ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.38

©2009. **Ю.Б. Коносевич**

СКОРОСТЬ УХОДА ДИНАМИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается статически уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе, снабженный синхронным электродвигателем и установленный на неподвижном основании. Изучается влияние малой динамической несимметрии ротора на равномерные вращения ротора вокруг неподвижной оси. Найдена средняя угловая скорость псевдорегулярной прецессии, т. е. скорость ухода гироскопа от заданного направления. В качестве приложения общей формулы ухода рассмотрен случай гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным на вал ротором. Дан числовой пример.

Введение. Изучая влияние начальных возмущений на равномерные вращения идеального уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании, К. Магнус [1], а также Б.Т. Плаймель и Р. Гудстейн [2] установили, что под влиянием возмущений в системе возникают колебания, сопровождающиеся систематическим поворотом (уходом) оси ротора вокруг наружной оси подвеса. Была получена приближенная формула средней угловой скорости ухода. Если учесть трение в осях подвеса, то колебания станут затухающими и систематического ухода не будет. Поэтому представляет интерес изучить влияние вынужденных колебаний на уход гироскопа. Такие колебания могут возникать вследствие динамической несимметрии ротора, колебаний основания, упругости элементов подвеса и по другим причинам.

Д.М. Климов [3] определил скорость систематического ухода гироскопа при вынужденных колебаниях, обусловленных неточной насадкой ротора на вал и возникающей вследствие этого динамической несбалансированностью ротора. В его работе угловая скорость ротора относительно внутренней "рамки", предполагалась постоянной. В действительности при наличии электродвигателя это условие выполнено лишь приближенно. Поэтому представляет интерес определить скорость ухода с учетом влияния электродвигателя. Применяются электродвигатели двух типов: асинхронный и синхронный. Для статически уравновешенного асинхронного гироскопа в кардановом подвесе с динамически несимметричным ротором скорость ухода определил Б.И. Коносевич [4].

Целью данной работы является определение скорости ухода оси ротора для синхронного гироскопа в кардановом подвесе. Для этого используются результаты, полученные в статьях [5, 6].

1. Влияние динамической несимметрии ротора на стационарные движения общего вида. В [5, 6] рассматривалось влияние малой динамической несимметрии ротора на стационарные движения гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании в поле силы тяжести и имеющего вертикальную наружную ось подвеса. Задача о гироскопе в кардановом подвесе рассматривалась в обобщенной постановке [7], берущей начало от работы П.В. Харламова [8]. В этом случае "рамки" подвеса имеют произвольную форму, внутренняя ось подвеса, вообще говоря, неортогональна наружной оси подвеса и оси ротора, и все эти три оси в общем случае не пересекаются в одной точке. Положение системы в каждый момент времени определяют углы α, β, φ, где α – угол поворота наружной рамки относительно основания, β – угол поворота внутренней рамки относительно наружной, φ – угол поворота ротора относительно внутренней рамки. Трение в осях подвеса отсутствует. Внутренняя "рамка" и ротор образуют вместе синхронный электродвигатель.

Алгебраическая сумма вращающего момента синхронного двигателя и момента диссипативных сил относительно оси ротора представляется в виде

$$L = -\lambda_{p1}\gamma - \lambda_{d1}\dot\gamma + \lambda_{p2}\gamma^2 + \lambda_{d2}\dot\gamma^2 + \ldots \quad (\lambda_{p1} > 0,\ \lambda_{d1} > 0), \tag{1}$$

где $\gamma = \varphi - \omega t - \varphi^0,\ \dot\gamma = \dot\varphi - \omega,\ \omega > 0$ – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре электродвигателя.

В случае, когда ротор является динамически симметричным, потенциальная энергия силы тяжести зависит только от угла β: $U = U_0(\beta) = u_0 + u_1\sin\beta + u_2\cos\beta$, и лагранжевы уравнения движения гироскопа принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\Big[G_0(\beta)\dot\alpha + N_0(\beta)\dot\beta + Q_0(\beta)\dot\varphi\Big] = 0,\\
\frac{d}{dt}\Big[N_0(\beta)\dot\alpha + H_0\dot\beta + R_0\dot\varphi\Big] - \dot\alpha\left[\frac{1}{2}G_0'(\beta)\dot\alpha + N_0'(\beta)\dot\beta + Q_0'(\beta)\dot\varphi\right] = -U_0'(\beta),\\
\frac{d}{dt}\Big[Q_0(\beta)\dot\alpha + R_0\dot\beta + C\dot\varphi\Big] = L(\varphi - \omega t - \varphi^0, \dot\varphi).
\end{gathered} \tag{2}$$

Величины G_0, H_0, N_0, Q_0, R_0 являются коэффициентами при произведениях скоростей $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\varphi$ в выражении кинетической энергии системы, C – осевой момент инерции ротора. Штрих означает дифференцирование по β. Система (2) допускает семейство стационарных решений

$$\dot\alpha = \Omega^0,\ \dot\beta = 0,\ \dot\varphi = \omega,\ \beta = \beta^0,\ \varphi = \omega t + \varphi^0, \tag{3}$$

где постоянные Ω^0, β^0 связаны соотношением

$$-\Omega^0\left[\frac{\Omega^0}{2}G_0'(\beta^0) + \omega Q_0'(\beta^0)\right] + U_0'(\beta^0) = 0. \tag{4}$$

Поскольку равенство $U_0'(\beta^0)=0$ выполняется только для двух значений β^0 на периоде функции $U_0(\beta)$, соотношение (4) определяет, как правило, ненулевые значения Ω^0. Следовательно, для гироскопа с вертикальной наружной осью подвеса стационарными движениями в общем случае являются регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса. В работах [5, 6] предполагалось, что выполнено достаточное условие их устойчивости, найденное на основе линеаризованных уравнений движения. Было показано, что при наличии малой динамической несимметрии ротора существует режим псевдорегулярной прецессии, который представляет собой наложение периодических колебаний на регулярную прецессию, близкую к невозмущенной. Этот режим асимптотически устойчив для приведенной системы и аналитически зависит от малого параметра, характеризующего динамическую несимметрию ротора.

Таким образом, если невозмущенным стационарным движением является регулярная прецессия, то под влиянием малой динамической несимметрии ротора это движение переходит в псевдорегулярную прецессию, то есть качественный вид движения не меняется. Если же невозмущенное стационарное движение – это равномерное вращение ротора вокруг неподвижной оси, то под влиянием динамической несимметрии происходит качественное изменение характера движения: вместо равномерного вращения возникает прецессия, сопровождающаяся высокочастотными колебаниями.

Поэтому представляет интерес изучить влияние малой динамической несимметрии ротора на равномерные вращения и получить формулу угловой скорости псевдорегулярной прецессии (или, как говорят, скорости ухода). Для этого вместо предположения о вертикальности наружной оси подвеса в данной работе принимаются условия статической уравновешенности системы. Именно эти условия обеспечивают существование равномерных вращений для гироскопа с динамически симметричным ротором при любом значении внутреннего карданова угла.

2. Формулировка теоремы существования и устойчивости псевдорегулярной прецессии для случая равномерных вращений. Итак, рассмотрим синхронный гироскоп в кардановом подвесе, который установлен на неподвижном основании и является статически уравновешенным относительно осей подвеса и ротора. Его потенциальная энергия $U(\alpha,\beta,\varphi)=\mathrm{const}$. Пусть A_{ij}^3 $(i,j=1,2,3)$ – моменты инерции ротора в связанной с ним системе координат [7].

Предположим, что ротор обладает малой динамической несимметрией относительно оси своего вращения во внутренней “рамке”. Это означает, что отношения величин A_{ij}^3 $(i\neq j)$, $A_{22}^3-A_{33}^3$ к $C=A_{11}^3$ представляются в виде произведений безразмерного малого параметра ε на величины, которые по модулю близки или меньше единицы. Тогда выражение [7] для кинетической энергии системы принимает вид

$$T=\frac{1}{2}\big[G(\beta,\varphi,\varepsilon)\dot\alpha^2+H(\varphi,\varepsilon)\dot\beta^2+C\dot\varphi^2+2N(\beta,\varphi,\varepsilon)\dot\alpha\dot\beta+ \\ +2Q(\beta,\varphi,\varepsilon)\dot\alpha\dot\varphi+2R(\varphi,\varepsilon)\dot\beta\dot\varphi\big]. \tag{5}$$

Для коэффициентов квадратичной формы (5) имеем выражения

$$G(\beta,\varphi,\varepsilon)=G_0(\beta)+\varepsilon g(\beta,\varphi),\quad H(\varphi,\varepsilon)=H_0+\varepsilon h(\varphi),\quad N(\beta,\varphi,\varepsilon)= \\ =N_0(\beta)+\varepsilon n(\beta,\varphi),\quad Q(\beta,\varphi,\varepsilon)=Q_0(\beta)+\varepsilon q(\beta,\varphi),\quad R(\varphi,\varepsilon)=R_0+\varepsilon r(\varphi), \tag{6}$$

где величины, обозначенные малыми латинскими буквами, являются тригонометрическими полиномами относительно β, φ, они ограничены при $\varepsilon\to 0$.

Уравнения движения такого гироскопа допускают интеграл

$$\dot\alpha G(\beta,\varphi,\varepsilon)+\dot\beta N(\beta,\varphi,\varepsilon)+\dot\varphi Q(\beta,\varphi,\varepsilon)=p\quad (p=\mathrm{const}). \tag{7}$$

Из условия (4) следует, что в случае $\varepsilon=0$ уравнения движения статически уравновешенного гироскопа при любом значении β^0 допускают решение

$$\dot\alpha=0,\ \dot\beta=0,\ \dot\varphi=\omega,\ \beta=\beta^0,\ \varphi=\omega t+\varphi^0, \tag{8}$$

которому соответствует режим равномерного вращения ротора.

С учетом интеграла (7) равенство $\dot\alpha=0$, являющееся условием существования режима (8) при данном β^0, эквивалентно равенству

$$p^0-\omega Q_0(\beta^0)=0. \tag{9}$$

Пусть для некоторой пары β^0,p^0 выполнены указанные в [9] условия устойчивости (точнее, условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения приведенной системы, линеаризованной в окрестности соответствующего режима равномерного вращения). Тогда для значений p из некоторого интервала (p_1,p_2), содержащего точку p^0, условие существования равномерных вращений $p-\omega Q_0(\beta)=0$ определяет значения β как непрерывную функцию $\beta=\beta^*(p)$. Поскольку $Q_0(\beta)=q_0+q_1\sin\beta$ $(q_1\neq 0)$, функция $\beta^*(p)$ выражается через арксинус. Уменьшая интервал (p_1,p_2), можно добиться того, чтобы условия устойчивости выполнялись для всех p из интервала (p_1,p_2).

Тогда, на основании теоремы 2 из [6], существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при любых $p\in(p_1,p_2)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ уравнения движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе имеют решение вида

$$\dot\alpha=\varepsilon y_{\dot\alpha}(t,\varepsilon,p),\quad \beta=\beta^*(p)+\varepsilon y_\beta(t,\varepsilon,p),\quad \varphi=\omega t+\varphi^0+\varepsilon y_\varphi(t,\varepsilon,p), \tag{10}$$

где $y_{\dot\alpha},\ y_\beta,\ y_\varphi(t,\varepsilon,p)$ – периодические функции времени периода $2\pi/\omega$, аналитические по ε. Это решение асимптотически устойчиво в классе решений с данным значением постоянной p.

Так как в общем случае среднее значение $< y_{\dot\alpha} >$ периодической функции $y_{\dot\alpha}(t,\varepsilon,p)$ отлично от нуля, то решение (10) описывает псевдорегулярную прецессию ротора вокруг наружной оси подвеса, т. е. регулярную прецессию, сопровождающуюся высокочастотными периодическими колебаниями. Поскольку эта псевдорегулярная прецессия асимптотически устойчива, то к ней при $t\to\infty$ стремится возмущенное движение, в которое переходит исходное равномерное вращение (8) под действием начальных возмущений и возмущений конструктивных параметров, вызывающих динамическую несимметрию ротора. Таким образом, происходит качественное изменение характера движения: вместо того, чтобы сохранять заданное направление, ось ротора отклоняется (или, как говорят, уходит) от этого направления по углу α с постоянной средней угловой скоростью $< \dot\alpha >= \varepsilon < y_{\dot\alpha} >$. Найдем приближенное выражение для угловой скорости ухода $< \dot\alpha >$.

3. Уравнения первого и второго приближения. Для приближенного определения $< \dot\alpha >$ воспользуемся свойствами аналитичности решения (10) по параметру ε и его периодичности по t. В силу аналитичности этого решения оно представляется степенными рядами по ε:

$$\dot\alpha=\varepsilon\dot\alpha_1+\varepsilon^2\dot\alpha_2+...,\quad \beta=\beta^*+\varepsilon\beta_1+\varepsilon^2\beta_2+...,\quad \varphi=\tau+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+...,\tag{11}$$

а в силу его периодичности коэффициенты этих рядов являются периодическими функциями времени периода $2\pi/\omega$. Здесь $\beta^*=\beta^*(p)$, для краткости введено обозначение $\tau=\omega t+\varphi^0$ и опущены аргументы t,p у коэффициентов $\dot\alpha_k,\beta_k,\varphi_k,\ \ k=1,2,...$. Выведем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложений (11). Для этого следует подставить разложения (11) в уравнения (2) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. Первое уравнение возьмем в виде интеграла (7).

Получаем следующую систему уравнений первого приближения

$$\begin{aligned}
&G_{0*}\dot\alpha_1+N_{0*}\dot\beta_1+Q_{0*}\dot\varphi_1+\omega Q'_{0*}\beta_1=-\omega(q_{1*}\cos\tau+q_{2*}\sin\tau),\\
&N_{0*}\ddot\alpha_1+H_0\ddot\beta_1+R_0\ddot\varphi_1-\omega Q'_{0*}\dot\alpha_1=\omega^2(r_1\sin\tau-r_2\cos\tau),\\
&Q_{0*}\ddot\alpha_1+R_0\ddot\beta_1+C\ddot\varphi_1+\lambda_{d1}\dot\varphi_1+\lambda_{p1}\varphi_1=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Здесь и далее индексом звездочка (*) обозначены функции угла β, взятые при $\beta = \beta^*(p)$. Система уравнений второго приближения имеет вид

$$
\begin{aligned}
&G_{0*}\dot\alpha_2 + N_{0*}\dot\beta_2 + Q_{0*}\dot\varphi_2 + \omega Q'_{0*}\beta_2 = \\
&\qquad = -\{G'_{0*}\beta_1\dot\alpha_1 + g_*(\tau)\dot\alpha_1 + N'_{0*}\beta_1\dot\beta_1 + n_*(\tau)\dot\beta_1 + Q'_{0*}\beta_1\dot\varphi_1 + q_*(\tau)\dot\varphi_1 + \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\omega\beta_1^2 Q''_{0*} + \omega\beta_1 q'_*(\tau) + \omega\varphi_1 q_{\varphi*}(\tau)\},\\
&N_{0*}\ddot\alpha_2 + H_0\ddot\beta_2 + R_0\ddot\varphi_2 - \omega Q'_{0*}\dot\alpha_2 = \\
&\qquad = -\frac{d}{dt}\Big[N'_{0*}\beta_1\dot\alpha_1 + n_*(\tau)\dot\alpha_1 + h(\tau)\dot\beta_1 + r(\tau)\dot\varphi_1 + \omega r_\varphi(\tau)\varphi_1\Big] + \\
&\qquad\quad + \dot\alpha_1\Big(\frac{1}{2}G'_{0*}\dot\alpha_1 + N'_{0*}\dot\beta_1 + Q'_{0*}\dot\varphi_1 + \omega Q''_{0*}\beta_1 + \omega q'_{1*}\cos\tau + \omega q'_{2*}\sin\tau\Big),\\
&Q_{0*}\ddot\alpha_2 + R_0\ddot\beta_2 + C\ddot\varphi_2 + \lambda_{d1}\dot\varphi_2 + \lambda_{p1}\varphi_2 = -\frac{d}{dt}\Big[Q'_{0*}\beta_1\dot\alpha_1 + q_*(\tau)\dot\alpha_1 + r(\tau)\dot\beta_1\Big] + \\
&\qquad\qquad + \omega\big(q_{\varphi*}(\tau)\dot\alpha_1 + r_\varphi(\tau)\dot\beta_1\big) + \lambda_{d2}\dot\varphi_1^2 + \lambda_{p2}\varphi_1^2.
\end{aligned} \tag{13}
$$

4. Периодическое решение уравнений первого приближения. Найдем периодическое по t с периодом $2\pi/\omega$ решение системы первого приближения (12). Оно имеет структуру правых частей этой системы, т. е. представляется в виде суммы произведений постоянных коэффициентов на $\cos\tau$ и $\sin\tau$. Запишем это решение в комплексной форме

$$
\dot\alpha_1 = a_{-1}e^{-i\tau} + a_1 e^{i\tau}, \quad \beta_1 = b_{-1}e^{-i\tau} + b_1 e^{i\tau}, \quad \varphi_1 = c_{-1}e^{-i\tau} + c_1 e^{i\tau}. \tag{14}
$$

Так как это решение действительно, то постоянные комплексные коэффициенты в формулах (14) связаны соотношениями

$$
a_1 = \overline{a}_{-1}, \qquad b_1 = \overline{b}_{-1}, \qquad c_1 = \overline{c}_{-1}. \tag{15}
$$

Коэффициенты в решении (14) уравнений (12) по правилу Крамера выражаются формулами

$$
a_{-1} = \overline{a}_1 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} \omega(-q_{1*} - iq_{2*}) & \omega(Q'_{0*} - iN_{0*}) & -i\omega Q_{0*} \\ \omega^2(r_2 - ir_1) & \omega^2 H_0 & \omega^2 R_0 \\ 0 & \omega^2 R_0 & \omega^2 C - \lambda_{p1} + i\omega\lambda_{d1} \end{vmatrix},
$$

$$
b_{-1} = \overline{b}_1 = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} G_{0*} & \omega(-q_{1*} - iq_{2*}) & -i\omega Q_{0*} \\ \omega(Q'_{0*} + iN_{0*}) & \omega^2(r_2 - ir_1) & \omega^2 R_0 \\ i\omega Q_{0*} & 0 & \omega^2 C - \lambda_{p1} + i\omega\lambda_{d1} \end{vmatrix}, \tag{16}
$$

$$c_{-1}=\overline{c}_1=\frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} G_{0*} & \omega(Q'_{0*}-iN_{0*}) & \omega(-q_{1*}-iq_{2*}) \\ \omega(Q'_{0*}+iN_{0*}) & \omega^2 H_0 & \omega^2(r_2-ir_1) \\ i\omega Q_{0*} & \omega^2 R_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$\Delta=\omega^4\Big[J_*-CQ'^2_{0*}+\frac{\lambda_{p1}}{\omega^2}\big(Q'^2_{0*}-J_{1*}\big)+i\frac{\lambda_{d1}}{\omega}\big(J_{1*}-Q'^2_{0*}\big)\Big]; \qquad (17)$$

через J_*, J_{1*} обозначены величины

$$J=\begin{vmatrix} G_0 & N_0 & Q_0 \\ N_0 & H_0 & R_0 \\ Q_0 & R_0 & C \end{vmatrix}, \qquad J_1=G_0H_0-N_0^2, \qquad (18)$$

взятые при $\beta=\beta^*(p)$. Величины $q_1(\beta)$, $q_2(\beta)$, r_1, r_2, входящие в формулы (16), возникают при введении малого параметра в формулы для Q, R:

$$Q=Q_0(\beta)+Q_1(\beta)\cos\varphi+Q_2(\beta)\sin\varphi=Q_0(\beta)+\varepsilon[q_1(\beta)\cos\varphi+q_2(\beta)\sin\varphi],$$
$$R=R_0+R_1\cos\varphi+R_2\sin\varphi=R_0+\varepsilon[r_1\cos\varphi+r_2\sin\varphi]. \qquad (19)$$

5. Угловая скорость ухода. Перейдем к уравнениям второго приближения (13). Решение этих уравнений с периодом $2\pi/\omega$ имеет структуру их правых частей, т. е.

$$\dot\alpha_2=a_0+a_{-2}e^{-2i\tau}+a_2e^{2i\tau}, \quad \beta_2=b_0+b_{-2}e^{-2i\tau}+b_2e^{2i\tau},$$
$$\varphi_2=c_0+c_{-2}e^{-2i\tau}+c_2e^{2i\tau} \qquad (a_{-2}=\overline{a}_2,\ b_{-2}=\overline{b}_2,\ c_{-2}=\overline{c}_2). \qquad (20)$$

Коэффициенты a_{-2}, b_{-2}, c_{-2} определяются таким же способом, как и коэффициенты a_{-1}, b_{-1}, c_{-1} в решении первого приближения.

В результате получаем во втором приближении периодическое решение уравнений движения в виде

$$\dot\alpha=\varepsilon^2a_0+\varepsilon\big(a_{-1}e^{-i\tau}+a_1e^{i\tau}\big)+\varepsilon^2\big(a_{-2}e^{-2i\tau}+a_2e^{2i\tau}\big),$$
$$\beta=\beta^*+\varepsilon^2b_0+\varepsilon\big(b_{-1}e^{-i\tau}+b_1e^{i\tau}\big)+\varepsilon^2\big(b_{-2}e^{-2i\tau}+b_2e^{2i\tau}\big), \qquad (21)$$
$$\varphi=\tau+\varepsilon^2c_0+\varepsilon\big(c_{-1}e^{-i\tau}+c_1e^{i\tau}\big)+\varepsilon^2\big(c_{-2}e^{-2i\tau}+c_2e^{2i\tau}\big).$$

Оно описывает псевдорегулярную прецессию ротора относительно наружной оси подвеса. Угловая скорость этой псевдорегулярной прецессии (скорость систематического ухода гироскопа) равна среднему значению величины $\dot{\alpha}$, т. е. $<\dot{\alpha}>=\varepsilon^2 a_0$.

Найдем явное выражение скорости ухода. Для этого достаточно определить постоянный член в разложении правой части второго уравнения (13) по $e^{in\tau}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,...)$. Получаем

$$<\dot{\alpha}>=$$

$$=-\varepsilon^2\frac{2}{\omega Q'_{0*}}\mathrm{Re}\,a_{-1}\Big[\frac{1}{2}G'_{0*}a_1+\omega\big(Q''_{0*}+iN'_{0*}\big)b_1+i\omega Q'_{0*}c_1+\frac{1}{2}\omega\big(q'_{1*}-iq'_{2*}\big)\Big]. \quad (22)$$

Чтобы записать этот результат в компактном виде через определители, представим выражение, заключенное в формуле (22) в квадратные скобки, как разложение определителя четвертого порядка по верхней строке. Переходя к исходным обозначениям (без параметра ε), получаем следующую формулу для угловой скорости систематического ухода динамически несимметричного синхронного гироскопа в кардановом подвесе

$$<\dot{\alpha}>=-\frac{\omega}{2Q'_{0*}D}\mathrm{Re}\begin{vmatrix} Q_{2*}-iQ_{1*} & N_{0*}+iQ'_{0*} & Q_{0*} \\ R_2-iR_1 & H_0 & R_0 \\ 0 & R_0 & C-\dfrac{\lambda_{p1}}{\omega^2}+i\dfrac{\lambda_{d1}}{\omega} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \frac{1}{2}G'_{0*} & N'_{0*}-iQ''_{0*} & Q'_{0*} & Q'_{2*}+iQ'_{1*} \\ G_{0*} & N_{0*}-iQ'_{0*} & Q_{0*} & Q_{2*}+iQ_{1*} \\ N_{0*}+iQ'_{0*} & H_0 & R_0 & R_2+iR_1 \\ Q_{0*} & R_0 & C-\dfrac{\lambda_{p1}}{\omega^2}-i\dfrac{\lambda_{d1}}{\omega} & 0 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Здесь

$$D=\Big[J_*-CQ'^2_{0*}+\frac{\lambda_{p1}}{\omega^2}\big(Q'^2_{0*}-J_{1*}\big)\Big]^2+\frac{\lambda^2_{d1}}{\omega^2}\big(J_{1*}-Q'^2_{0*}\big)^2. \quad (24)$$

Члены формул (6), отмеченные нулевым нижним индексом, не зависят от параметров A^3_{ij} $(i\neq j)$, $A^3_{22}-A^3_{33}$, характеризующих динамическую несимметрию ротора. Вследствие этого динамическая несимметрия ротора входит в формулу угловой скорости ухода (23) только через элементы первого столбца определителя третьего порядка и элементы последнего столбца определителя четвертого порядка. Такие элементы выражаются через величины $Q_1(\beta)$, $Q_2(\beta)$, R_1, R_2, которые представляются формулами [7]:

$$\begin{aligned} &Q_1(\beta)=-A^3_{12}\sin\theta^3\cos\theta^2+A^3_{13}\sin\theta^2\cos\beta+A^3_{12}\cos\theta^3\sin\theta^2\sin\beta,\\ &Q_2(\beta)=A^3_{13}\sin\theta^3+A^3_{12}\sin\theta^2\cos\beta-A^3_{13}\sin\theta^2\cos\theta^3\sin\beta, \qquad (25)\\ &R_1=-A^3_{12}\sin\theta^3,\quad R_2=A^3_{13}\sin\theta^3, \end{aligned}$$

где θ^2, θ^3 – углы, образованные внутренней осью подвеса с наружной осью подвеса и осью ротора. Разность $A^3_{22} - A^3_{33}$ не входит в выражения (24). Величина A^3_{23} также не входит в эти выражения. Отсюда следует, что в рассматриваемом приближении уход гироскопа возникает только благодаря тому, что хотя бы одна из величин A^3_{12}, A^3_{13} отлична от нуля. Но любую из этих величин можно сделать равной нулю за счет дополнительного поворота связанной с ротором системы координат (поворот осуществляется вокруг оси ротора). Пусть, например, $A^3_{13} = 0$. Тогда из всех параметров, характеризующих динамическую несимметрию ротора, в формуле ухода (23) остается только A^3_{12}.

6. Пример применения общей формулы ухода. Пользуясь формулой (23), можно получать развернутые аналитические формулы угловой скорости ухода для систем, отличающихся от обычной модели гироскопа в кардановом подвесе наличием малой динамической несимметрии ротора (которая характеризуется величиной A^3_{12}) и отдельными конструктивными несовершенствами (непересечение и неортогональность осей подвеса и ротора, несимметрия внутренней “рамки”, смещение центров масс наружной и внутренней “рамок” с их осей вращения).

Предположим, что указанные несовершенства малы. Тогда каждая из величин с нулевым нижним индексом в формуле (23) представится в виде суммы аналогичной величины для обычной модели гироскопа в кардановом подвесе и малой добавки, зависящей от конструктивных несовершенств. Согласно (25), каждая из величин с индексом 1 или 2 в формуле (23) представится в виде суммы ведущего члена, который является малым вследствие малости величины A^3_{12}, и добавочного члена более высокого порядка малости. В результате вклад рассматриваемых конструктивных несовершенств в угловую скорость ухода оказывается величиной более высокого порядка малости, чем главный член формулы (23). Этот главный член описывает уход гироскопа, который отличается от обычно рассматриваемой модели только тем, что для него $A^3_{12} \neq 0$. Найдем аналитическое выражение скорости ухода для такого гироскопа.

Для обычной модели гироскопа в кардановом подвесе имеем

$$\begin{gathered}
\theta^2 = \theta^3 = \pi/2, \quad A^2_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad A^3_{11} = C, \quad c = 0, \\
\boldsymbol{c}^1 = \left(c^1_1, c^1_2, c^1_3\right) = 0, \quad \boldsymbol{c}^2 = \left(c^2_1, c^2_2, c^2_3\right) = 0, \\
\boldsymbol{s}^1 = \left(0, s^1_2, s^1_3\right) = 0, \quad \boldsymbol{s}^2 = \left(0, s^2_2, s^2_3\right) = 0.
\end{gathered} \tag{26}$$

В рассматриваемом случае использование многоиндексных обозначений для моментов инерции неоправданно. Поэтому воспользуемся более простыми обозначениями

$$A^1_{11} = C_2, \quad A^2_{11} = A_1, \quad A^2_{33} = B_1, \quad A^2_{22} = C_1, \quad A^3_{22} = A, \quad A^3_{12} = E. \tag{27}$$

Полагаем для краткости $I_0 = C_2 + B_1 + C,\ I = C_1 + A - B_1 - C$. Тогда, воспользовавшись формулами, приведенными в [7], получаем

$$G_0(\beta) = I_0 + I\cos^2\beta, \quad H_0 = A_1 + A, \quad N_0(\beta) = 0, \quad Q_0(\beta) = C\sin\beta,$$
$$R_0 = 0, \quad Q_1(\beta) = 0, \quad Q_2(\beta) = E\cos\beta, \quad R_1 = -E, \quad R_2 = 0.$$

В результате формула ухода (23) принимает вид

$$< \dot\alpha >= -\frac{\omega E^2(A_1 + A + C)^2}{2CD_*}\Bigg[\Bigg(\Big(\frac{\lambda_{p1}}{\omega^2} - C\Big)^2 + \frac{\lambda_{d1}^2}{\omega^2}\Bigg)(C_2 + B_1 + C) + \\ + C^2\Big(\frac{\lambda_{p1}}{\omega^2} - C\Big)\Bigg]\sin\beta^*, \tag{28}$$

где величина D_* выражается формулой

$$D_* = \Big[J_* - C^3\cos^2\beta^* - \frac{\lambda_{p1}}{\omega^2}\big(J_{1*} - C^2\cos^2\beta^*\big)\Big]^2 + \frac{\lambda_{d1}^2}{\omega^2}\big(J_{1*} - C^2\cos^2\beta^*\big)^2.$$

Как отмечалось выше, псевдорегулярная прецессия является асимптотически устойчивой при данном значении p, если выполнены условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения приведенной системы, линеаризованной в окрестности равномерного вращения $\dot\alpha = 0,\ \beta = \beta^*(p),\ \varphi = \omega t + \varphi^0$. Для обычной модели гироскопа в кардановом подвесе эти условия принимают вид неравенств $Q'_{0*} \neq 0,\ Q_{0*} \neq 0$. Согласно (19), эти неравенства выполняются на промежутке $[-\pi/2,\ 3\pi/2]$ для значений $\beta^* \neq \pm\pi/2,\ 0,\ \pi$.

Рассмотренный случай реализуется при неточной насадке динамически симметричного ротора на вал. Если полярная ось инерции ротора составляет с осью вала малый угол δ, то приближенно $E = \delta(A - C)$ [3].

Параметр λ_{p1}, входящий в формулу (28), характеризует жесткость магнитной связи между вращающимся магнитным полем статора и магнитным полем ротора синхронного электродвигателя. Параметр λ_{d1} характеризует момент сил трения относительно оси ротора при отклонении его угловой скорости от ω. В пределе при $\lambda_{p1}, \lambda_{d1} \to \infty$ формула (28) переходит в формулу, которая при условии $\dot\varphi = \omega = \mathrm{const}$ получена в [5] для гироскопа с неаксиально насаженным на вал ротором.

7. Числовой пример. Рассмотрим числовой пример. За основу возьмем числовые значения параметров гироскопа в кардановом подвесе из работы [10]. Полагаем

$$\delta = 0.1^\circ, \quad \beta^* = 30^\circ, \quad \omega = 1500\ \text{с}^{-1}, \quad A = 3\cdot 10^3\ \text{г}\cdot\text{см}^2, \quad C = 5\cdot 10^3\ \text{г}\cdot\text{см}^2,$$
$$A_1 = 2\cdot 10^3\ \text{г}\cdot\text{см}^2,\ B_1 = 2\cdot 10^3\ \text{г}\cdot\text{см}^2,\ C_1 = 4\cdot 10^3\ \text{г}\cdot\text{см}^2,\ C_2 = 3\cdot 10^3\ \text{г}\cdot\text{см}^2.$$

Тогда при $\lambda_{p1} = 3.691 \cdot 10^{10}$ г $\cdot$ см$^2 \cdot$ с$^{-2}$, $\lambda_{d1} = 4.019 \cdot 10^5$ г $\cdot$ см$^2 \cdot$ с$^{-1}$ по формуле (28) вычисляем скорость ухода $< \dot\alpha >= -9.644 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$. Для сравнения отметим, что при выбранных значениях моментов инерции и угла β^* скорость ухода по Климову равна $< \dot\alpha >_\infty = -9.36 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$.

1. *Magnus K.* Beiträge zur Dynamik des Kraftefreien kardanisch gelagerten Kreisels // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanic. – 1955. – **35**, № 1/2. – P. 83–91.
2. *Plymale B.T., Goodstein R.* Nutation of a free gyro subjected to an impulse // Transactions of ASME. J. Appl. Mech. – 1955. – **22**, № 3. – P. 365–376.
3. *Климов Д.М.* О движении астатического гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным ротором // Докл. АН СССР. – 1959. – **124**, № 3. – С. 29–32.
4. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода динамически неуравновешенного асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 121–126.
5. *Болграбская И.А., Коносевич Ю.Б.* Влияние динамической несимметрии ротора на стационарные движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Тр. ИПММ НАНУ. – 2006. – **13**. – С. 12–18.
6. *Болграбская И.А., Коносевич Ю.Б.* Устойчивость псевдорегулярных прецессий синхронного гироскопа в кардановом подвесе, имеющего динамически несимметричный ротор // Там же. – 2007. – **14**. – С. 30–40.
7. *Коносевич Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 82–92.
8. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Там же. – 1972. – Вып. 4. – С. 73–82.
9. *Коносевич Ю.Б.* Условия устойчивости стационарных режимов движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 87–93.
10. *Харламов С.А.* О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента вокруг оси собственного вращения // Докл. АН СССР. – 1961. – **139**, № 2. – С. 83–86.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 15.09.09