ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.38

©2009. **М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева**

УРАВНЕНИЯ АКСОИДОВ В ОПОРНОМ БАЗИСЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

Если момент количества движения системы тел, сохраняющий направление в пространстве, отличен от нуля, то его можно использовать для построения неподвижных аксоидов. Существует решение, характеризуемое нулевым значением момента количества движения системы. Для этого решения, следуя [1], введен опорный базис на траектории центра сферического шарнира. Найдены кривизна и кручение траектории, скорость каждого из тел относительно опорного базиса. Впервые построены аксоиды тел в опорном базисе. Записаны уравнения подвижных аксоидов тел.

В пятой главе монографии [2] дана постановка задачи о движении по инерции двух динамически осесимметричных тел, сочлененных упругим сферическим шарниром. Там же приведены кинематические и динамические характеристики системы тел и шесть форм уравнений движения. Нам понадобятся из них две формы уравнений движения, которые мы приведем здесь.

Исходные соотношения. Первая форма уравнений движения[1] $(5.38)_*-(5.40)_*$ имеет вид

$$\dot G_1+\omega_2G_3-\omega_3G_2=0,\quad \dot G_2+\omega_3G_1-\omega_1G_3=0,\quad \dot G_3+\omega_1G_2-\omega_2G_1=0. \tag{1}$$

Здесь компоненты G_i момента количества движения $\mathbf{g}=G_1\mathbf{e}_1+G_2\mathbf{e}_2+G_3\mathbf{e}_3$ системы тел в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ даны соотношениями $(5.15)_*-(5.17)_*$

$$G_1=(A-N\cos\theta)\omega_1+(A_0-N\cos\theta)\Omega_1, \tag{2}$$

$$G_2=(A-N\cos\theta)\omega_2+(A_0\cos\theta-N)\Omega_2-n_0\sin\theta, \tag{3}$$

$$G_3=(A_0\Omega_2-N\omega_2)\sin\theta+n+n_0\cos\theta. \tag{4}$$

Из второй формы уравнений движения приведем здесь $(5.43)_*, (5.44)_*$, $(5.6)_*$, $(5.11)_*$

$$A_0\Big(\dot\Omega_1-\Omega_2\Omega_3\Big)+n_0\Omega_2=-\Pi'(\theta)+N\Big[(\omega_1^2+\omega_2^2)\sin\theta+\Big(\dot\omega_1-\omega_2\omega_3\Big)\cos\theta\Big], \tag{5}$$

$$A_0\Big(\Omega_2+\Omega_3\Omega_1\Big)-n_0\Omega_1=N\Big(\dot\omega_2+\omega_3\omega_1\Big), \tag{6}$$

$$\dot\theta=\Omega_1-\omega_1, \tag{7}$$

[1]Номера уравнений работы [2] снабжены звездочкой.

$$J\Big(\omega_3 + \dot{\varphi}\Big) = n, \qquad J_0\Big(\Omega_3 + \dot{\Phi}\Big) = n_0. \tag{8}$$

Рассмотрим указанное в [2, гл. 10] решение, характеризуемое нулевым значением постоянной момента количества движения системы тел: $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Предположим, что одно из тел системы закреплено в центре масс

$$N = 0. \tag{9}$$

Тогда при ограничении (9) компоненты (2)–(4) таковы:

$$G_1 = A\omega_1 + A_0\Omega_1 = 0, \tag{10}$$

$$G_2 = A\omega_2 + A_0\Omega_2\cos\theta - n_0\sin\theta = 0, \tag{11}$$

$$G_3 = A_0\Omega_2\sin\theta + n + n_0\cos\theta = 0. \tag{12}$$

Из соотношений (10)–(12) находим

$$\omega_1 = -\frac{A_0\Omega_1}{A}, \tag{13}$$

$$\omega_2 = \frac{n_0 + n\cos\theta}{A\sin\theta}, \tag{14}$$

$$\Omega_2 = -\frac{n_0\cos\theta + n}{A_0\sin\theta}. \tag{15}$$

Запишем уравнения (5), (6) при ограничении (9)

$$\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\Omega_3 = -\frac{n_0}{A_0}\Omega_2 - \frac{\Pi'(\theta)}{A_0}, \tag{16}$$

$$\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1 = \frac{n_0}{A_0}\Omega_1. \tag{17}$$

Умножая первое уравнение на Ω_1, второе – на Ω_2 и складывая, получим

$$\dot{\Omega}_1\Omega_1 + \dot{\Omega}_2\Omega_2 = -\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}\Omega_1. \tag{18}$$

Вместо Ω_2 введем новую переменную σ:

$$\sigma^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2, \tag{19}$$

тогда уравнение (18) принимает вид

$$\sigma\dot{\sigma} = -\frac{\Pi'(\theta)}{A_0}\Omega_1. \tag{20}$$

Подставив (13) в (7), получим

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega_1}{k_*}, \tag{21}$$

где введен новый параметр $k_* = \dfrac{A}{A + A_0}$ $(0 < k_* < 1)$.

В уравнении (20) перейдем от дифференцирования по t к дифференцированию по θ, с учетом (21) получим

$$\sigma\sigma' = -\frac{\Pi'(\theta) k_*}{A_0} \tag{22}$$

(предполагаем, что Ω_1 отлично от нуля).

Так как в этом решении $\Pi(\theta)$ является произвольной дифференцируемой функцией, можно ее конкретизировать, например, так: $\Pi(\theta) = -c^2 \cos\theta$, тогда уравнение (22) запишем в виде $\sigma\sigma' = -\dfrac{c^2 k_* \sin\theta}{A_0}$. В результате интегрирования получим

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 (1 + b\cos\theta), \tag{23}$$

где введен безразмерный параметр $b = \dfrac{2k_* c^2}{A_0 \sigma_0^2}$, а σ_0^2 – постоянная интегрирования.

Вместо переменной θ введем переменную u

$$u = \cos\theta \tag{24}$$

и запишем $\omega_2, \Omega_2, \sigma, \Omega_1$ как функции u. Для этого подставим (24) в (14), (15), (23), (19):

$$\omega_2 = \frac{n_0 + nu}{A\sqrt{1 - u^2}}, \tag{25}$$

$$\Omega_2 = \frac{-(n_0 u + n)}{A_0\sqrt{1 - u^2}}, \tag{26}$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 (1 + bu), \tag{27}$$

$$\Omega_1^2 = \frac{\sigma_0^2 (1 + bu)(1 - u^2) - (n_0 u + n)^2 / A_0^2}{1 - u^2}. \tag{28}$$

Заменой $n_0 = A_0 \sigma_0 n_0^*, n = A_0 \sigma_0 n^*$ преобразуем выражение $\sigma_0^2(1 + bu)(1 - u^2) - (n_0 u + n)^2/A_0^2$ к такому виду: $A_0^2 \sigma_0^2 \big[(1 + bu)(1 - u^2) - (n_0^* u + n^*)^2\big] = A_0^2 \sigma_0^2 P_3(u)$, где $P_3(u) = (1 + bu)(1 - u^2) - (n_0^* u + n^*)^2$. $P_3(\pm 1) = -(n^* \pm n_0^*)^2 < 0$ при $u = \pm 1$ и $P_3(0) = 1 - (n^*)^2$ при $u = 0$. Если постоянная $(n^*)^2 < 1$, то всегда существует интервал, содержащий точку $u = 0$, в котором это выражение больше нуля.

Умножим обе части уравнения (21) на $\sin\theta$, учтем замену (24), получим

$$\dot{u} = -\frac{1}{k_*}\frac{\Omega_1(u)}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{29}$$

Подставив (28) в (29), установим зависимость времени t от переменной u

$$\sigma_0(t-t_0) = -k_*\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{(1+bu)(1-u^2)-(n_0u+n)^2/A_0^2\sigma_0^2}}. \tag{30}$$

Отметим, что $\sigma_0(t-t_0)$ есть безразмерное время.

Соотношениями (26), (27) и (13), (25), (8) заданы годографы тел S_0 и S в полуподвижных базисах. Чтобы найти годографы тел в неизменно связанных с телами базисах, необходимо определить углы собственных вращений φ, Φ.

Перепишем уравнения (8) в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{n}{J} - \omega_3, \tag{31}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{n_0}{J_0} - \Omega_3, \tag{32}$$

где Ω_3, ω_3 определены в [2] соотношениями $(5.55)_*$

$$\omega_3 = (\Omega_2 - \omega_2\cos\theta)/\sin\theta, \tag{33}$$

$$\Omega_3 = (\Omega_2\cos\theta - \omega_2)/\sin\theta. \tag{34}$$

Внесем (24)–(26) в (33), (34), определим $\Omega_3(u), \omega_3(u)$:

$$\omega_3(u) = \frac{n}{A} - \frac{n_0u+n}{A_0k_*(1-u^2)}, \tag{35}$$

$$\Omega_3(u) = \frac{n_0}{A_0} - \frac{nu+n_0}{A_0k_*(1-u^2)}. \tag{36}$$

Подставив соотношения (35), (36) в уравнения (31), (32), получим

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{1}{J}-\frac{1}{A}\right)n + \frac{n_0u+n}{A_0k_*(1-u^2)},$$

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{1}{J_0}-\frac{1}{A_0}\right)n_0 + \frac{nu+n_0}{A_0k_*(1-u^2)}.$$

При интегрировании этих уравнений с учетом (29) находим углы собственных вращений тел S_0, S:

$$\varphi-\varphi_0 = \left(\frac{1}{J}-\frac{1}{A}\right)nt - \int\limits_{u_0}^{u}\frac{(n_0u+n)du}{(1-u^2)\sqrt{A_0^2\sigma_0^2(1+bu)(1-u^2)-(n_0u+n)^2}}, \tag{37}$$

$$\Phi - \Phi_0 = \left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n_0 t - \int\limits_{u_0}^{u} \frac{(nu+n_0)du}{(1-u^2)\sqrt{A_0^2\sigma_0^2(1+bu)(1-u^2)-(n_0u+n)^2}}. \tag{38}$$

Основные переменные отнесены к полуподвижным базисам, а необходимо иметь кинематические характеристики в базисах, неизменно связанных с телами.

Неизменный в S базис $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ соотношениями $(5.30)_*$

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi, \qquad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3 \tag{39}$$

и для компонент $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1^*\mathbf{e}_1^* + \omega_2^*\mathbf{e}_2^* + \omega_3^*\mathbf{e}_3^*$ получаем значения

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi, \qquad \omega_3^* = n/J. \tag{40}$$

Неизменный в S_0 базис $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ связан с $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ соотношениями [2] $(5.35)_*$

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1\cos\Phi + \mathbf{e}_2^0\sin\Phi, \qquad \mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2^0\cos\Phi, \qquad \mathbf{e}_3^{0*} = \mathbf{e}_3^0 \tag{41}$$

и для компонент $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*$ угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_*$ тела S_0 имеем

$$\Omega_1^* = \Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1\sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi, \quad \Omega_3^* = n_0/J_0 \tag{42}$$

($\omega_3^* = \omega_3 + \dot\varphi = n/J, \quad \Omega_3^* = \Omega_3 + \dot\Phi = n_0/J_0$ – следствие циклических интегралов (8)).

Так как $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и φ известны как функции переменной u, то подставив (13), (25), (35), (37) в (40), сможем найти компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$ тела S. Аналогично, подставив (28), (26), (36), (38) в (42), сможем определить компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_*$ тела S_0.

Опорный базис. Для построения аксоидов в работах [3 – 2] использовались две системы координат: одна – неизменно связанная с движущимся телом, а другая – выбрана в неподвижном пространстве. В этих работах фигурировал неподвижный в пространстве вектор, компоненты которого по отношению к движущимся осям определялись в зависимости от времени (или вспомогательной переменной) вместе с компонентами угловой скорости тела в этих осях. Иногда в прикладных задачах возникает необходимость изучать движение тела по отношению к осям, которые в свою очередь движутся в неподвижном пространстве. В работе [1] выделен случай, когда движущаяся опорная система координат, определена естественным базисом на траектории одной из точек движущегося тела.

В случае нулевого значения момента количества движения системы тел, при решении задачи отсутствует имеющий физический смысл вектор, фиксированный в неподвижном пространстве и задаваемый своими компонентами в осях, связанных с телом. Однако в осях, связанных с телом, определен вектор абсолютной скорости точки O (центра сферического шарнира), и это дает возможность строить полное решение на основе метода работы [1].

В монографии [2] указаны радиус-вектор $\mathbf{r}_*$, скорость $\mathbf{v}_*$ и ускорение $\mathbf{w}_*$ точки O. При обращении в нуль параметра $N = \dfrac{mm_0}{m+m_0}\, l\, l_0$, определяемого $(5.13)_*$, необходимо рассматривать два варианта

$$l = 0, \tag{43}$$

$$l_0 = 0. \tag{44}$$

При этом обращается в нуль один из параметров $(5.23)_*$

$$a = \frac{ml}{m+m_0}, \qquad a_0 = \frac{m_0 l_0}{m+m_0}\,.$$

Из двух возможностей (43), (44) выбираем первую

$$a = 0 \tag{45}$$

(вторая рассматривается аналогично).

Запишем векторы $\mathbf{r}_*, \mathbf{v}_*, \mathbf{w}_*$ по формулам $(5.22)_*, (5.24)_*, (5.27)_* - (5.29)_*$ при ограничении (45)

$$\mathbf{r}_* = -a_0\mathbf{e}_3^0,$$

$$\mathbf{v}_* = a_0(-\Omega_2\mathbf{e}_1 + \Omega_1\mathbf{e}_2^0), \tag{46}$$

$$\mathbf{w}_* = a_0\Big\{-\Big(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1\Big)\mathbf{e}_1 + \Big(\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\Omega_3\Big)\mathbf{e}_2^0 + \big(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\big)\mathbf{e}_3^0\Big\}. \tag{47}$$

Подставив (16), (17), (19), (22) в (47) определим $\mathbf{w}_*$:

$$\mathbf{w}_* = a_0\Big[-\frac{n_0}{A_0}\Omega_1\mathbf{e}_1 + \Big(\frac{\sigma\sigma'}{k_*} - \frac{n_0}{A_0}\Omega_2\Big)\mathbf{e}_2^0 + \sigma^2\mathbf{e}_3^0\Big]. \tag{48}$$

В дальнейшем потребуется вектор $\dot{\mathbf{w}}_*$

$$\dot{\mathbf{w}}_* = \dot{w}_1\mathbf{e}_1 + \dot{w}_2^0\mathbf{e}_2^0 + \dot{w}_3^0\mathbf{e}_3^0 + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{w}_*, \tag{49}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \Omega_3\mathbf{e}_3^0. \tag{50}$$

Продифференцировав w_1, w_2^0, w_3^0, из (48) находим

$$\dot{w}_1 = -\frac{a_0 n_0\dot{\Omega}_1}{A_0}, \quad \dot{w}_2 = a_0\Big(\frac{\sigma\sigma'}{k_*} - \frac{n_0}{A_0}\Omega_2\Big)^{\boldsymbol{\cdot}}, \quad \dot{w}_3 = 2a_0\sigma\dot{\sigma}. \tag{51}$$

Опорный базис $\mathbf{э}_1\mathbf{э}_2\mathbf{э}_3$, следуя [4, с. 96–99], вводим следующим образом

$$\mathbf{э}_1 = \frac{\mathbf{v}_*}{v_*}, \quad \mathbf{э}_2 = \frac{\mathbf{B}_*\times\mathbf{v}_*}{|\mathbf{B}_*\times\mathbf{v}_*|}, \quad \mathbf{э}_3 = \frac{\mathbf{B}_*}{B_*}, \tag{52}$$

где $\mathbf{B}_*$ – вектор бинормали

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_* = B_1\mathbf{e}_1 + B_2^0\mathbf{e}_2^0 + B_3^0\mathbf{e}_3^0. \tag{53}$$

Запишем его разложение в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, подставив (46), (48) в (53):

$$\mathbf{B}_* = a_0^2\Big[\Omega_1\sigma^2\mathbf{e}_1 + \Omega_2\sigma^2\mathbf{e}_2^0 + \Big(-\frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2 + \frac{n_0}{A_0}\sigma^2\Big)\mathbf{e}_3^0\Big]. \tag{54}$$

Модули векторов $\mathbf{v}_*, \mathbf{B}_*,\ \mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*$ находим из (46), (54) с учетом (27):

$$v_* = a_0\sigma, \tag{55}$$

$$B_*^2 = a_0^4\Big[\sigma^6 + \Big(\frac{n_0}{A_0}\sigma^2 - \frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2\Big)^2\Big], \tag{56}$$

$$|\mathbf{B}_* \times \mathbf{v}_*| = B_* v_*.$$

Теперь опорный базис (52) определяем, воспользовавшись соотношениями (46), (54), (56)

$$\begin{gathered}
\text{э}_1 = -\frac{\Omega_2}{\sigma}\mathbf{e}_1 + \frac{\Omega_1}{\sigma}\mathbf{e}_2^0,\\
\text{э}_2 = \text{э}_3 \times \text{э}_1,\\
\text{э}_3 = \frac{a_0^2}{B_*}\Big[\Omega_1\sigma^2\mathbf{e}_1 + \Omega_2\sigma^2\mathbf{e}_2^0 + \Big(\frac{n_0}{A_0}\sigma^2 - \frac{\sigma\sigma'}{k_*}\Omega_2\Big)\mathbf{e}_3^0\Big].
\end{gathered} \tag{57}$$

Чтобы упростить выражение (56) для модуля бинормали, введем новую переменную χ с помощью дифференциального соотношения

$$\mathrm{tg}\chi = \frac{k_* n_0\sigma - \sigma' A_0\Omega_2}{A_0 k_*\sigma^2}, \tag{58}$$

тогда

$$B_* = \frac{a_0^2\sigma^3}{\cos\chi}. \tag{59}$$

С учетом (19), переменные Ω_1, Ω_2 можно представить в виде

$$\Omega_1 = \sigma\cos\beta, \qquad \Omega_2 = \sigma\sin\beta. \tag{60}$$

Подставив (59), (60) в (57), устанавливаем связь между опорным $\text{э}_1\text{э}_2\text{э}_3$ и полуподвижным $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ базисами

$$\text{э}_1 = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2^0\cos\beta, \tag{61}$$

$$\begin{gathered}
\text{э}_2 = -\mathbf{e}_1\cos\beta\sin\chi - \mathbf{e}_2^0\sin\beta\sin\chi + \mathbf{e}_3^0\cos\chi,\\
\text{э}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta\cos\chi + \mathbf{e}_2^0\sin\beta\cos\chi + \mathbf{e}_3^0\sin\chi.
\end{gathered} \tag{62}$$

Формулы обратного преобразования можно записать в виде

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{э}_1 \sin\beta - \mathbf{э}_2 \cos\beta \sin\chi + \mathbf{э}_3 \cos\beta \cos\chi, \tag{63}$$

$$\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{э}_1 \cos\beta - \mathbf{э}_2 \sin\beta \sin\chi + \mathbf{э}_3 \sin\beta \cos\chi, \tag{64}$$

$$\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{э}_2 \cos\chi + \mathbf{э}_3 \sin\chi. \tag{65}$$

Из соотношений (61), (62) заключаем, что χ – это угол между $\mathbf{e}_3^0$ и $\mathbf{э}_2$, а β – угол между $\mathbf{e}_2^0$ и $\mathbf{э}_1$. Чтобы определить угловую скорость опорного базиса, необходимо найти кривизну $\varkappa^*$ и кручение $\varkappa^0$ [5] траектории точки O:

$$\varkappa^* = \frac{B_*}{v_*^3}, \tag{66}$$

$$\varkappa^0 = \frac{\dot{\mathbf{w}}_* \cdot \mathbf{B}_*}{B_*^2}. \tag{67}$$

Внесем (55), (59) в (66) и определим кривизну траектории точки O

$$\varkappa^* = \frac{1}{a_0 \cos\chi}. \tag{68}$$

Вычислим скалярное произведение $\dot{\mathbf{w}}_* \cdot \mathbf{B}_*$, воспользовавшись соотношениями (49), (53),

$$\dot{\mathbf{w}}_* \cdot \mathbf{B}_* = B_1 \dot{w}_1 + B_2^0 \dot{w}_2^0 + B_3^0 \dot{w}_3^0 + (\mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_*) \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}_*). \tag{69}$$

Второе слагаемое преобразуем к виду

$$(\mathbf{v}_* \times \mathbf{w}_*) \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}_*) = (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{v}_*)\mathbf{w}_*^{\mathbf{2}} - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{w}_*)(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{w}_*).$$

Теперь (69) можно записать так:

$$\mathbf{B}_* \cdot \dot{\mathbf{w}}_* = B_1 \dot{w}_1 + B_2^0 \dot{w}_2^0 + B_3^0 \dot{w}_3^0 + (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{v}_*)\mathbf{w}_*^{\mathbf{2}} - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{w}_*)(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{w}_*).$$

Подставив в это выражение (50), (46), (48), (51), (54), получим

$$\mathbf{B}_* \cdot \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3 \Omega_1}{k_*} \left[\frac{(\sigma\sigma')'}{k_*} \Omega_2 \sigma^2 - \frac{3(\sigma\sigma')^2}{k_*} \Omega_2 + \frac{2n_0}{A_0} \sigma^3 \sigma' - \Omega_3 \sigma^3 \sigma' \right]. \tag{70}$$

Уравнение (17) запишем с учетом (21), считая $\Omega_1 \neq 0$,

$$\frac{\Omega_2'}{k_*} + \Omega_3 = \frac{n_0}{A_0} \tag{71}$$

(при $\Omega_1 = 0$, как следует из (21), $\theta = \mathrm{const}$), определим Ω_3 из (71): $\Omega_3 = \frac{n_0}{A_0} - \frac{\Omega_2'}{k_*}$. Теперь скалярное произведение (70) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_* \cdot \dot{\mathbf{w}}_* = \frac{a_0^3 \Omega_1 \sigma^5}{A_0 k_*^2} \Big(\frac{A_0 \Omega_2 \sigma' - k_* n_0 \sigma}{\sigma^2} \Big)'. \tag{72}$$

Будем рассматривать вариант, при котором кручение $\varkappa^0$ не обращается в нуль. Используя параметризацию (58), (59), получаем из (67)

$$\varkappa^0 = -\frac{\dot{\chi}}{a_0 \sigma}. \tag{73}$$

Угловая скорость Ω_0 опорного базиса [4] вычисляется по формуле

$$\mathbf{\Omega}_0 = v_* (\varkappa^0 \mathbf{э}_1 + \varkappa^* \mathbf{э}_3).$$

С учетом (55), (68), (73) Ω_0 принимает вид

$$\mathbf{\Omega}_0 = -\dot{\chi} \mathbf{э}_1 + \frac{\sigma}{\cos \chi} \mathbf{э}_3. \tag{74}$$

Угловая скорость Ω_{0*} тела S_0 относительно опорного базиса [4] – это разность угловых скоростей тела и опорного базиса

$$\mathbf{\Omega}_{0*} = \mathbf{\Omega}_* - \mathbf{\Omega}_0, \tag{75}$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0} \mathbf{e}_3^0. \tag{76}$$

Чтобы получить разложение вектора $\mathbf{\Omega}_*$ в опорном базисе, подставим в (76) соотношения (65):

$$\mathbf{\Omega}_* = \mathbf{э}_2 \Big(-\sigma \sin \chi + \frac{n_0}{J_0} \cos \chi \Big) + \mathbf{э}_3 \Big(\sigma \cos \chi + \frac{n_0}{J_0} \sin \chi \Big). \tag{77}$$

Теперь внесем (77), (74) в (75) и найдем угловую скорость $\mathbf{\Omega}_{0*}$

$$\mathbf{\Omega}_{0*} = \mathbf{э}_1 \dot{\chi} + \mathbf{э}_2 \Big(-\sigma \sin \chi + \frac{n_0}{J_0} \cos \chi \Big) + \mathbf{э}_3 \Big(-\sigma \sin \chi + \frac{n_0}{J_0} \cos \chi \Big) \mathrm{tg} \chi. \tag{78}$$

Аксоид тела S_0 в опорном базисе $\mathbf{э}_1 \mathbf{э}_2 \mathbf{э}_3$ имеет вид

$$\zeta^0 = \mu_0 \frac{\mathbf{\Omega}_{0*}}{\Omega_{0*}} + \frac{\mathbf{\Omega}_{0*} \times \mathbf{v}_*}{\Omega_{0*}^2} = \zeta_1^0 \mathbf{э}_1 + \zeta_2^0 \mathbf{э}_2 + \zeta_3^0 \mathbf{э}_3. \tag{79}$$

Из (52), (55) следует представление для скорости шарнира $\mathbf{v}_*$

$$\mathbf{v}_* = a_0 \sigma \mathbf{э}_1. \tag{80}$$

Подставив (78), (80) в уравнение (79), для компонент ζ_i^0 получим выражения

$$\begin{aligned}\zeta_1^0 = &\ \frac{\mu\dot\chi}{\Omega_{0*}},\\ \zeta_2^0 = &\ \Big(\frac{\mu\sigma}{\Omega_{0*}} + \frac{a_0\sigma^2}{\Omega_{0*}^2}\mathrm{tg}\chi\Big)\Big(-\sin\chi + \frac{n_0}{J_0\sigma}\cos\chi\Big),\\ \zeta_3^0 = &\ \Big(\frac{\mu\sigma}{\Omega_{0*}}\mathrm{tg}\chi + \frac{a_0\sigma^2}{\Omega_{0*}^2}\Big)\Big(-\sin\chi + \frac{n_0}{J_0\sigma}\cos\chi\Big),\end{aligned} \tag{81}$$

где $\Omega_{0*}^2 = \dot\chi^2 + \sigma^2\Big(\mathrm{tg}\chi - \dfrac{n_0}{J_0\sigma}\Big)^2$, а σ и $\mathrm{tg}\chi$ определены в (23), (58).

Подвижный аксоид $\boldsymbol{\xi}^0$ тела S_0 определен уравнением $(12.9)_*$

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*\times\mathbf{v}_*}{\Omega_*^2} \tag{82}$$

и в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ имеет разложение

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \xi_1^0\mathbf{e}_1 + \xi_2^0\mathbf{e}_2^0 + \xi_3^0\mathbf{e}_3^0. \tag{83}$$

Для определения ξ_i^0 внесем (76), (46) в уравнение (82):

$$\xi_1^0 = F^0(\mu,\theta)\Omega_1(\theta), \qquad \xi_2^0 = F^0(\mu,\theta)\Omega_2(\theta), \qquad \xi_3^0 = a_0 + F^0(\mu,\theta)\frac{n_0}{J_0},$$

где

$$F^0(\mu,\theta) = \frac{\mu}{\Omega_*(\theta)} + \frac{a_0 n_0}{J_0\Omega_*^2(\theta)}, \tag{84}$$

$$\Omega_*^2(\theta) = \sigma^2(\theta) + \frac{n_0^2}{J_0^2}. \tag{85}$$

Чтобы записать аксоид тела S_0 в неизменно связанном с ним базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$, необходимо учесть, что этот базис вращается с угловой скоростью $\dot\Phi$ относительно полуподвижного базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$. Подставив (41) в (83), с учетом (42) находим компоненты ξ_i^{0*} вектора $\boldsymbol{\xi}^0$:

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \xi_1^{0*}\mathbf{e}_1^{0*} + \xi_2^{0*}\mathbf{e}_2^{0*} + \xi_3^{0*}\mathbf{e}_3^{0*},$$

$$\xi_1^{0*} = F^0(\mu,\theta)\Omega_1^*(\theta), \qquad \xi_2^{0*} = F^0(\mu,\theta)\Omega_2^*(\theta), \qquad \xi_3^{0*} = \xi_3^0(\mu,\theta). \tag{86}$$

Скалярное произведение $\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\mathbf{v}_*$ с учетом (46), (76) равно нулю, и, следовательно, скорость скольжения равна нулю. Таким образом, при движении тела S_0 его подвижный аксоид (84)–(86) катится без скольжения по аксоиду (81) в опорном базисе.

Для вычисления аксоида тела S в опорном базисе вначале представим угловую скорость тела S

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \frac{n}{J}\mathbf{e}_3 \tag{87}$$

в опорном базисе. Для этого запишем соотношения, связывающие полуподвижные базисы $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ тела S и $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ тела S_0:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0 \cos\theta - \mathbf{e}_3^0 \sin\theta, \tag{88}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0 \sin\theta + \mathbf{e}_3^0 \cos\theta. \tag{89}$$

Подставив (88), (89) в (87), получим разложение

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \big(\omega_2 \cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\big)\mathbf{e}_2^0 + \big(-\omega_2 \sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\big)\mathbf{e}_3^0. \tag{90}$$

Вносим в (90) соотношения (63)–(65)

$$\omega_* = \text{э}_1 \frac{1}{\sigma}\Big[-\omega_1\Omega_2 + \Omega_1\big(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\big)\Big] +$$

$$+\text{э}_2\Big\{-\frac{1}{\sigma}\Big[\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\big(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\big)\Big]\sin\chi + \big(-\omega_2\sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\big)\cos\chi\Big\} +$$

$$+\text{э}_3\Big\{\frac{1}{\sigma}\Big[\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\big(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\big)\Big]\cos\chi + \big(-\omega_2\sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\big)\sin\chi\Big\}.$$

С учетом (13)–(15), (60) этот вектор принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}_* = \text{э}_1\Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\cos\beta\sin\theta +$$

$$+\text{э}_2\Big\{-\Big[-\frac{A_0}{A}\sigma + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\Big]\sin\chi + \Big[-\frac{n_0}{A} + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\cos\theta\Big]\cos\chi\Big\} +$$

$$+\text{э}_3\Big\{\Big[-\frac{A_0}{A}\sigma + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\Big]\cos\chi + \Big[-\frac{n_0}{A} + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\cos\theta\Big]\sin\chi\Big\}. \tag{91}$$

Тело S имеет по отношению к опорному базису угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{0*}$, равную разности $\boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0$. Разложение этого вектора в опорном базисе получим, воспользовавшись соотношениями (91), (74)

$$\boldsymbol{\omega}_{0*} = \text{э}_1\Big[\dot\chi + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\cos\beta\sin\theta\Big] + \tag{92}$$

$$+\text{э}_2\Big\{-\Big[-\frac{A_0}{A}\sigma + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\Big]\sin\chi + \Big[-\frac{n_0}{A} + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\cos\theta\Big]\cos\chi\Big\} +$$

$$+\text{э}_3\Big\{\Big[-\frac{A_0}{A}\sigma + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\sin\beta\sin\theta\Big]\cos\chi + \Big[-\frac{n_0}{A} + \Big(\frac{A}{J} - 1\Big)\frac{n}{A}\cos\theta\Big]\sin\chi - \frac{\sigma}{\cos\chi}\Big\}.$$

Аксоид $\boldsymbol{\zeta}$ тела S в опорном базисе имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_{0*}}{\omega_{0*}} + \frac{\boldsymbol{\omega}_{0*}\times\mathbf{v}_*}{\omega_{0*}^2} = \zeta_1\text{э}_1 + \zeta_2\text{э}_2 + \zeta_3\text{э}_3. \tag{93}$$

Подставив (92), (80) в (93), для компонент ζ_i получим выражения

$$\zeta_1 = \frac{\mu}{\omega_{0*}}\Big[\dot\chi + \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A}\cos\beta\sin\theta\Big], \tag{94}$$

$$\zeta_2 = \frac{\mu\sigma}{\omega_{0*}}\Big\{\Big[\frac{A_0}{A} - \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\sin\beta\sin\theta\Big]\sin\chi - \Big[\frac{n_0}{A\sigma} - \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\cos\theta\Big]\cos\chi\Big\} +$$
$$+\frac{a_0\sigma^2}{\omega_{0*}^2}\Big\{\Big[-\frac{1}{k_*} + \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\sin\beta\sin\theta\Big]\cos\chi + \Big[\frac{n_0}{A\sigma} - \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\cos\theta\Big]\sin\chi\Big\}, \tag{95}$$

$$\zeta_3 = \frac{\mu\sigma}{\omega_{0*}}\Big\{\Big[-\frac{1}{k_*} + \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\sin\beta\sin\theta\Big]\cos\chi + \Big[\frac{n_0}{A\sigma} - \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\cos\theta\Big]\sin\chi\Big\} -$$
$$-\frac{a_0\sigma^2}{\omega_{0*}^2}\Big\{\Big[\frac{A_0}{A} - \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\sin\beta\sin\theta\Big]\sin\chi - \Big[\frac{n_0}{A\sigma} - \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A\sigma}\cos\theta\Big]\cos\chi\Big\},$$

где

$$\omega_{0*}^0(u) = \Big[\Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n}{A} - \frac{d\chi}{du}\cdot\frac{\sigma(u)}{k_*}\Big]^2\Big[1 - u^2 - \frac{(n_0u+n)^2}{A_0^2\sigma^2(u)}\Big] +$$
$$+\Big[\frac{\sigma(u)}{k_*} + \Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{n(n_0u+n)}{AA_0\sigma(u)}\Big]^2 + \Big[\Big(\frac{A}{J}-1\Big)\frac{nu}{A} - \frac{n_0}{A_0k_*} + \frac{(n_0u+n)}{A_0k_*\sigma(u)}\frac{d\sigma}{du}\Big]^2,$$

$$\chi(u) = \operatorname{arctg}\Big[\frac{n_0}{A_0\sigma(u)} - \frac{(n_0u+n)}{A_0k_*\sigma^2(u)}\frac{d\sigma}{du}\Big].$$

Подвижный аксоид $\boldsymbol{\xi}$ тела S, определяемый уравнением $(12.9)_*$

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mu\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{v}_*}{\omega_*^2}, \tag{96}$$

запишем в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Скорость шарнира (46) в этом базисе с учетом (88), (89) такова:

$$\mathbf{v}_* = -a_0\Omega_2\mathbf{e}_1 + a_0\Omega_1(\mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta). \tag{97}$$

Подставив (87), (97) в уравнение (96), получим компоненты ξ_i:

$$\begin{aligned}
\xi_1 = &\ \frac{\mu\omega_1}{\omega_*} + \frac{a_0}{\omega_*^2}\Big(\omega_2\Omega_1\sin\theta - \Omega_1\frac{n}{J}\cos\theta\Big),\\
\xi_2 = &\ \frac{\mu\omega_2}{\omega_*} - \frac{a_0}{\omega_*^2}\Big(\omega_1\Omega_1\sin\theta + \Omega_2\frac{n}{J}\Big),\\
\xi_3 = &\ \frac{\mu n}{J\omega_*} + \frac{a_0}{\omega_*^2}(\omega_1\Omega_1\cos\theta + \Omega_2\omega_2).
\end{aligned}$$

Внесем (13)–(15), (19) в эти соотношения, тогда

$$\begin{aligned}
\xi_1(\mu,u) = &\ \left[-\frac{\mu A_0}{\omega_* A} + \frac{a_0}{\omega_*^2}\left(\frac{n_0+nu}{A} - \frac{nu}{J}\right)\right]\sqrt{\sigma^2 - \frac{(n_0u+n)^2}{A_0^2(1-u^2)}},\\
\xi_2(\mu,u) = &\ \left[\frac{\mu(n_0+nu)}{A\omega_*} + \frac{a_0}{\omega_*^2}\left(\frac{A_0}{A}\cdot\sigma^2(u)(1-u^2)-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{(n_0u+n)^2}{AA_0} + \frac{(n_0u+n)n}{A_0J}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{1-u^2}},\\
\xi_3(\mu,u) = &\ -\frac{\mu n}{J\omega_*} - \frac{a_0}{\omega_*^2}\left[\frac{A_0\sigma^2(u)}{A} + \frac{(n_0u+n)n_0}{AA_0}\right],
\end{aligned} \tag{98}$$

где

$$\omega_*^2(u) = \frac{A_0^2\sigma^2(u)}{A^2} + \frac{n_0^2-n^2}{A_0^2} + \frac{n^2}{J^2}. \tag{99}$$

Воспользовавшись следующими из (39) соотношениями

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*\cos\varphi + \mathbf{e}_2^*\sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^*\sin\varphi + \mathbf{e}_2^*\cos\varphi,$$

запишем подвижный аксоид в неизменно связанном с телом S базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1^*\mathbf{e}_1^* + \xi_2^*\mathbf{e}_2^* + \xi_3^*\mathbf{e}_3^*,$$

где $\xi_1^* = \xi_1\cos\varphi + \xi_2\sin\varphi$, $\xi_2^* = -\xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi$, $\xi_3^* = \xi_3$. Здесь угол φ определен в (38) квадратурой.

С учетом выражений (90), (46), (25), (26) определим скорость скольжения $\dfrac{\boldsymbol{\omega}_*\cdot\mathbf{v}_*}{\omega_*}$ подвижного аксоида по опорному

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_*\cdot\mathbf{v}_*}{\omega_*} = \frac{a_0\Omega_1}{\omega_*^2\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{n(1-u^2)}{J} - \frac{(n_0u+n)}{A_0} + \frac{(n_0+nu)u}{A}\right], \tag{100}$$

которая, вообще говоря, в нуль не обращается.

Таким образом, при движении тела S подвижный аксоид (98), (99) катится по опорному – (94), (95). Это качение сопровождается скольжением вдоль общей образующей со скоростью (100).

Впервые в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа записаны аксоиды тел в опорном базисе. Это дает возможность представить движение тел качением подвижного аксоида по опорному аксоиду. При этом выяснилось, если тело S закреплено в центре масс, то качение его подвижного аксоида по аксоиду в опорном базисе сопровождается скольжением, а качение подвижного аксоида тела S_0 по опорному аксоиду происходит без скольжения.

1. *Харламов М.П., Харламов П.В.* Построение полного решения задачи об относительном движении тела // Докл. АН УССР. – 1983. – Сер. А. - № 12. - С. 36–38.
2. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики системы сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
3. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. - **28**. — № 3. – С. 502-507.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
5. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.

Национальный техн. ун-т, Донецк Получено 19.12.07