

УДК 534.015.1, 534.83

©2009. А.Е. Позднякович, В.Е. Пузырев

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОГЛОТИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрен вопрос о выборе параметров динамического поглотителя колебаний (ДПК), обеспечивающих его наибольшую эффективность. Рассмотрен простейший, "классический" [1], вариант ДПК – одноступенный гидравлический гаситель. Предложена схема определения его параметров: частоты колебаний, коэффициента демпфирования и отношения массы гасителя к массе основного тела. Полученные результаты сопоставлены с известными и проиллюстрированы численными расчетами.

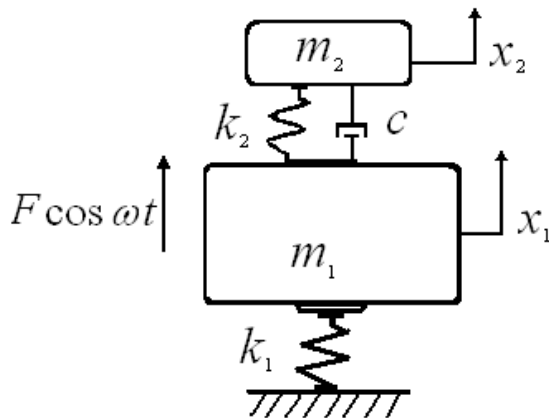


Рис. 1. Схема устройства динамического гасителя колебаний.

Основным назначением данного устройства является нейтрализация нежелательных колебаний системы с одной степенью свободы, возбуждаемых периодической по времени (гармонической) возмущающей силой. Амплитуда этих колебаний, как известно из литературы, неограниченно возрастает, если частота ω близка к собственной частоте (natural frequency) системы. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= F \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m_1, m_2 – массы, а k_1, k_2 – жесткости пружин основного тела и гасителя соответственно; c – коэффициент сопротивления; F – максимальное значение возмущающей силы.

Для системы, изображенной на рис. 1, величина амплитуды вынужденных колебаний (им соответствует частное решение неоднородной системы (1)) определяется согласно формуле

¹В литературе используются различные названия данного устройства; наиболее употребительное в англоязычных источниках – dynamic vibration absorber [1–6], в русскоязычной литературе – поглотитель (динамический) или гаситель колебаний [7].

$$f = \left(\frac{x_1}{\Delta}\right)^2 = \frac{h\gamma + (\gamma - d)^2}{h\gamma(\gamma + b\gamma - 1)^2 + [bd\gamma + (\gamma - 1)(\gamma - d)]^2}, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \frac{F}{k_1}, \quad b = \frac{m_2}{m_1}, \quad d = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2, \quad h = \frac{m_1 c^2}{m_2^2 k_1}, \quad \gamma = \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2.$$

Здесь величина Δ представляет собой статический прогиб первой пружины, а $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ – круговые частоты колебаний соответственно основного тела и гасителя.

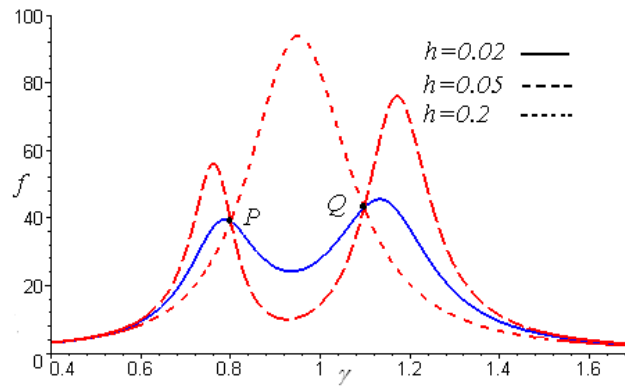


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые при $b = 0,05$; $d = 0,9$.

В предположении, что параметр b задан, схема определения оптимальных значений для d, h была предложена Я. П. Ден Хартогом [1, 2]. Несмотря на то, что с тех пор прошло более трех четвертей века, а примененный подход использовал весьма простой математический аппарат, этот результат Ден Хартога практически без изменений излагается во многих современных изданиях по теории колебаний [3–7]. Ден Хартог фиксировал значения b, d и для различных значений h строил амплитудно-частотные кривые так, как это сделано на рис. 2, согласно формуле (2). Далее он использовал близость абсцисс инвариантных точек P и Q (invariant points – их координаты не зависят от выбора h) и “пиков” кривых, которые соответствуют максимальным значениям амплитуды вынужденных колебаний. Если переписать выражение (2) в виде

$$f = \frac{Ah + B}{Ch + D},$$

то координаты точек P, Q можно легко определить из пропорции $A : B = C : D$. После этого параметр d подбирался из условия равенства ординат “пиков”, а h – из условия “почти горизонтальности” касательных к

амплитудно-частотной кривой в инвариантных точках. Таким образом получили значения

$$d_{\text{opt}} = \frac{1}{(1+b)^2}, \quad h_{\text{opt}} = \frac{3b}{2(1+b)^3}. \quad (3)$$

Подход Ден Хартога имел несомненные плюсы: простоту, что существенно для специалистов-прикладников, и высокую точность, как показали численные эксперименты. Вместе с тем, можно отметить и два недостатка этого подхода. Первый – это отсутствие аналитической оценки разности между предлагаемым приближением и истинным значением (которое, строго говоря, не может быть определено точно). Второй – это использование существования инвариантных точек, что является скорее исключением, чем правилом. В частности, в случае, когда основное тело также имеет демпфирование, инвариантных точек нет, и для нахождения оптимальных параметров ДПК приходится прибегать к численной оптимизации [6, р. 14–15]. Поэтому является актуальной разработка общего аналитического подхода к решению подобных задач.

2. Аналитическая схема приближенного нахождения оптимальных параметров ДПК. Величины, характеризующие параметры ДПК: его массу, собственную частоту колебаний (без учета демпфирования) и коэффициент сопротивления, являются положительными и ограниченными, т.е. существуют такие положительные числа $\delta_1, \delta_2, \delta_3, b_*, d_*, h_*$, что

$$\delta_1 \leq b \leq b_*, \quad \delta_2 \leq d \leq d_*, \quad \delta_3 \leq h \leq h_*. \quad (4)$$

В формулу (2) входит также величина γ , которая, в отличие от остальных неизвестных, может принимать произвольные значения из промежутка $(0, \gamma_*)$, в том числе и “неудобные” – дающие максимально возможное (при заданных b, d, h) значение амплитуды колебаний основного тела. Таким образом, задачу можно сформулировать следующим образом: пусть параметры ДПК заданы, тогда следует: а) найти \hat{f} – наибольшее по γ значение функции f ; б) найти наименьшее значение \hat{f} в замкнутой области (4).

Вычислим частную производную $\partial f / \partial \gamma$ и приравняем ее нулю. С точностью до отрицательного множителя она равна

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma) = & 2\gamma^5 + \gamma^4[(4 + 2\beta h + \beta^2)h - 2(1 + 4\delta + \beta\delta)] + \gamma^3[h^2(1 + \beta)^2 - \\ & - 4h(1 + \delta(1 + b)(2 + b)) + 4\delta(2 + \delta(3 + 2\delta))] + \gamma^2[-2h^2(1 + \beta) + \\ & + 2h\delta(4 + 3\beta + \delta(1 + \beta)^2 - 2\delta^2(6 + b + \delta(1 + \beta)(4 + \beta))] + \\ & + \gamma[-4h\delta^2(1 + \beta) + 2\delta^3(1 + \beta)(\delta(1 + \beta) - 2(2 + b)) - 2\delta^4(1 + \beta)] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Данный многочлен пятой степени имеет по меньшей мере один положительный корень, а поскольку $\Phi(0) < 0$, $\Phi(\infty) > 0$, то функция $f(\gamma)$ в точке

максимума (их может быть одна или две) принимает свое наибольшее значение. С математической точки зрения получается “обычная” задача на нахождение условного экстремума функции четырех переменных $f(b, d, h, \gamma)$ при наличии соотношения (5). Трудность заключается в том, что получающаяся при этом система четырех нелинейных алгебраических уравнений слишком громоздка. Поэтому лучше применить приближенный способ решения задачи. Поскольку для широкого класса систем масса гасителя много меньше массы основного тела, то можно считать параметр b малым и воспользоваться методом теории возмущений [8]. При этом, на наш взгляд, проще искать решение по следующей схеме: 1) записываем d, h как ряды (многочлены) по степеням b с неопределенными коэффициентами и подставляем в (5); 2) ищем формальное решение для $\gamma = \gamma(b)$; 3) подставляем найденные выражения в f и, ограничиваясь несколькими первыми слагаемыми, находим приближенные значения для d и h . Опуская выкладки, имеем:

$$\begin{aligned} d &= 1 + d_1 b + d_2 b^2 + \dots, & h &= b (h_0 + h_1 b + \dots), \\ \gamma &= 1 + \gamma_1 \sqrt{b} + \gamma_2 b + \gamma_3 (\sqrt{b})^3 + \gamma_4 b^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Из равенства (5) получаем для $\frac{\gamma}{b}$ последовательность уравнений для нахождения коэффициентов $\gamma_j, j = \overline{1, 4}$

$$b^{5/2} : \gamma_1 (\gamma_1^4 + 2h_0 \gamma_1^2 + h_0^2 - 2h_0 - 1) = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} b^3 : & 2(5\gamma_1^4 + 6h_0 \gamma_1^2 + h_0^2 - 2h_0 - 1)\gamma_2 - 2(4d_1 - 2h_0 + 1)\gamma_1^4 + \\ & + 2[d_1(1 - 4h_0) + 2h_0^2 - 5h_0 - 1]\gamma_1^2 + 2d_1(1 + h_0) + 2h_0^2 + h_0 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Еще два уравнения не приводим – соответствующие выражения более громоздки, хотя с помощью системы аналитических вычислений (был использован пакет Maple) считаются довольно быстро.

Поскольку $h_0 > 0$, то уравнение (7) имеет три вещественных корня

$$\gamma_{11} = \sqrt{r - h_0}, \quad \gamma_{12} = -\sqrt{r - h_0}, \quad \gamma_{13} = 0, \quad r = \sqrt{2h_0 + 1}. \quad (9)$$

Значению γ_{13} соответствует минимум, поэтому эту цепочку коэффициентов дальше опускаем. Формальное разложение функции f в степенной ряд по b дает следующее выражение

$$f = \frac{1}{b} (f_0 + f_1 b^{1/2} + f_2 b + f_3 b^{3/2} + \dots),$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{h_0 + \gamma_1^2}{\gamma_1^4 + \gamma_1^2(h_0 - 2) + 1}, \\ f_1 &= \frac{-\gamma_1[2\gamma_2(\gamma_1^4 + 2h_0\gamma_1^2 + h_0^2 - 2h_0 - 1) - 2\gamma_1^4 + 2\gamma_1^2(h_0 + 3) + 2h_0^2 - 3h_0 - 4]}{\gamma_1^4 + \gamma_1^2(h_0 - 2) + 1}, \end{aligned}$$

выражения для f_2, f_3 не приводим из-за громоздкости.

Учитывая (9), получаем $f_0 = 2/[(3-r)(r-1)]$. Очевидно, что минимум данного выражения соответствует вершине параболы $y = -x^2 + 4x - 3$, т.е. $r = \sqrt{2h_0 + 1} = 2$, значит, $h_0 = 3/2, f_0 = 2$. Тогда $\gamma_1^2 = 1/2$, и из (8) находим $\gamma_2 = -7/8, f_1 = -4\gamma_1(d_1 + 2)$. Но, поскольку γ_1 может принимать два равных по абсолютной величине и противоположных по знаку значения, то оптимальным будет условие $f_1 = 0$, т.е. $d_1 = -2$. Подставив найденные значения в выражения для f_2, f_3 , далее находим

$$f_2 = \frac{17}{16}, f_3 = \frac{\gamma_1}{128} (512d_2 + 64h_1 - 1253).$$

Как и в случае с f_1 , полагаем $f_3 = 0$, тогда

$$h_1 = \frac{1253}{64} - 8d_2, f_4 = 24.6666d_2 - 78.5822, \quad (10)$$

и далее $f_5 = 0, f_6 = (383/2 + 32d_2)d_3 - 194.011d_2^2 + 1574.391d_2 - 2997.121$.

Сравнивая найденные значения коэффициентов разложения для d, h с теми, которые получаются из формул (3)

$$d_{\text{opt}} = 1 - 2b + 3b^2 - 2b^3 + \dots, \quad (11)$$

$$h_{\text{opt}} = \frac{3}{2}b - \frac{9}{2}b^2 + 9b^3 - \dots,$$

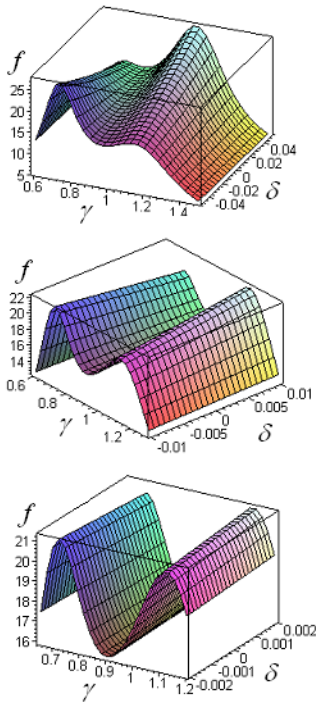


Рис. 3. Величина функции f в окрестности $d = d_{\text{opt}}$.

можно видеть, что коэффициенты при первых степенях b совпадают. Для нахождения последующих коэффициентов имеется некоторый произвол, как можно видеть из (10), однако он невелик. Казалось бы, следует выбрать d_2 отрицательным, тогда уменьшится значение для f_4 , а значит и для f . Но надо учитывать, что при этом ухудшится сходимость ряда (значение для f_6 будет иметь порядок $1/b$).

Отметим, что, как подтверждают численные расчеты, формулы (3) дают довольно высокую точность. Так, на рис. 3 приведена зависимость величины f — квадрата амплитуды колебаний основного тела в окрестности оптимальной собственной частоты ДПК $d = d_{\text{opt}} + \delta$. Здесь принято $b = 0.1, h = h_{\text{opt}}$. Верхний предел для оси аппликат выбирался автоматически, поэтому можно видеть, что с уменьшением значений δ этот предел уменьшается с ≈ 25 до ≈ 21.1 . Поэтому для уточнения найденного первого приближения поступим следующим

образом: положим $d_2 = 3 + \delta_2$, $d_3 = -2 + \delta_3$, и найдем некоторый баланс, обеспечивающий минимальность величины f_4 при условии невозрастания модулей последующих коэффициентов ряда для f – мы ограничились f_6 .

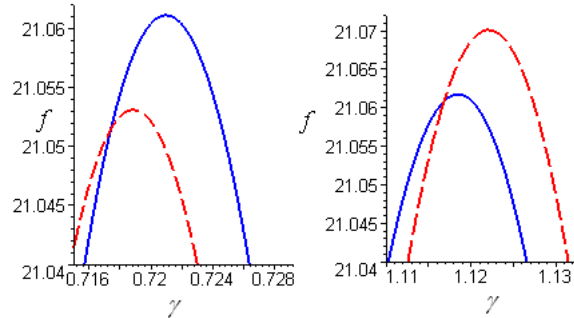


Рис. 4. Влияние поправок к d_{opt} и h_{opt} на величину амплитуды.

Результаты расчетов зависят от степени малости b , для $b = 0.1$ получилось значение $\delta_2 \approx -0.02$. Тогда $d_2 = 2.98$, а из (10) получается $h_1 \approx -4.3$. На рис. 4 приведены фрагменты графиков зависимости $f(\gamma)$ в окрестностях точек максимума: сплошной кривой соответствуют значения

$$d = 1 - 2b + 2.98 b^2, \quad h = b(1.5 - 4.3 b), \quad (12)$$

а пунктирной – d_{opt} , h_{opt} . Можно видеть, что формулы (3) и (12) дают, соответственно, значения для \hat{f} , равные ≈ 21.07 и ≈ 21.062 . Последнее даже немного меньше чем $f_0/b + f_2 = 20 + 17/16 = 21.0625$, поскольку ряд для $f(b)$ получается знакопеременным.

1. *Ormondroyd J., Den Hartog J.P.* The theory of the dynamic vibration absorber // Trans. ASME. – 1928. – **50**, № 1. – P. 9–22.
2. *J.P. Den Hartog* Mechanical vibrations. – York: Maple Press Co., 1947 (1934, 1940). – 486 p.
3. *Sesak J.R., Gronet M.J., Marinos G.M.* Passive Stabilization for Large Space Systems. – NASA Contractor Report. CR – 4067. – April, 1987. – 138 p.
4. *Celly S.G.* Fundamentals of mechanical vibrations. – Mc Graw – Hill series in mechanical engineering, 2000. – 632 p.
5. *Rao S.S.* Mechanical vibrations. – Purdue University, Addison – Wesley Publishing Co., 2000. – 737 p.
6. *Encyclopedia of vibrations* / Ed.-in-Chief Brown S. – San Diego etc.: Academic Press, 2002. – 1685 p.
7. *Тимошенко С.П., Янг Д.Ч., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
8. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.