздействия, обеспечивающие периодическую во времени вибрацию точки подвеса и гармонические колебания маятника относительно фиксированного наклонного положения.

Введение. Задачу о перевернутом маятнике с вибрирующей точкой подвеса принято называть задачей Капицы. В его работах [1, 2] на основе приближенного решения теоретически обосновано, что, начиная с некоторой определенной частоты вертикальных колебаний точки подвеса, маятник становится устойчивым в своем верхнем положении. Более того, П.Л. Капица предложил механическую конструкцию для демонстрации описанного эффекта, получив тем самым экспериментальное подтверждение своего результата. Однако, еще задолго до Капицы в 1908 году английский математик А. Stephenson также рассматривал такую задачу [3, 4]. Им было показано, что достаточно просто удерживать шест в вертикальном положении, вибрируя точку опоры по вертикали, а не перемещая ее из стороны в сторону, как это обычно делают, в горизонтальной плоскости. Следует отметить также еще более ранний результат, представленный в книге лорда Рэля [5], о потере устойчивости нижнего положения равновесия при горизонтальных колебаниях подвеса с определенной частотой. В 1950 году, за год до выхода статей [1, 2], Н.Н. Боголюбов в своей работе [6] излагает теорию метода усреднения, следуя монографиям [7, 8], максимально приспособивая его для практических применений. Здесь также встречается пример маятника с вибрирующей точкой подвеса и для него получена оценка частоты, гарантирующей устойчивость верхнего положения маятника, совпадающая с результатом П.Л. Капицы. Однако оба ученых пришли к этому результату независимо и разными методами. Несомненная заслуга П.Л. Капицы состоит в том, что он экспериментально продемонстрировал эффект вибрационной стабилизации, что породило повышенный интерес к данной задаче, и количество работ, посвященных этой тематике, возросло многократно.

До 1950 г. можно отметить работы немецких ученых, исследовавших движение математического маятника при быстрых вибрациях точки подвеса с

малой амплитудой по вертикали [9], по горизонтали [10], а также в произвольном направлении [11]. Анализ устойчивости верхнего положения маятника при колебаниях точки подвеса вдоль произвольно выбранной оси был выполнен И.Г. Малкиным [12]. Более сложные траектории движения подвеса были предложены в монографиях [13, 14], где рассматривались перемещения не только по вертикали или вдоль наклонной прямой, но также и эллиптические траектории. При этом в работе [13] был разработан аппарат вибрационной механики на основе методов усреднения и введено понятие квазиравновесия колебательных систем, обозначающее стационарность медленной составляющей решения таких систем. Строгий анализ устойчивости относительных положений равновесия маятника на вертикали в нелинейной постановке при гармонических вертикальных вибрациях точки подвеса произвольной частоты и амплитуды был выполнен в работе [15]. В монографии [16] были предложены алгоритмы низкочастотной линейной стабилизации, которые позволили обнаружить эффект низкочастотной стабилизации системы линейного приближения маятника в верхнем положении. В работе [17] исследовано влияние вязкого трения на величину критической частоты стабилизации верхнего положения равновесия.

Следует отметить также ряд обобщений задачи Капицы на двойной [18–20], N -звенный [21, 22], а также на сферический маятники [23–25].

В настоящей работе исследуется возможность с помощью управления движением точки подвеса обеспечить равновесие математического маятника в произвольном наперед заданном наклонном положении либо колебание со сколь угодно малой амплитудой относительно выбранного положения маятника.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассмотрим плоское движение математического маятника, состоящего из материальной точки массы m и невесомого нерастяжимого стержня длины l , на котором подвешена эта точка, в поле силы тяжести. При этом точка подвеса стержня не закреплена, а может двигаться по некоторой (заданной или выбираемой) траектории. Предполагается отсутствие каких-либо сил трения и сопротивления. Положение маятника будем определять углом φ между стержнем и осью, сонаправленной с вектором силы тяжести. Пусть задано некоторое положение маятника $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$, в котором он находится в начальный момент с нулевой угловой скоростью. Задача состоит в нахождении закона движения точки подвеса $(x(t), y(t))$, не позволяющего маятнику изменять положение с течением времени, т.е. обеспечить существование решения $\varphi(t) = \varphi_0$.

Уравнение движения рассматриваемого математического маятника (см. рис. 1) при перемещении точки подвеса по закону $(x(t), y(t))$ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{\ddot{x}(t) \cos \varphi + \ddot{y}(t) \sin \varphi}{l} = 0. \quad (1)$$

Важный частный случай возникает, когда точка подвеса колеблется вдоль некоторой оси, образующей угол α с направлением силы тяжести. Обозначив

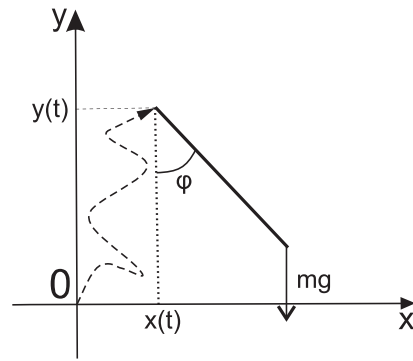


Рис. 1. Математический маятник с подвижной точкой подвеса.

смещение точки подвеса вдоль этой оси $s(t)$, имеем

$$x(t) = s(t) \sin \alpha, \quad y(t) = -s(t) \cos \alpha, \quad (2)$$

и уравнение колебаний маятника (1) преобразуется к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\ddot{s}(t)}{l} \sin(\varphi - \alpha) = 0. \quad (3)$$

Поскольку верхнее $\varphi_0 = \pi$ и нижнее $\varphi_0 = 0$ вертикальные положения маятника являются положениями равновесия при неподвижном подвесе ($x(t) \equiv y(t) \equiv 0$), то исключим их из дальнейшего рассмотрения и будем предполагать, что $\sin \varphi_0 \neq 0$. Отметим лишь, что для сохранения вертикальных положений равновесия маятника точка подвеса может перемещаться лишь вдоль оси Oy . Как следует из [1], верхнее положение становится устойчивым при колебаниях подвеса вдоль вертикали с частотой выше $\frac{\sqrt{2gl}}{a}$, где a – амплитуда этих колебаний.

2. Условия существования равновесий. Попробуем найти движение точки подвеса $(x(t), y(t))$ такое, что $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const} \neq k\pi, k \in Z$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ могут рассматриваться как управления в уравнении (1). В качестве класса допустимых управлений рассмотрим непрерывные дважды дифференцируемые функции. Тогда, учитывая $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$, уравнение (1) преобразуем к виду

$$(g + \ddot{y}(t)) \sin \varphi_0 + \ddot{x}(t) \cos \varphi_0 = 0.$$

Откуда

$$y(t) = -x(t) \text{ctg} \varphi_0 - \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad (4)$$

где c_1, c_2 – некоторые константы, которые определяются из начальных значений скорости и положения подвеса маятника. Выбрав произвольным образом

$x(t)$ из класса допустимых функций, из (4) получим $y(t)$, определив тем самым полностью движение точки подвеса. Таким образом, имеем семейство управлений $x(t), y(t)$, обеспечивающих наклонное равновесие маятника. Выясним, существуют ли среди них ограниченные.

Пусть $x(t)$ – ограниченная на полуинтервале $[0, +\infty)$ функция. Тогда при $t \rightarrow \infty$ в силу ограниченности $x(t)$ величина $|y(t)|$ согласно (4) стремится к бесконечности. Следовательно, движение подвеса при $\sin \varphi_0 \neq 0$ не может быть ограниченным по обеим координатам. Тем не менее возможен режим движения ограниченный по y и неограниченный по x , позволяющий маятнику оставаться в наклонном положении (например, $x(t) = -\frac{gt^2}{2} \operatorname{tg} \varphi_0, y(t) = 0$).

Упростим теперь траекторию движения подвеса. Будем перемещать точку подвеса по прямой (2), но расширим класс допустимых функций $s(t)$. Этот класс будет включать функции, первые производные которых (скорости) могут иметь разрывы первого рода в некоторых точках. На промежутках между этими точками функции $s(t)$ будут, как и раньше, дважды дифференцируемыми. В указанных точках разрыва рассматриваемая механическая система будет подвергаться импульсному воздействию.

Найдем реакцию маятника на такое воздействие. Для этого преобразуем уравнение второго порядка (3) к системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = l^{-1} (\ddot{s} \sin(\varphi - \alpha) - g \sin \varphi). \end{cases} \quad (5)$$

Выберем $\ddot{s}(t)$ в качестве управления $u(t)$, тогда обобщенным управлением $U(t)$ будет скорость $\dot{s}(t)$. Пусть величина скачка $U(t)$ в точке разрыва θ будет равна ΔU . Согласно [26], воспользуемся линейной аппроксимацией $U^{(\varepsilon)}(t)$ в окрестности точки θ . Тогда $u(t) = \frac{\Delta U}{\varepsilon}$ на $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$. Предполагая ограниченность и непрерывность $\omega(t)$ и $\varphi(t)$, найдем, что при $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$

$$\varphi(t) = \varphi(\theta) + \int_{\theta}^t \omega(t) dt = \varphi_0 + (t - \theta)\omega(\theta^*) = \varphi(\theta) + O(t - \theta),$$

где $\theta^* \in (\theta, \theta + \varepsilon)$. Выражение для угловой скорости будет иметь вид

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega(\theta) + l^{-1} \left[- \int_{\theta}^t g \sin \varphi(t) dt + \frac{\Delta U}{\varepsilon} \int_0^t \sin(\varphi(t) - \alpha) dt \right] = \omega(\theta) + \\ &+ l^{-1} \left[-g \sin(\varphi(\theta) + O(t - \theta))(t - \theta) + \frac{\Delta U}{\varepsilon} \sin(\varphi(\theta) - \alpha + O(t - \theta))(t - \theta) \right] = \\ &= \omega(\theta) + l^{-1} \left[O(t - \theta) + \frac{\Delta U}{\varepsilon} \sin(\varphi(\theta) - \alpha) (t - \theta) + O((t - \theta)^2) \right]. \end{aligned}$$

Найдем значения угла φ и угловой скорости ω при ε , стремящемся к нулю

$$\begin{aligned}\varphi(\theta + \varepsilon) &= \varphi(\theta) + O(\varepsilon) \rightarrow \varphi(\theta), \\ \omega(\theta + \varepsilon) &= \omega(\theta) + \frac{1}{l} \left[O(\varepsilon) + \frac{\Delta U}{\varepsilon} \sin(\varphi(\theta) - \alpha) \varepsilon \right] \rightarrow \omega(\theta) + \frac{\Delta U}{l} \sin(\varphi(\theta) - \alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, реакция системы (5) на импульс первого порядка величины ΔU описывается уравнениями

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \Delta\omega = l^{-1} \Delta U \sin(\varphi - \alpha). \end{cases} \quad (6)$$

Для сохранения требуемого режима $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$ необходимо, чтобы скачок $\Delta\omega$ был равен 0. Поэтому указанное движение должно осуществляться только под углом α , удовлетворяющим условию $\sin(\varphi_0 - \alpha) = 0$. Однако при таком направлении движения точки подвеса нет возможности удерживать маятник под фиксированным углом φ_0 с помощью движения подвеса с непрерывно изменяющейся скоростью.

Рассмотрим теперь импульсное управление второго порядка. А именно такое, при котором уже координата $s(t)$ будет иметь разрывы первого рода. Отметим, что данный класс управлений представляет только математический интерес, поскольку на практике невозможно реализовать движение, обеспечивающее мгновенное перемещение точки подвеса из одного положения в другое.

Вычислим реакцию системы (5) на импульс второго порядка. Для этого предположим, что обобщенное управление $U(t) = s(t)$ имеет разрыв первого рода в некоторой точке θ , с величиной скачка ΔU . Поскольку система (5) автономна, то без ограничения общности можно считать, что $\theta = 0$. Воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией функции $\dot{s}(t)$:

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\Delta U}{\varepsilon} - v_0 \right) \frac{t}{\varepsilon^2} + v_0 & \text{при } 0 < t \leq \varepsilon^2, \\ \frac{\Delta U}{\varepsilon} & \text{при } \varepsilon^2 < t \leq \varepsilon + \varepsilon^2, \\ \left(v_0 - \frac{\Delta U}{\varepsilon} \right) \frac{t - (\varepsilon + 2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} + v_0 & \text{при } \varepsilon + \varepsilon^2 < t \leq \varepsilon + 2\varepsilon^2, \end{cases}$$

где $v_0 = \dot{s}(0)$.

Тогда управление $u(t)$ будет выражаться как

$$u(t) = \ddot{s}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta U - v_0 \varepsilon}{\varepsilon^3} & \text{при } 0 < t \leq \varepsilon^2, \\ 0 & \text{при } \varepsilon^2 < t \leq \varepsilon + \varepsilon^2, \\ -\frac{\Delta U - v_0 \varepsilon}{\varepsilon^3} & \text{при } \varepsilon + \varepsilon^2 < t \leq \varepsilon + 2\varepsilon^2. \end{cases}$$

Точка подвеса маятника при таком управлении будет смещена на расстояние $\Delta U + O(\varepsilon)$ за промежуток времени $\varepsilon + 2\varepsilon^2$. При стремлении ε к нулю получим мгновенное смещение точки подвеса. При $\varepsilon \rightarrow 0$ реакция системы (5) будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{\Delta U}{l} \sin(\varphi_0 - \alpha), \\ \Delta\omega &= \frac{\Delta U \varepsilon^{-1} - v_0}{l} \left(\sin(\varphi_0 - \alpha) - \sin\left(\varphi_0 - \alpha + \frac{\Delta U}{l} \sin(\varphi_0 - \alpha)\right) \right).\end{aligned}$$

Для того, чтобы скачки угла φ и угловой скорости ω были нулевыми, необходимо выполнение условия $\sin(\varphi_0 - \alpha) = 0$, как и в случае с импульсным воздействием первого порядка.

Таким образом, даже при использовании импульсных воздействий на движение точки подвеса невозможно обеспечить положений равновесия маятника, отличных от вертикальных. Можно дать и другое объяснение этому факту. Пусть угол наклона маятника будет постоянным $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$, а точка подвеса маятника движется по некоторому закону $(x(t), y(t))$. В таком случае уравнение (1) имеет интеграл

$$x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 = -\frac{gt^2}{2} \sin \varphi_0 + c_1 t + c_2,$$

где константы c_1 и c_2 определяются начальными положением и скоростью точки подвеса. Выражение, записанное в левой части, определяет проекцию положения точки подвеса на ось, перпендикулярную стержню маятника. Поскольку $\sin \varphi_0 \neq 0$, то правая часть уравнений независимо от начальных условий неограниченно убывает при $t \rightarrow \infty$, и, значит, указанная проекция точки подвеса также будет неограниченна. Так как при импульсных воздействиях интегралы сохраняются, а время воздействия пренебрежимо мало, то возможно осуществить лишь такие мгновенные перемещения подвеса, которые не изменяют величину проекции $x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0$. С течением же времени эта координата с необходимостью будет убывать, чтобы обеспечить равновесие.

3. Квазиравновесные состояния маятника. Поскольку, как было показано выше, точного равновесия маятника в наклонном положении невозможно добиться ограниченным управлением, попытаемся реализовать режим управления, при котором маятник будет совершать малые колебания относительно заданного положения. В монографии [13] движение колебательной системы, подверженной некоторому вибрационному воздействию, рассматривается как сумма медленной (которая получается усреднением воздействия по периоду) и быстрой составляющей. Движение, при котором медленная составляющая не изменяется с течением времени, названо квазиравновесием. В данной работе будем требовать большего. А именно, чтобы за счет выбора управляющего воздействия (в нашем случае это движение точки подвеса) максимальное отклонение от данного положения маятника могло бы быть сделано сколь угодно малым.

Как правило, для нахождения квазиравновесий задаются некоторым движением подвеса, после чего определяют характер колебаний маятника. Используем обратный подход. Пусть задано некоторое наклонное положение маятника φ_0 . Задача будет заключаться в нахождении закона движения подвеса $(x(t), y(t))$, обеспечивающего гармонические колебания маятника относительно выбранного положения φ_0 с частотой Ω и амплитудой ε :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varepsilon \cos(\Omega t + \delta). \quad (7)$$

Ограничимся лишь прямолинейным движением точки подвеса. Подставив (7) в уравнение (3), имеем

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \cos(\Omega t + \delta)\Omega^2 l + g \sin(\varphi_0 + \varepsilon \cos(\Omega t + \delta)) - \\ & - \ddot{s}(t) \sin(\varphi_0 - \alpha + \varepsilon \cos(\Omega t + \delta)) = 0. \end{aligned}$$

Тогда для нахождения закона движения подвеса $s(t)$ получаем соотношение

$$\ddot{s}(t) = \frac{-\varepsilon \cos(\Omega t + \delta)\Omega^2 l + g \sin(\varphi_0 + \varepsilon \cos(\Omega t + \delta))}{\sin(\varphi_0 - \alpha + \varepsilon \cos(\Omega t + \delta))}. \quad (8)$$

Заметим, что когда правая часть (8) определена при любых t , то, проинтегрировав ее дважды с учетом начальных условий, получим движение $s(t)$, гарантирующее существование требуемого решения (7) уравнения (3). Однако может возникнуть такая же ситуация, как и в случае точного равновесия, когда движение подвеса $s(t)$ оказывалось неограниченным. Следующая теорема показывает, что при соответствующем выборе параметров движения рассматриваемой механической системы можно обеспечить ограниченность $s(t)$.

Теорема. Пусть начальное положение маятника $\varphi_0 \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ и направление колебаний подвеса α связаны неравенством $\sin \varphi_0 \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \alpha) < 0$. Тогда при любом достаточно малом максимальном отклонении ε от начального положения φ_0 , существует частота колебаний маятника Ω такая, что реализуется режим колебаний (7). При этом движение точки подвеса $s(t)$ будет непрерывным и периодическим (а значит и ограниченным).

Доказательство. Как следует из (8), функция $\ddot{s}(t)$ – периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\Omega}$. Поэтому вариант, когда движение $s(t)$ будет ограниченным, возможен тогда и только тогда, когда функция $s(t)$ будет периодической. Для этого достаточно, чтобы $s(0) = s\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$ и $\dot{s}(0) = \dot{s}\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $s(0) = 0$.

Для сокращения записи обозначим $E(t) = \varepsilon \cos(\Omega t + \delta)$. Нам требуется доказать, что существует такая частота Ω , при которой за период $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, точка подвеса маятника вернется в свое начальное положение $s(0)$ с начальной скоростью $v_0 = \dot{s}(0)$.

Приращение скорости $v(t)$ за период T определяется интегралом от $\ddot{s}(t)$ по отрезку $[0, T]$. Из (8) находим

$$\Delta v = -\Omega^2 l \int_0^T \frac{E(t)}{\sin(\varphi_0 - \alpha + E(t))} dt + g \int_0^T \frac{\sin(\varphi_0 + E(t))}{\sin(\varphi_0 - \alpha + E(t))} dt. \quad (9)$$

Тогда при $\Omega \rightarrow 0$

$$\Delta v \rightarrow g \int_0^T \frac{\sin(\varphi_0 + E(t))}{\sin(\varphi_0 - \alpha + E(t))} dt.$$

Поскольку при достаточно малых значениях ε подынтегральное выражение сохраняет знак на отрезке $[0, T]$, то знак приращения Δv будет таким же, как и у выражения $\frac{\sin \varphi_0}{\sin(\varphi_0 - \alpha)}$.

Теперь изучим поведение приращения Δv при достаточно больших значениях частоты Ω . В этом случае его знак определяется знаком интеграла

$$- \int_0^T \frac{E(t)}{\sin(\varphi_0 - \alpha + E(t))} dt \quad (10)$$

из (9).

Заметим, что $E(t + T/2) = -E(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \frac{E(t)}{\sin(\varphi_0 - \alpha + E(t))} dt = \\ & = \int_0^{T/2} E(t) \left[\frac{1}{\sin(\varphi_0 - \alpha - E(t))} - \frac{1}{\sin(\varphi_0 - \alpha + E(t))} \right] dt. \end{aligned}$$

Если $\cos(\varphi_0 - \alpha) > 0$, то функция $\sin(\varphi_0 - \alpha + \tau)$ возрастает в окрестности точки $\tau = 0$, и поэтому подынтегральное выражение положительно (за исключением нескольких изолированных точек, в которых $E(t) = 0$). Следовательно, интеграл (10) положителен. Аналогично можно показать, что в случае $\cos(\varphi_0 - \alpha) < 0$, интеграл (10) будет отрицательным. Таким образом, его знак совпадает со знаком $\cos(\varphi_0 - \alpha)$.

Итак, имеем, что при $\Omega \rightarrow 0$ знак Δv совпадает со знаком $\frac{\sin \varphi_0}{\sin(\varphi_0 - \alpha)}$, а при $\Omega \rightarrow \infty$ — со знаком $\cos(\varphi_0 - \alpha)$. Эти знаки различны, поскольку по условию теоремы выполнено неравенство $\sin \varphi_0 \operatorname{ctg}(\varphi_0 - \alpha) < 0$. Значит, в силу непрерывной зависимости Δv от Ω существует некоторое значение $\Omega = \Omega_0$, при котором приращение скорости за период T будет равно нулю.

Теперь рассмотрим приращение $s(t)$, оно будет равно $\int_0^T \dot{s}(t)dt$. Очевидно, что в зависимости от начального значения скорости v_0 , мы можем получить различные приращения Δs . Выберем начальную скорость так, чтобы это приращение равнялось нулю. Обозначим $\Delta v(t) = \int_0^t \ddot{s}(\tau)d\tau$. Тогда, выбрав начальную скорость v_0 равной $-\frac{1}{T} \int_0^T \Delta v(t)dt$, получим, что приращение $s(t)$ будет нулевым.

Итак, мы нашли такие значения частоты Ω и начальной скорости для $s(t)$, что координата подвеса $s(t)$ и его скорость за период возвращаются к исходным значениям. Следовательно, при этих значениях движение подвеса $s(t)$ будет периодическим и непрерывным по t , а маятник будет совершать колебания относительно положения φ_0 по закону $\varphi(t) = \varphi_0 + \varepsilon \cos(\Omega t + \delta)$. Теорема доказана. \square

4. Примеры. Возьмем маятник длины $l = 10$ и рассмотрим его горизонтальное положение $\varphi_0 = \pi/2$. Пусть ось, вдоль которой колеблется точка подвеса, образует угол $\alpha = 3\pi/4$ с направлением силы тяжести. Графики движения точки подвеса, обеспечивающие гармонические колебания маятника около горизонтального положения с некоторой небольшой амплитудой ε , изображены на рис. 2.

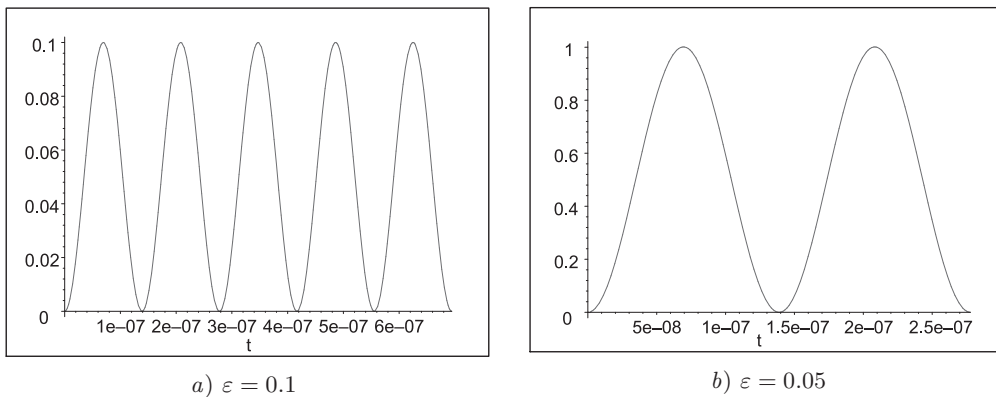


Рис. 2. Движение подвеса $s(t)$ при $\varphi_0 = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/4$.

Аналогичные графики для случая $\varphi_0 = \pi/4$, $\alpha = 2\pi/3$ представлены на рис. 3.

На рис. 4 приведен график зависимости частоты Ω от ε при периодическом движении $s(t)$ точки подвеса.

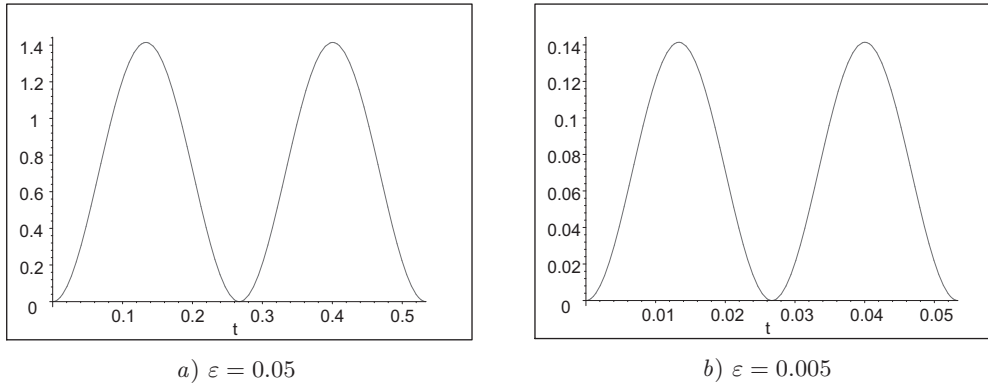


Рис. 3. Движение подвеса $s(t)$ при $\varphi_0 = \pi/4$, $\alpha = 2\pi/3$.

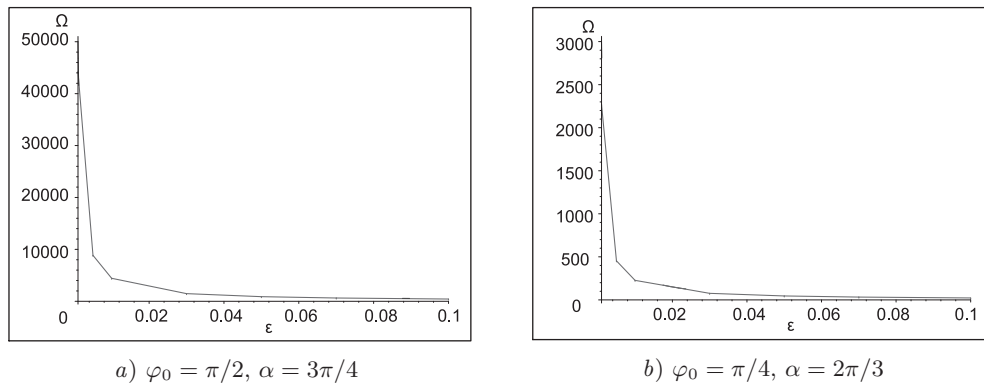


Рис. 4. График частоты $\Omega(\varepsilon)$.

Из рис. 4 видим, что частота $\Omega(\varepsilon)$ неограниченно возрастает при уменьшении амплитуды ε .

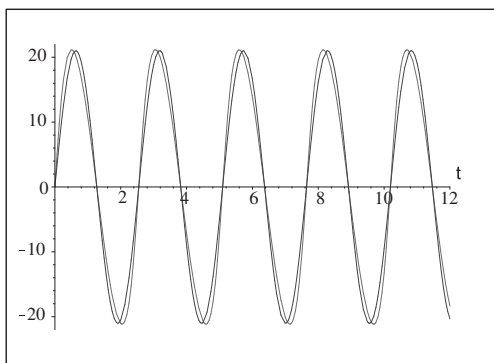


Рис. 5. Скорость движения подвеса и гармоника.

Движения, представленные на рис. 2, 3, имеют большое сходство с гармоническими колебаниями, однако отличаются от последних. На рис. 5 для $\varphi_0 = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/4$ приведены для сравнения графики скорости подвеса $v(t) = \dot{s}(t)$ при $\varepsilon = 0.5$. При этом оказалось, что максимальные значения скоростей $v(t)$ предшествуют максимумам скоростей гармоника, а минимальные – запаздывают.

Заключение. В статье рассмотрена задача о нахождении равновесных состояний математического маятника с вибрирующей точкой подвеса. В явном виде найдены неограниченные движения подвеса, обеспечивающие точные равновесия маятника, и доказано отсутствие ограниченных решений рассматриваемой задачи. Показано, что существуют периодические по времени колебания точки подвеса, при которых отклонения маятника от заданного фиксированного наклонного положения будут сколь угодно малы.

Работа частично поддержана грантом НАН Украины для молодых ученых.

1. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперимент. и теор. физики. – 1951. – **51**, № 5. – С. 588–597.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. – 1951. – **44**. – С. 7–20.
3. Stephenson A. On a new type of dynamic stability // Mem. and Proc. of the Manchester Literary and Philosophical Soc. – 1908. – **52**, № 8. – P. 1–10.
4. Stephenson A. On induced stability // Philosophical Magazine. – 1908. – **15**. – P. 233–236.
5. Стретт Дж.В. Теория звука. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1955. Т. 1. – 504 с.
6. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строител. механики АН УССР. – 1950. – **14**. – С. 9–34.
7. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 365 с.
8. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 139 с.
9. Erdelyi A. Uber die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhangepunkt // ZAMM. – 1934. – **14**, № 4. – S. 235–247.
10. Klotter K., Kotowski G. Uber die Stabilitat der Bewegungen des Pendels mit oszillierendem Aufhangepunkt // Ibid. – 1939. – **19**, № 5. – S. 289–296.
11. Hirsch P. Das Pendel mit oszillierendem Aufhangepunkt // Ibid. – 1930. – **10**, № 1. – S. 41–52.
12. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
13. Блелман И.И. Вибрационная механика. – М.: Наука, 1994. – 400 с.
14. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа “маятник”. – Алма-Ата: Наука, 1981. – 253 с.
15. Бардин Б.С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, № 6. – С. 922–929.
16. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. – 308 с.
17. Сейранян А.А., Сейранян А.П. Об устойчивости перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // Прикл. математика и механика. – 2006. – **70**, № 5. – С. 835–843.
18. Lowenstern E. R. The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system // Philosoph. Magazine. – 1932. – **8**. – P. 458–486.
19. Hsu, C.S. On a restricted class of coupled Hill’s equations and some applications // J. Appl. Mech. – 1961. – **28**. – P. 551–556.
20. Холостова О.В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 2. – С. 25–40.
21. Otterbein S. Stabilisierung des n-Pendels und der Indische Seiltrick // Arch. ration. Mech. Analysis – 1982. – **78**. – P. 381–393.
22. Acheson D.J. A pendulum theorem // Proc. R. Soc. Lond. – 1993. – **A443** – P. 239–245.
23. Маркеев А.П. О близких к коническим движениях сферического маятника с вибриру-

- юшей точкой подвеса // Тр. конф. “Устойчивость и колебания нелинейн. систем упр.”. – 1998. – С. 107.
24. *Петров А.Г.* Об уравнениях движения сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Докл. РАН. – 2005. – **405**, № 1. – С. 51–55.
 25. *Глухих Ю.Д., Тхай К.В.* Устойчивость пространственных симметричных колебаний сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса // Тр. конф. “Устойчивость и колебания нелинейн. систем упр.”. – 2006. – С. 59–60.
 26. *Ковалев А.М., Кравченко Н.В., Неспирный В.Н.* Задачи управления и стабилизации динамических систем с импульсным управлением и неавтономные механические системы // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 163–179.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vetal_n@mail.ru

Получено 16.08.09