ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.38

©2009. **А.Ю. Савушкин, И.И. Харламова**

БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВОЛЧКА С СИНГУЛЯРНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В общем случае гамильтонова система с тремя степенями свободы, описывающая движение твердого тела в поле двух постоянных сил, не допускает групп симметрий. Х. Яхья нашел условия, при которых уравнения движения гиростата Ковалевской в поле такого вида имеют, в дополнение к интегралу энергии, интеграл, линейный по компонентам угловой скорости. Позднее было отмечено, что в двойном силовом поле этот интеграл при условиях Яхья существует для любого динамически симметричного тела с центрами приложения полей в экваториальной плоскости. Соответствующая система является натуральной механической системой с S^1-симметрией, поэтому можно ставить вопрос о реализации программы С. Смейла топологического анализа. В то же время, эта симметрия обладает некоторым множеством особых точек и, следовательно, не является регулярной. В настоящей работе строятся бифуркационные диаграммы отображения момента для семейства систем с сингулярной симметрией и исследуется зависимость диаграмм от единственного существенного параметра – отношения экваториального и осевого моментов инерции.

Введение. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки в двух постоянных силовых полях (например, гравитационном и магнитном) в подвижных осях имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_1\times\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2\times\boldsymbol{\beta}, \\ &\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{M}$ – кинетический момент, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}\mathbf{I}^{-1}$ – угловая скорость, $\mathbf{I}$ – тензор инерции в закрепленной точке O. Векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ представляют собой напряженности силовых полей. В соответствии со второй группой уравнений (1) эти векторы неизменны в инерциальном пространстве. Постоянные в теле векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ есть радиус-векторы центров приложения полей. Для дальнейшего нам удобно трактовать все векторы как строки, чем и обусловлена запись тензора справа от вектора.

Ограничение системы (1) на любой невырожденный уровень $P^6(a, b, c)$ трех геометрических интегралов

$$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = a^2, \qquad |\boldsymbol{\beta}|^2 = b^2, \qquad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = c \qquad (|c| < ab) \tag{2}$$

в пространстве $\mathbb{R}^9(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{M})$ является гамильтоновой системой с тремя степенями свободы по отношению к скобке Ли–Пуассона [1], для которой геометрические интегралы служат функциями Казимира. Функция Гамильтона такова

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_1\cdot\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{r}_2\cdot\boldsymbol{\beta}. \tag{3}$$

Пусть $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис главных осей инерции. Предположим, что главные моменты инерции удовлетворяют отношению Ковалевской 2:2:1, а векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ параллельны экваториальной плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и образуют ортонормированную пару. Тогда, очевидно, можно полагать без ограничения общности, что $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_2$. При этих условиях в работе [1] в дополнение к H найден первый интеграл K, обобщающий интеграл Ковалевской. Если в то же время

$$a = b, \qquad c = 0, \tag{4}$$

то имеет место случай Яхья [2]; система допускает S^1-симметрию и поэтому приводима к семейству интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Ввиду особенностей действия группы приведенные системы определены не глобально. Интеграл момента (гамильтониан действия группы) имеет вид

$$L = \mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - a^2 \mathbf{e}_3), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

На самом деле, как показано в [3], интеграл (5) имеет более общую природу. Пусть тензор инерции имеет ось симметрии $O\mathbf{e}_3$, отношение экваториального момента инерции к осевому произвольно, радиус-векторы центров приложения также произвольны с одним лишь условием параллельности экваториальной плоскости

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \qquad \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \tag{6}$$

Пусть D – невырожденная 2×2-матрица. Преобразование

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{array} \right\| \mapsto D \left\| \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{array} \right\|, \qquad \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{array} \right\| \mapsto (D^{-1})^T \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{array} \right\|, \qquad \mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}$$

сохраняет уравнения (1) и функцию (3), приводя к эквивалентной системе. Постоянные симметричные матрицы

$$R = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 \end{array} \right\|, \qquad A = \left\| \begin{array}{cc} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \end{array} \right\|^{-1}$$

преобразуются по закону $R \mapsto DRD^T$, $A \mapsto DAD^T$. Существует $D \in GL(2, \mathbb{R})$ такая, что R становится единичной, а A – диагональной ($c = 0$). Очевидно, свойство (6) сохраняется и для новой, но уже ортонормированной пары $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$. Следовательно, она может быть выбрана в качестве главного базиса инерции в экваториальной плоскости

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_1, \qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_2.$$

Таким образом, изначальное требование ортонормированности радиус-векторов центров приложения и ортогональности полей является излишним, так как система всегда приводится линейной заменой переменных с постоянными коэффициентами к системе, у которой пара $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ортонормирована, а $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – ортогональна. Такая замена впервые предложена в работе [4] и известна как параметрическая редукция для двух постоянных полей.

Предположим, что *после* редукции получено условие $a = b$. Тогда выполнены условия (4) без дополнительных ограничений на моменты инерции. Пусть

$$T(\tau) = \left\| \begin{array}{ccc} \cos\tau & \sin\tau & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Однопараметрическое действие $g_\tau : \mathbb{R}^9(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{M}) \to \mathbb{R}^9(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{M})$, определенное как

$$g_\tau(\left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\|) = T(\tau) \left\| \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{M} \end{array} \right\| T(-\tau), \tag{7}$$

сохраняет систему (1), гамильтониан H, а также имеет инвариантное многообразие $P^6(a, a, 0)$. Следовательно, $\{g_\tau\} \cong S^1$ – группа симметрий. Соответствующий циклический интеграл совпадает с (5) [3].

Обозначим через n отношение экваториального момента инерции к осевому. Единицы изменения выберем так, чтобы $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\{n, n, 1\}$, $a = 1$. Далее пространство $P^6(1, 1, 0)$ обозначаем для краткости через P^6. Первые интегралы уравнений (1) на P^6 таковы

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left[n(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_3^2\right] - \alpha_1 - \beta_2, \\ L &= n[\omega_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \omega_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)] + \omega_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - 1). \end{aligned}$$

Обозначим матрицу со строками $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ через Q. Очевидно, отображение $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{M}) \mapsto (Q, \boldsymbol{\omega})$ есть диффеоморфизм P^6 на $TSO(3)$. Система (1), ограниченная на P^6, является поэтому натуральной механической системой на $SO(3)$ с S^1-симметрией в смысле [5]. Программа Смейла топологического анализа этой системы может быть выполнена с некоторыми модификациями, учитывающими тот факт, что действие группы обладает множеством неподвижных точек $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_3$ (однопараметрическая подгруппа действует на $SO(3)$ внутренними автоморфизмами, поэтому она сама, будучи коммутативной, является множеством неподвижных точек). В настоящей работе решается задача вычисления бифуркационной диаграммы Σ отображения момента

$$J = L \times H : P^6 \to \mathbb{R}^2.$$

Также предъявляются различные типы диаграмм Σ в зависимости от параметра n. Напомним, что по определению Σ состоит из точек $(\ell, h) \in \mathbb{R}^2$, над окрестностями которых отображение J не является локально тривиальным. Поэтому интегральные многообразия

$$J_{\ell,h} = \{\zeta \in P^6 : L(\zeta) = \ell, H(\zeta) = h\}$$

претерпевают топологические перестройки, когда (ℓ, h) пересекает Σ. В частности, нахождение множества Σ является необходимым этапом топологического анализа задачи. Диаграмма Σ совпадает с множеством критических значений J ввиду компактности изоэнергетических уровней.

1. Критические точки первых интегралов. Воспользуемся заменой переменных, введенной в [6] и обобщающей замену С. Ковалевской на случай двух силовых полей ($\mathrm{i}^2 = -1$):

$$\begin{aligned}
&x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + \mathrm{i}(\alpha_2 + \beta_1), \quad && x_2 = (\alpha_1 - \beta_2) - \mathrm{i}(\alpha_2 + \beta_1),\\
&y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + \mathrm{i}(\alpha_2 - \beta_1), \quad && y_2 = (\alpha_1 + \beta_2) - \mathrm{i}(\alpha_2 - \beta_1),\\
&z_1 = \alpha_3 + \mathrm{i}\beta_3, && z_2 = \alpha_3 - \mathrm{i}\beta_3,\\
&w_1 = \omega_1 + \mathrm{i}\omega_2, && w_2 = \omega_1 - \mathrm{i}\omega_2,\\
&w_3 = \omega_3.
\end{aligned} \tag{8}$$

Условия (2) на P^6 принимают вид

$$z_1^2 + x_1 y_2 = 0, \qquad z_2^2 + x_2 y_1 = 0, \qquad x_1 x_2 + y_1 y_2 + 2 z_1 z_2 = 4. \tag{9}$$

Введем переменные x, y, z, полагая

$$x^2 = x_1 x_2, \qquad y^2 = y_1 y_2, \qquad z^2 = z_1 z_2,$$

и примем следующее соглашение о знаках:

$$x \geqslant 0, \qquad \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} \operatorname{Re}(y_i). \tag{10}$$

Тогда

$$z^2 = \pm xy, \qquad (x \pm y)^2 = 4, \qquad x \in [0, 2]. \tag{11}$$

При исследовании критических точек различных функций на P^6 для того, чтобы избежать введения неопределенных множителей Лагранжа для ограничений (9), удобно использовать уравнения, предложенные в работе [7].

Лемма. *Пусть f – гладкая функция комплексных переменных* (8). *Критические точки ограничения функции f на подмногообразие, определенное уравнениями* (9), *описываются системой уравнений*

$$\begin{gathered}
\partial_{w_1} f = 0, \qquad \partial_{w_2} f = 0, \qquad \partial_{w_3} f = 0,\\
(2z_2 \partial_{x_2} + 2z_1 \partial_{y_2} - x_1 \partial_{z_1} - y_1 \partial_{z_2}) f = 0,\\
(2z_1 \partial_{x_1} + 2z_2 \partial_{y_1} - x_2 \partial_{z_2} - y_2 \partial_{z_1}) f = 0,\\
(x_1 \partial_{x_1} - x_2 \partial_{x_2} + y_1 \partial_{y_1} - y_2 \partial_{y_2}) f = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Пусть $\mathcal{C}$ – множество критических точек интегрального отображения J. Тогда $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$, где $\mathcal{C}^i = \{\zeta \in P^6 : \operatorname{rank} J(\zeta) = i\}$.

Вначале рассмотрим критические точки гамильтониана H. Они являются положениями равновесия в системе (1). Уравнения (12) с $f = H$ дают

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0, \qquad z_1 = z_2 = 0, \qquad y_1 = y_2.$$

Из (11) следует, что в этом случае

$$xy = 0. \tag{13}$$

Если $x = 0$, то $y_1 = y_2 = \pm 2$. Получаем два положения равновесия

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_1, \quad \ \ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_2; \\ &\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что оба они невырождены, первое – устойчиво, второе – неустойчиво. Соответствующие значения первых интегралов дают две точки в плоскости (ℓ, h): $P_-(0,-2)$ и $P_+(0,2)$. Если в (13) взять $y = 0$, то значения x_1, x_2 остаются произвольными в пределах условия $x_1 x_2 = 4$. Следовательно, имеется целая окружность вырожденных безразличных положений равновесия, отвечающая точке $P_0(0,0)$ в плоскости (ℓ, h). С физической точки зрения это множество положений равновесия состоит из всех ориентаций тела, в которых экваториальная плоскость совпадает с плоскостью напряженностей сил $O\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$ и последний базис имеет противоположную ориентацию с базисом $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. При этом вращающий момент сил $\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta}$ тождественно равен нулю (все эти утверждения о положениях равновесия можно вывести также из результатов работы [8], где рассматривается случай трех постоянных полей и его вырождения).

Найдем критические точки интеграла L, записав уравнения (12) с $f = L$:

$$\begin{aligned} &x_2 z_1 - y_2 z_2 = 0, \qquad y_1 z_1 - x_1 z_2 = 0, \qquad x_1 x_2 - y_1 y_2 = -4, \\ &2n w_1 + (y_1 z_1 - x_1 z_2) w_3 = 0, \qquad 2n w_2 + (y_2 z_2 - x_2 z_1) w_3 = 0. \end{aligned}$$

С учетом (9) получим

$$w_1 = w_2 = 0, \qquad z_1 = z_2 = 0, \qquad x_1 = x_2 = 0, \qquad y_1 y_2 = 4.$$

Пусть $y_1 = 2\exp(-\mathrm{i}\psi)$, $y_2 = 2\exp(\mathrm{i}\psi)$. Тогда из (8), (1) находим

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_1 \cos\psi - \mathbf{e}_2 \sin\psi, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_1 \sin\psi + \mathbf{e}_2 \cos\psi, \\ &\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \dot{\psi}, \qquad \ddot{\psi} = -2\sin\psi. \end{aligned} \tag{14}$$

Эти уравнения описывают множество точек, принадлежащих траекториям маятниковых движений около оси $O\boldsymbol{\gamma} = O\mathbf{e}_3$, а последнее уравнение определяет соответствующую квадратуру. Значения первых интегралов таковы:

$$\ell = 0, \qquad h = \frac{1}{2}\omega_3^2 - 2\cos\psi \geqslant -2.$$

Отметим, что множество (14) включает и два невырожденных положения равновесия, но не содержит вырожденные равновесия $\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{e}_3$. Поэтому в точках вырожденных равновесий $dL \neq 0$, и, следовательно, множество $\mathcal{C}^0$ состоит в точности из двух точек пространства P^6. Естественно ожидать, что существуют нетривиальные движения с $\boldsymbol{\gamma} \equiv -\mathbf{e}_3$. Такое множество, если оно существует, не является критическим ни для одного из интегралов H, L. Эта возможность рассматривается в следующем параграфе.

2. Критические движения общего вида и значения интегралов. Точки множества $\mathcal{C}$, не являющиеся критическими ни для одного из интегралов H или L, порождаются критическими движениями общего вида. Эти движения – периодические решения системы (1), являющиеся одновременно орбитами действия g_τ, у которых $\tau = \sigma t$ (σ – некоторая константа). Следовательно, выражения (7) с такой зависимостью $\tau(t)$ дают аналитическое решение для движений этого типа. Соответствующая часть множества $\mathcal{C}$ описывается системой (12) при $f = H - \sigma L$. Первые три уравнения дают

$$\begin{gathered} w_1 = -\frac{1}{2}(y_1 z_1 - x_1 z_2)\sigma, \qquad w_2 = -\frac{1}{2}(y_2 z_2 - x_2 z_1)\sigma,, \\ w_3 = -\frac{1}{4}(x^2 - y^2 + 4)\sigma. \end{gathered} \tag{15}$$

Для исходных переменных эти равенства выражают тот факт, что движения служат орбитами группы симметрий, т.е. пропорциональность угловой скорости движения угловой скорости вдоль орбиты действия группы:

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_3).$$

Исключая w_j с помощью (15) из уравнений второй группы, полученной из системы (12), находим

$$y_1 = y_2, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} x_1 z_2 u - (y_1 u - 8) z_1 = 0, \\ x_2 z_1 u - (y_2 u - 8) z_2 = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Для сокращения записи обозначено

$$u = \bigl[4 - (n-1)(x^2 - y^2)\bigr]\sigma^2. \tag{18}$$

Отметим, что в соответствии с (16) и (10) здесь $y = y_1 = y_2$.

Система (17) линейна и однородна относительно z_1, z_2. Предположим вначале, что $z_1 = z_2 = 0$. Из (15) получаем $w_1 = w_2 = 0$, а тогда из (11) следует, что выполнено одно из двух: либо $x = 0$, либо $y = 0$. Если $x = 0$, то $y^2 = 4$, и последнее уравнение (15) дает $w_3 = 0$. Это два невырожденных равновесия, изученных выше. В свою очередь, если положить $x \neq 0$, то $y = 0$, $x = 2$. Компонента w_3 остается произвольной. Для переменных в системе (1) имеем $\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\omega} = 2\sigma\mathbf{e}_3$. Эти движения являются равномерными вращениями вокруг третьей оси инерции, которая остается ортогональной плоскости сил, в то время как базисы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и $O\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$ задают противоположную ориентацию в этой плоскости. Значения первых интегралов $h = 2\sigma^2$, $\ell = 4\sigma$ заполняют параболу $h = \ell^2/8$.

Рассмотрим теперь случай $z_1 z_2 \neq 0$. Выразим первые интегралы в переменных (8):

$$
\begin{aligned}
&L = \frac{n}{4}\bigl[(x_2 z_1 - y_2 z_2)w_1 + (x_1 z_2 - y_1 z_1)w_2\bigr] - \frac{1}{4}(x^2 - y^2 + 4)w_3,\\
&H = \frac{1}{2}(n w_1 w_2 + w_3^2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2).
\end{aligned}
$$

Тогда из (15), (16), (11) находим значения

$$
\begin{aligned}
&\ell = \frac{\sigma}{16}\{16 + 8[(n+1)x^2 + (n-1)y^2] - (2n-1)(x^2 - y^2)^2\},\\
&h = -y + \frac{\sigma}{2}\ell,\\
&y = \pm(2 - x), \qquad x \in [0, 2].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Ненулевые решения системы (17) по z_1, z_2 существуют, если

$$
[(x+y)u - 8][(x-y)u + 8] = 0.
$$

Отсюда, подставляя значение u из (18), получаем

$$
\sigma^2 = \frac{\operatorname{sgn} y}{n - (n-1)x} \quad \text{или} \quad \sigma^2 = \frac{\operatorname{sgn} y}{(1-x)[n - (n-1)x]}.
$$

Эти выражения вместе с (19) определяют значения ℓ, h на бифуркационной диаграмме как функции от одного параметра x. Допустимые значения x вырезаются из базового отрезка $[0, 2]$ соответствующим условием $\sigma^2(x) \geqslant 0$.

3. Бифуркационная диаграмма. Обозначим

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = x[2n - (n-1)x],\\
&\varphi_1(x) = n - (n-1)x, \qquad \varphi_2(x) = (1-x)\varphi_1(x),\\
&h_1(x) = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{n+x}{2\varphi_1(x)}, \quad h_2(x) = -\frac{5}{2} + x + \frac{n+x}{2\varphi_2(x)}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Следующая теорема суммирует сказанное выше.

Теорема. *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента для динамически симметричного волчка в S^1-симметричной паре постоянных си-*

ловых полей состоит из следующих подмножеств плоскости (ℓ, h)*:*

$$\begin{aligned}
&\delta_0 = \{P_-, P_+, P_0\}, && \delta_1 = \{\ell = 0 : h \geqslant -2\},\\
&\delta_2 = \{h = \frac{1}{8}\ell^2 : \ell \in \mathbb{R}\}, &&\\
&\delta_3 = \{\ell = \pm\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{\varphi_1(x)}}, && h = h_1(x) : x \in I_3\},\\
&\delta_4 = \{\ell = \pm\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{\varphi_2(x)}}, && h = h_2(x) : x \in I_4\},\\
&\delta_5 = \{\ell = \pm\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{-\varphi_1(x)}}, && h = -h_1(x) : x \in I_5\},\\
&\delta_6 = \{\ell = \pm\frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{-\varphi_2(x)}}, && h = -h_2(x) : x \in I_6\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered}
I_3 = \begin{cases} [0,2], & n < 2 \\ \left[0, \dfrac{n}{n-1}\right], & n \geqslant 2 \end{cases}, \qquad I_4 = \begin{cases} [0,2), & n \leqslant 2 \\ [0,1) \cup \left(\dfrac{n}{n-1}, 2\right], & n > 2 \end{cases},\\
I_5 = \begin{cases} \emptyset, & n \leqslant 2 \\ \left(\dfrac{n}{n-1}, 2\right], & n > 2 \end{cases}, \qquad I_6 = \begin{cases} (1,2], & n < 2 \\ \left(1, \dfrac{n}{n-1}\right), & n \geqslant 2 \end{cases}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Замечание. Очевидно, что $\delta_0 \subset \delta_1$. Однако мы выделяем трехточечное множество δ_0 как порожденное состояниями равновесия тела. Отметим также, что параметр x на кривых $\delta_3 - \delta_6$ равен значению $\sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2}$, которое, тем самым, оказывается постоянным вдоль любой критической траектории.

4. Примеры диаграмм и зависимость от физического параметра. Рассматриваемая система, ее отображение момента и бифуркационная диаграмма зависят от безразмерной характеристики n, выражающей отношение экваториального момента инерции к осевому. Из выражений (21) для сегментов изменения x вдоль бифуркационных кривых следует, что значение $n = 2$, отвечающее случаю Яхья, разделяет принципиально различные типы диаграмм. Нетрудно проверить аналитически, что при $n < 2$ диаграммы не претерпевают качественных изменений. Даже в случае $n = 1$ при наличии некоторых очевидных вырождений в выражениях (20), диаграмма топологически устроена так же, как и при близких значениях n. Типичная диаграмма для $0 < n < 2$ показана на рис. 1 (в силу симметрии относительно оси h иллюстрируется только часть $\ell \geqslant 0$).

Для значений $n > 2$ существует несколько типов бифуркационных диаграмм. Они различаются по количеству узлов (точек пересечения гладких

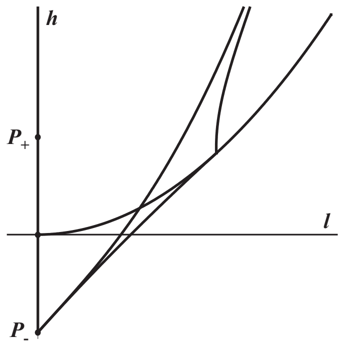

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма при $n < 2$.

отрезков диаграммы, точек возврата и т.п.) и ячеек регулярности (связных компонент множества $\mathbb{R}^2 \backslash \Sigma$). Две диаграммы для случая $n > 2$ вместе с увеличенными фрагментами показаны на рис. 2. Здесь для примера взяты значения *а*) $n = 2.3$; *б*) $n = 4$.

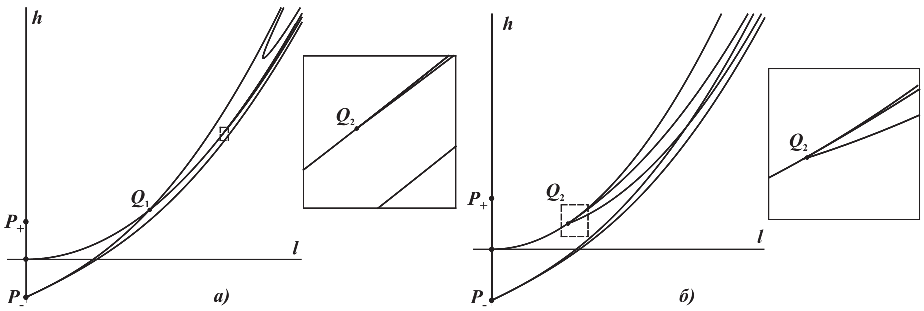

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы при $n > 2$.

Основные разделяющие значения n можно найти аналитически. Рассмотрим, например, точку Q_1 пересечения кривой δ_2 с первой ветвью кривой δ_4 ($x \in [0, 1)$). Она отмечена на рис. 2, *а*. Видно, что при переходе от выбранного случая *а*) к случаю *б*) точка Q_1 исчезает. Соответствующее разделяющее значение параметра n обозначим через n_*. Для того чтобы найти это значение, заметим, что параметр x на кривой δ_4 в точке пересечения с δ_2 есть корень многочлена $P(x) = (n-1)^3 x^3 - 2(n-1)(n+5)x^2 + 4(5n-2)x - 8n$ на полуинтервале $[0, 1)$. Поскольку $P(0) = -8n$ и $P(1) = -(n+1)(n-3)$, пересечение существует для всех $n < n_* = 3$. Результант $P(x)$ и $P'(x)$ равен $256(n-1)^4(n-3)(n^4 - 5n^3 + 18n^2 + 2n + 11)$ и не обращается в нуль при $n > 3$. Следовательно, при $n > 3$ многочлен $P(x)$ имеет единственный вещественный корень, который всегда больше единицы. Итак, точка Q_1 не может возникнуть снова для значений $n > 3$.

На рис. 2 также отмечена всегда существующая при $n > 2$ точка Q_2, в которой встречаются кривые δ_2, δ_5 и вторая ветвь кривой δ_4. Она при некотором n пересекает первую ветвь кривой δ_4. Очевидно, что при этом $Q_2 = Q_1$. Координаты Q_2 легко находятся из уравнений δ_4, δ_5 при $x = 2$:

$$l = \frac{4}{\sqrt{n-2}}, \qquad h = \frac{2}{n-2}.$$

Предположим, что $Q_2 \in \delta_4$ при $x \neq 2$, исключим x и получим уравнение $n^4 - 3n^3 - 5n^2 + 20n - 11 = 0$, которое имеет ровно четыре вещественных корня. Разделяющий случай $Q_2 = Q_1$ отвечает наибольшему корню $n \approx 2.538$.

Итак, в дополнение к значению $n = 2$, при котором система интегрируема в целом, отмечены еще два значения n, когда бифуркационные диаграммы терпят перестройки. В том числе, особым значением является $n = 3$. Возможно, что этому соответствуют некоторые частные случаи интегрируемости.

Заключение. В работе рассмотрено однопараметрическое семейство механических систем с тремя степенями свободы, обладающих S^1-симметрией с нетривиальным множеством особых точек. Получены уравнения бифуркационных диаграмм соответствующих отображений момента. Приведены некоторые примеры перестроек диаграмм, показывающие, что полная классификация всех диаграмм по физическому параметру n может оказаться нетривиальной задачей.

Из работ [2, 9, 10] следует, что дальнейшие обобщения имеют место для задачи о движении динамически симметричного гиростата в двух постоянных полях. Семейство диаграмм будет зависеть уже от двух физических параметров.

Если исключить из фазового пространство критическое интегральное многообразие $L = 0$, то оставшаяся система приводится к двум степеням свободы. Конфигурационное пространство – сфера с выколотой точкой – диффеоморфно $\mathbb{R}^2$. Приведенный потенциал выписать несложно, но для нахождения интегральных многообразий необходимо вычислить индексы его особых точек. Сами особые точки фактически найдены выше. Топологический анализ выходит за рамки настоящей статьи и планируется в дальнейшем для гиростата с интегралом Яхья.

Как уже отмечалось, собственно в случае Яхья ($n = 2$) система допускает еще один интеграл K, найденный в фундаментальной работе О.И. Богоявленского [1] и обобщающий интеграл Ковалевской. В связи с этим, можно ставить задачу об исследовании бифуркационной диаграммы возникающего отображения

$$H \times L \times K : P^6 \to \mathbb{R}^3. \tag{22}$$

Эта диаграмма должна получиться как вырождение общих диаграмм, построенных для волчка Ковалевской–Реймана–Семенова-Тян-Шанского [9] в работе [4], с учетом возникающей связи обобщения интеграла площадей с интегралами H, L. Отметим, что для частного интеграла Богоявленского, указанного им на инвариантном многообразии $M^4 = \{K = 0\}$ (в случае Яхья интеграл Богоявленского совпадает с ограничением L на многообразие M^4), бифуркационная диаграмма отображения $H \times L$ и топология системы с двумя степенями свободы на M^4 при условиях Яхья изучены в работе [11]. Показано, что в этом случае M^4 не является всюду гладким, и выявлены интегральные поверхности с самопересечениями (погруженные многообразия). Исследование отображения (22) позволит получить описание трехмерного слоения Лиувилля в случае Яхья, включающие найденные в [11] нетривиальные бифуркации как бифуркации внутри критических подсистем.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области № 10-01-97001.

1. *Богоявленский О.И.* Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – **48**, 5. – С. 883–938.
2. *Yehia H.M.* 1986 New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, 3. – P. 169–172.
3. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. – 2005. – **10**, 4. – P. 381–398.
4. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
5. *Smale S.* Topology and mechanics // Inventiones Math. – 1970. – **10**, 4. – P. 305–331.
6. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 32–38.
7. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // J. of Phis. A: Math. & Theor. – 2008. – **41**, 275207. – 13 p.
8. *Hassan S.Z., Kharrat B.N., Yehia H.M.* On the stability of the motion of a gyrostat about a fixed point under the action of non-symmetric fields // Eur. J. Mech. A/Solids. – 1997. – **18**. – P. 313–318.
9. *Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функц. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, 2. – С. 87–88.
10. *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. – 2007. – **3**, 3. – С. 331–348.
11. *Зотьев Д.Б.* Фазовая топология волчка Ковалевской в $SO(2)$-симметричном двойном силовом поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 66–71.

Волгоградская академия гос. службы, Россия
sandro@vags.ru

Получено 10.11.09