ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.36

©2009. **А.М. Ковалев**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ СО ЗНАКОПОСТОЯННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Решена задача устойчивости для нелинейных систем дифференциальных уравнений с известной функцией со знакопостоянной производной. Решение основано на использовании метода функций Ляпунова и метода дополнительных функций.

Введение. Наибольшие успехи в решении задач устойчивости движения связаны с методом функций Ляпунова [1]. Опыт применения этого метода показал, что основную роль в успешном решении задачи играет построение функции, производная которой в силу системы является знакоопределенной, либо знакопостоянной. Случай, когда производная является знакоопределенной функцией, полностью решается второй и третьей теоремами Ляпунова. Движение при этом может быть асимптотически устойчивым, либо неустойчивым. Намного сложнее и не решенным в полной мере является случай, когда производная является функцией знакопостоянной. На необходимость его изучения одним из первых указал Н.Н. Красовский [2].

Важное место в развитии теории устойчивости занимает теорема Барбашина–Красовского [3], которая усиливает первую теорему Ляпунова, привлекая в рассмотрение анализ множества M обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$ на возможность содержания этим множеством траекторий системы. Этот результат распространен на задачи частичной устойчивости. Из работ данного направления выделим теорему Ризито [4]. Идеи, использованные в теореме Барбашина–Красовского, Н.Н. Красовский применил к получению условий неустойчивости для систем со знакопостоянной производной [5]. Ключевую роль в получении всех этих результатов играло свойство инвариантности.

Дальнейшее развитие задачи устойчивости для систем со знакопостоянной производной связано с получением дополнительных функций [6–8], которые первоначально были использованы при построение функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского. При получении этих функций использован метод инвариантных соотношений [9, 10]. Применение дополнительных функций в общей ситуации, когда сама функция не является знакоопределенной, позволило получить новые результаты по неустойчивости [11, 12], устойчивости [13, 14] и частичной устойчивости [15, 16]. Основную роль в этих исследованиях сыграла Центральная теорема (терминология настоящей статьи), дающая способ и формулы преобразования функции со знакопостоянной производной к виду, когда множество обращения в нуль ее производной является инвариантным. Важность этой теоремы в том, что свойство инвариантности тесно связано со свойством устойчивости. Это показали выполненные исследования автора и работы выше упомянутых авторов.

Полученные результаты дают возможность решения в полном объеме задачи устойчивости для систем с известной функцией со знакопостоянной производной, чему и посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи и методы решения. Рассматривается устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0; \quad x \in D \subset R^n, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D – некоторая окрестность нуля, функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $v(x)$ в силу системы (1): $\dot{v}(x) = \langle \nabla v(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ – оператор дифференцирования, в применении к скалярной функции он дает градиент, а к вектор-функции – матрицу Якоби; символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение.

С целью более детальной характеристики движений в окрестности нулевого решения воспользуемся подходом, принятым в частичной устойчивости [17], и введем понятия устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых переменных.

Определение 1. Переменная $y = g(x)$ $(y \in R^1, y(0) = 0)$ называется устойчивой, асимптотически устойчивой, неустойчивой, если нулевое решение системы (1) является, соответственно, устойчивым, асимптотически устойчивым, неустойчивым относительно этой переменной. Отметим, что устойчивые переменные (по определению) при неограниченном возрастании времени не стремятся к нулю, оставаясь все время в заданной ограниченной области.

Сформулируем следующие задачи, решение которых направлено на создание конструктивных методов теории устойчивости.

Задача 1. Выделить устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные для системы (1), если для нее известна функция со знакопостоянной производной.

Задача 2. Для системы (1) получить функцию, производная которой является знакопостоянной функцией.

Отметим, что задача 1 является обобщением решенной в работе [15] задачи 1, в которой дополнительно требуется знакоопределенность самой функции. Частные случаи задачи 1 решены в работах [11–16]. Задача 2 решена для линейных систем [15], за исключением некоторых особых случаев, для которых решение задачи устойчивости тривиально.

Настоящая статья посвящена задаче 1. Ее решение будет проводиться с помощью двух методов: метода функций Ляпунова и метода дополнительных функций, основные элементы которого излагаются ниже.

2. Дополнительные функции. Теорема Барбашина–Красовского выявила важность исследования множества M обращения в нуль знакопостоянной производной $\dot{V}(x)$ функции Ляпунова $V(x)$ на наличие в этом множестве траекторий системы. Решение этого вопроса и новую информацию о свойствах производной дает метод инвариантных соотношений. Приведем необходимые для дальнейшего рассмотрения результаты.

Определение 2. Множество $G \subset D$ называется инвариантным множеством системы (1), если всякое решение $x(t)$, имеющее с G общую точку $x(t^*)$, целиком принадлежит этому множеству: $x(t) \in G, \quad t \in [t_0, \infty)$.

Определение 3. Соотношение $\varphi(x) = 0$ называется инвариантным соотношением системы (1), если определяемое им множество содержит инвариантное множество системы (1).

Удобным инструментом для проверки, является ли заданное соотношение инвариантным соотношением системы (1), является следующая теорема.

Теорема 1 [10]. *Порождаемое инвариантным соотношением $\varphi(x) = 0$ $(\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad для \quad x \in G)$ инвариантное множество G системы (1) определено уравнениями*

$$\varphi^{(i)}(x) = 0 \quad (i = 0, 1, ..., l-1), \tag{2}$$

где l – число функционально независимых функций в последовательности

$$\varphi(x), \dot{\varphi}(x), \ddot{\varphi}(x), \dots . \tag{3}$$

С использованием теоремы 1 устанавливается важное свойство, необходимое для преобразования функции со знакопостоянной производной.

Лемма 1. *Пусть множество $M = \{x : \varphi(x) = 0, \ \nabla\varphi(x) \neq 0\} \subset D$ содержит инвариантное множество N, определяемое первыми l независимыми функциями последовательности (3). Тогда для каждой точки $x_0 \in M \backslash N$ найдется k такое, что $\varphi^{(k)}(x_0) \neq 0$.*

Доказательство. С целью указания значения k каждой точки $x_0 \in M \backslash N$ будем искать решение системы (2) путем последовательного решения подсистем $\varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0, ..., \varphi^{(j)}(x) = 0, \ j = 1, 2, ..., l-1$. Для системы $\varphi(x) = 0$, $\dot{\varphi}(x) = 0$ существуют точки $x_0^{(1)}$, для которых $\varphi(x_0^{(1)}) = 0$, $\dot{\varphi}(x_0^{(1)}) \neq 0$. Эти точки принадлежат множеству $M \backslash N$. Для следующей системы $\varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0, \ddot{\varphi}(x) = 0$ существуют точки $x_0^{(2)}$, для которых $\varphi(x_0^{(2)}) = 0, \dot{\varphi}(x_0^{(2)}) = 0, \ddot{\varphi}(x_0^{(2)}) \neq 0$. Наконец, для последней системы, совпадающей с системой (2), $\varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0, ..., \varphi^{(l-1)}(x) = 0$ существуют точки $x_0^{(l-1)}$, для которых $\varphi(x_0^{(l-1)}) = 0, \dot{\varphi}(x_0^{(l-1)}) = 0, ..., \varphi^{(l-1)}(x_0^{(l-1)}) \neq 0$.

Из рассмотрения следует, что $M \backslash N = \bigcup\limits_{i=1}^{l-1} x_0^{(i)}$ и при этом $\varphi^{(i)}(x_0^{(i)}) \neq 0$ $i = 1, 2, ..., l-1$, что и доказывает лемму. □

Отметим, что данная лемма обобщает лемму 1, доказанную для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского [7, 8] и для которых выполнено дополнительное условие $N = \emptyset$.

Лемма 1 дает возможность использовать производные $\varphi^{(s)}(x)$ для уменьшения множества обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$. Для этого к функции $V(x)$ прибавляется функция, производная которой положительна на множестве M, а вне множества M значения этой функции могут быть подобраны так, чтобы не изменять свойства функций $\dot{V}(x), V(x)$, прежде всего знакопостоянство $\dot{V}(x)$ и, возможно, знакоопределенность $V(x)$. В соответствии со своим назначением эти функции названы дополнительными функциями (имеется ввиду, к функции $V(x)$). В простейшем случае, когда вопрос существования инвариантного множества $N \subset M$ для системы (1) решается двумя первыми членами последовательности (3): $\varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0$, дополнительная функция (первого типа) имеет вид:

$$V_a(x) = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle, \varphi(x)\big\rangle. \tag{4}$$

Основное свойство функции (4) определяется следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть функция $V(x)$ имеет знакопостоянную производную $\dot{V}(x)$, которая обращается в нуль на множестве $M = \{x : \varphi(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq \neq 0\}$, содержащем инвариантное множество N, определяемое уравнениями $\varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0$. Тогда производная функции (4) принимает на множестве $M \setminus N$ положительное значение*

$$\dot{V}_a(x) = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m+2} \quad \text{\textit{и}} \quad \dot{V}_a(x) = 0 \quad \text{\textit{для}} \quad x \in N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственным дифференцированием функции (4) находим $\dot{V}_a = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m+2}$ для $x \in M$. Неравенство $\langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle \neq \neq 0$ для $x \in M\backslash N$ следует из леммы 1. Равенство $\dot{V}_a(x) = 0$ для $x \in N$ следует из условия инвариантности множества N. Лемма доказана. □

Определяющую роль в построении дополнительной функции играет значение ее производной на множестве $M\backslash N \subset M$, поэтому в формуле (4) достаточно учитывать лишь ненулевые на множестве M значения функции $f(x)$. Это приводит к тому, что при исследовании устойчивости с применением дополнительных функций систему (1) целесообразно преобразовать к виду

$$\dot{x} = f_M(x) + f_N(x), \tag{5}$$

где функция $f_M(x)$ обращается в нуль на множестве M, а функция $f_N(x)$ отлична от нуля на множестве M.

Представление (5) дает возможность упростить функцию (4):

$$V_a(x) = \langle \nabla\varphi(x), f_N(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi(x), f_N(x)\rangle, \varphi(x)\big\rangle. \tag{6}$$

Для построения дополнительных функций V_a большое значение имеет структура множества M, определяемая его геометрическими и дифференциальными особенностями. Во-первых (геометрические особенности), множество M может быть суммой подмножеств $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, $M_i = \{x : \varphi_i(x) = 0,$

$\nabla\varphi_i(x) \neq 0\}$. Кроме того, попарные пересечения $M_k \bigcap M_m$ могут содержать ненулевые точки для некоторых k, m, что также необходимо учитывать. Во-вторых (дифференциальные особенности), для некоторых множеств M_i вопрос о существовании инвариантного множества может не решаться первыми двумя членами последовательности (3), т.е. в лемме 1 для точек $x_0 \in M_i$ существуют $k > 1$.

Решение вопроса с геометрическими особенностями приводит к новой дополнительной функции (второго типа), производная которой принимает положительные значения на множестве M_i и обращается в нуль на остальных множествах M_j:

$$V_{ai}(x) = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \Big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x) \Big\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x). \tag{7}$$

Для функции (7) сохранено предположение о том, что вопрос инвариантности множества $N_i \subset M_i$ решается двумя первыми членами последовательности (3). Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть функция $V(x)$ имеет знакопостоянную производную $\dot V(x)$, которая обращается в нуль на множестве $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, $M_i = \{x : \varphi_i(x) = 0,\ \nabla\varphi_i(x) \neq 0\}$. Множества M_i содержат инвариантные множества N_i, определяемые уравнениями $\varphi_i(x) = 0, \dot\varphi_i(x) = 0$. Тогда производная функции (7) принимает на множестве $M_i \setminus N_i$ положительное значение $\dot V_{ai}(x) = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m+2} \prod\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x)$ и $\dot V_{ai}(x) = 0$ для $x \in N_i$, $x \in M_j$ $(j \neq i,\ j = 1, ..., s)$.*

Доказательство. Вычисляем производную функции (7)

$$\dot V_{ai}(x) = \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x) \Big(\langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \frac{d}{dt} \Big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x) \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x) \Big\rangle \frac{d}{dt} \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \Big) +$$

$$+ \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \Big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x) \Big\rangle \frac{d}{dt} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x). \tag{8}$$

Для $x \in M_i \setminus N_i$ имеем $\varphi_i(x) = 0, \dot\varphi_i(x) = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle \neq 0$ и из формулы (8) получаем $\dot V_{ai}(x) = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m+2}$. Для $x \in N_i$ имеем $\varphi_i(x) = 0, \dot\varphi_i(x) = 0$, и для $x \in M_j$ выполнено $\varphi_j(x) = 0$ $(j \neq i,\ j = 1, ..., s)$. Для этих значений x из формулы (8) следует $\dot V_{ai}(x) = 0$. Лемма доказана. $\square$

При использовании дополнительных функций V_{ai} второго типа также оказывается полезным преобразование системы (1) к виду

$$\dot{x} = f_{M_i}(x) + f_{N_i}(x), \tag{9}$$

где функция $f_{M_i}(x)$ обращается в нуль на множестве M_i, а функция $f_{N_i}(x)$ отлична от нуля на множестве M_i.

С помощью представления (9) функция (7) упрощается

$$V_{ai}(x) = \langle \nabla\varphi_i(x), f_{N_i}(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f_{N_i}(x)\rangle, \varphi_i(x) \big\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x). \tag{10}$$

Вопрос с дифференциальными особенностями для дополнительных функций первого и второго типа решается путем последовательного рассмотрения множеств, на которых соответствующие производные отличны от нуля, как это сделано при доказательстве леммы 1.

3. Центральная теорема. Применим дополнительные функции к преобразованию функции, имеющей знакопостоянную производную, для расширения множества знакоопределенности ее производной. Сначала рассмотрим случай, когда вопрос инвариантности решается двумя первыми членами последовательности (3), т.е. содержащееся в множестве $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ инвариантное множество N определяется системой $\varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0$. В этом случае достаточно использовать дополнительную функцию первого типа. Предварительно преобразуем систему (1) с помощью замены переменных, вводимой следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть множество $M = \{x : \varphi(x) = 0,\ \nabla\varphi(x) \neq 0\}$ содержит инвариантное множество $N = \{x : \varphi(x) = 0, \dot{\varphi}(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq 0\}$; функции $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x), \dot{\varphi}_1(x), ..., \dot{\varphi}_l(x)$ $(l \leq k)$ являются независимыми и через них выражаются все функции последовательности (3). Тогда с помощью невырожденной замены переменных*

$$\begin{gathered} y_j = \varphi_j(x),\ j = 1, ..., k; \qquad z_{(1)s} = \dot{\varphi}_s(x),\ s = 1, ..., l; \\ z_{(2)i} = x_{m+i},\ \ i = 1, ..., n-m,\ m = k + l \end{gathered} \tag{11}$$

система (1) приводится к виду

$$\dot{y} = F(y, z_{(1)}), \qquad \dot{z}_{(1)} = F_{(1)}(y, z_{(1)}), \qquad \dot{z}_{(2)} = F_{(2)}(y, z_{(1)}, z_{(2)}). \tag{12}$$

Для обеспечения невырожденности замены (11), при необходимости, может быть изменена нумерация переменных x_i, φ_j.

Доказательство. Выберем переменные x_i, φ_j таким образом, чтобы замена (11) была невырожденной. Производные $\dot{y}, \dot{z}_{(1)}$ запишем с использованием функций $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \ldots$. Имеем $\dot{y}_i = \dot{\varphi}_i(x), \dot{z}_{(1)j} = \ddot{\varphi}_j(x)$ $(i = 1, ..., k;$

$j = 1, ..., l$). В силу того, что все функции последовательности (3) выражаются через $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x), \dot\varphi_1(x), ..., \dot\varphi_l(x)$, получаем $\dot y = F(y, z_{(1)}), \dot z_{(1)} = F_{(1)}(y, z_{(1)})$. Производные от $z_{(2)s} = x_{s+m}$ $(s = 1, ..., n-m)$ зависят от всех переменных $y, z_{(1)}, z_{(2)}$, откуда получаем последнюю из формул (12). Лемма доказана. $\square$

Замечание 1. Отметим важное свойство замены (11). С ее помощью выполнена редукция исходной системы (1) к системе на множестве $D \setminus N$, описываемой двумя первыми уравнениями системы (12).

Используя вид (4), (6) дополнительной функции первого типа, ее свойства и свойства преобразованной системы (12), определяемые леммами 2, 4, докажем следующую теорему, являющуюся упрощенным вариантом Центральной теоремы.

Теорема 2. *Пусть функция $V(x)$ имеет знакопостоянную производную $\dot V(x)$, обращающуюся в нуль на множестве $M = \{x : \varphi(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq 0\}$. Множество M содержит инвариантное множество $N = \{x : \varphi(x) = 0, \dot\varphi(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq 0\}$. Предполагаем, что функции $f(x), \varphi(x), V(x)$ являются дифференцируемыми достаточное число раз, знакопостоянство $\dot V(x)$ и выполнение неравенства $\langle\nabla\varphi(x), f(x)\rangle \neq 0$ определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа m, α такие, что производная функции $V_f(x) = V(x) + \alpha V_a(x)$ сохраняет знак для $x \in D \setminus N$ и обращается в нуль для $x \in N$. Неравенство $\dot V_f$ нулю на множестве $D \setminus N$ определяется членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Здесь функция $V_a(x)$ определена формулой (6).*

Доказательство. Используя лемму 4, с помощью преобразования (11) приведем систему (1) к виду (12). При этом в силу определения множества M производная $\dot V(x)$ будет знакоопределенной функцией от y. Поэтому для преобразования $\dot V(y)$ достаточно ограничиться редуцированной системой

$$\dot y = F(y, z_{(1)}), \qquad \dot z_{(1)} = F_{(1)}(y, z_{(1)}). \tag{13}$$

Отметим, что множество M определяется уравнением $y = 0$, а $\dot\varphi(x)$ и последующие производные зависят только от $y, z_{(1)}$, и в силу леммы 1 для всех точек $(0, z_{(1)})$ выполняется $\dot\varphi(0, z_{(1)}) \neq 0$ при $z_{(1)} \neq 0$. Систему (13) запишем в виде (5)

$$\dot y = F_M(y, z_{(1)}) + F_N(z_{(1)}), \qquad \dot z_{(1)} = F_{(1)M}(y, z_{(1)}) + F_{(1)N}(z_{(1)}). \tag{14}$$

В соответствии с определением функций F_M, F_N для функции (6) получаем выражение $V_a(y, z_{(1)}) = F_N^{2m}(z_{(1)})\langle F_N(z_{(1)}, y)\rangle$, причем $F_N(z_{(1)}) \neq 0$ при $z_{(1)} \neq 0$. Используем полученное выражение для вычисления производной $\dot V_a(y, z_{(1)})$ функции $V_a(y, z_{(1)})$ в силу системы (14)

$$\dot V_a(y, z_{(1)}) = F_N^{2m+2}(z_{(1)}) + F_N^{2m}(z_{(1)})\langle F_N(z_{(1)}), F_M(y, z_{(1)})\rangle +$$

$$+F_N^{2m}(z_{(1)})\big\langle\langle\nabla F_N(z_{(1)}), F_{(1)M}(y,z_{(1)})+F_{(1)N}(z_{(1)})\rangle, y\big\rangle+$$
$$+2mF_N^{2m-2}(z_{(1)})\big\langle\langle\nabla F_N(z_{(1)}), F_{(1)M}(y,z_{(1)})+$$
$$+F_{(1)N}(z_{(1)})\rangle, F_N(z_{(1)})\big\rangle\,\langle F_N(z_{(1)},y)\rangle. \qquad (15)$$

Производную $\dot{V}_f$ представим в виде

$$\dot{V}_f=\dot{V}(y)+\alpha F_N^{2m+2}(z_{(1)})+\dot{V}_{fa}(y,z_{(1)}). \qquad (16)$$

В силу условия $F_N(z_{(1)})\neq 0$ для $z_{(1)}\neq 0$ заключаем, что при $\alpha=$ $=\mathrm{sign}\dot{V}(y)$ функция $\dot{V}(y)+\alpha F_N^{2m+2}(z_{(1)})$ знакоопределена. Для установления знакоопределенности $\dot{V}_f$ проанализируем влияние $\dot{V}_{fa}(y,z_{(1)})$. Оценим малость слагаемых $\dot{V}_f$, используя представление (16). Пусть β – максимальный порядок формы в разложении $\dot{V}$. Из формул (15), (16) находим $\dot{V}_{fa}(y,z_{(1)})\sim$ $\sim O(\|F_N(z_{(1)})\|^{2m})O(\|y\|)$. Поскольку разложение $F_N(z_{(1)})$ начинается с членов не ниже первой степени $z_{(1)}$, то $\|F_N(z_{(1)})\|\sim o(\|(z_{(1)})\|)$ и $\dot{V}_{fa}(y,z_{(1)})\sim$ $\sim o(\|z_{(1)}\|^{2m})O(\|y\|)$. Оценим влияние функции $\dot{V}_{fa}(y,z_{(1)})$ для $y\sim z_{(1)}^k$ при $k>0$. Для $0<k\leq 2$, приняв $m>\beta$, имеем $\dot{V}_{fa}\sim o(\dot{V})$, а для $k>2$ имеем $\dot{V}_{fa}\sim o(\|F_N(z_{(1)})\|^{2m+2})$. Отсюда следует, что функция $\dot{V}_{fa}(y,z_{(1)})$ при сделанных предположениях не нарушает знакоопределенность $\dot{V}(y)+$ $+\alpha F_N^{2m+2}(z_{(1)})$. При этом неравенство $\dot{V}_f$ нулю при $(y,z_{(1)})\neq 0$ определяется членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Подводя итог, можно утверждать, что теорема справедлива, если выбрать $m=\beta$, $\alpha=$ $=\mathrm{sign}\dot{V}(y)$. $\square$

Замечание 2. В случае $N=\emptyset$ данное доказательство совпадает с доказательством теоремы о построении функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского [6].

Перейдем к рассмотрению общего случая, характеризуемого наличием геометрических и дифференциальных особенностей, упомянутых выше. Для построения дополнительной функции V_a, обеспечивающей искомое преобразование производной, предлагается следующая схема:

1. Множество $M=\{x:\varphi(x)=0,\nabla\varphi(x)\neq 0\}$ представляется в виде суммы множеств $M_i=\{x:\varphi_i(x)=0,\nabla\varphi_i(x)\neq 0\}$ без пересечений: $M=$ $=\bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i,\ M_k\bigcap M_m=\emptyset\ \ (k,m=1,...,s)$.

2. Каждое множество M_i представляется в виде суммы подмножеств $M_i=$ $=\bigcup\limits_{j=1}^{s_i} M_{ij}$ таких, что $\forall x\in M_{ij}$ имеем

$$\varphi_i(x)=0,\ \dot{\varphi}_i(x)=0,...,\varphi_i^{(j-1)}(x)=0,\ \varphi_i^{(j)}(x)\neq 0.$$

3. Для каждого подмножества M_{ij} строится дополнительная функция $V_{aij}(x)$ второго типа (7) или ее упрощенная форма (10).

4. Выбираются значения параметров m_{ij}, α_{ij} и строится функция $V_f(x) = V(x) + \sum \alpha_{ij} V_{aij}(x)$ со знакоопределенной производной на множестве, расширенном по сравнению с исходным множеством M для функции $V(x)$.

Построение проводится поэтапно последовательным добавлением к исходной функции $V(x)$ дополнительных функций с выбором соответствующих значений параметров m_{ij}, α_{ij}. Доказательство знакоопределенности на каждом этапе совпадает с доказательством теоремы 2 для дополнительной функции первого типа. При построении возможны два случая. В первом случае уравнения (2) для $l = s_i$ допускают только нулевое решение, т.е. все множества M_i не содержат инвариантного множества. Во втором случае наряду с множествами M_i, не содержащими инвариантных множеств, имеются множества $M_1, ..., M_c$, содержащие инвариантные множества, описываемые функциями $\varphi_{p1}(x), ..., \varphi_{pc}(x) : \varphi_{pi}(x) = 0,\ i = 1, ..., c$. Пусть среди функций $\varphi_{pi}(x)$ имеется k независимых. Примем их в качестве новых переменных $y_i = \varphi_{pi}(x),\ i = 1, ..., k$. Тогда дополнительные функции, соответствующие первой группе, обеспечивают знакоопределенность производной на соответствующих множествах, а функции второй группы приводят к знакоопределенности лишь по отношению к переменным y_i. Поэтому построенная по предложенной схеме функция $V_f(x)$ будет иметь y-знакоопределенную производную. Более точно, справедлива теорема.

Теорема 3 (Центральная теорема). *Пусть для системы (1) существует функция $V(x)$, производная которой в силу системы (1) является знакопостоянной функцией. Множество $M = \{x : \dot V(x) = 0\}$ представляется суммой множеств $M = \bigcup\limits_{\substack{i=1\\ j=1}}^{s,s_i} M_{ij}$*

$$M_{ij} = \{x : \varphi_i(x) = 0, \dot\varphi_i(x) = 0, ..., \varphi_i^{(j-1)}(x) = 0, \varphi_i^{(j)}(x) \neq 0, \nabla\varphi_i(x) \neq 0\},$$
$$M_{ij} \bigcap M_{kl} = \emptyset. \tag{17}$$

Предполагаем, что $V(x)$, $\varphi_i(x)$ – функции, дифференцируемые достаточное число раз, знакопостоянство $\dot V(x)$ и неравенства $\varphi_i^{(j)}(x) \neq 0$ определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа m_{ij}, α_{ij} такие, что функция

$$V_f(x) = V(x) + \sum_{i,j=1}^{s,s_i} \alpha_{ij} V_{aij}(x) \tag{18}$$

будет иметь y-знакоопределенную производную и множество обращения ее в нуль является инвариантным множеством.

Здесь функции $V_{aij}(x)$ определены формулами (4), (7); $y^T = (y_1, ..., y_k)$, $y_i = \varphi_{pi}(x)$ – независимые функции, с помощью которых описываются инвариантные множества, содержащиеся в множествах M_{ij}.

Доказательство. В силу сделанных предположений для установления знакоопределенности $\dot{V}_f(x)$ достаточно проанализировать разложения $\dot{V}(x)$ и $\dot{V}_{aij}(x)$. Построение функции $V_f(x)$, обеспечивающее знакоопределенность $\dot{V}_f(x)$ (и, соответственно, доказательство), проводится поэтапно, последовательным добавлением дополнительных функций, построенных для множеств M_{ij}. На начальном этапе множества M_{ij} делятся на две группы: 1) не содержащие инвариантных множеств; 2) содержащие инвариантные множества. Среди функций φ_{pi}, описывающих множества второй группы, выбираются независимые функции $y_i = \varphi_{pl_i}^{(k_i)}$, $i = 1, ..., k$, через которые выражаются все функции φ_{pi}, используемые при формировании множеств M_{ij}. При этом каждое множество M_{ij} описывается уравнениями

$$\Phi_{ijl}(y_1, ..., y_k) = 0, \ l = 1, ..., k_{ij}, \tag{19}$$

где $\Phi_{ijl}(y_1, ..., y_k)$ – независимые функции последовательности $\varphi_i(x), \dot{\varphi}_i(x), ..., \varphi_i^{(j-1)}(x)$. Поскольку по построению $\varphi_i^{(j)}(x) \neq 0$, то при $y_1^2 + ... + y_k^2 \neq 0$ имеем

$$\sum_{l=1}^{k_{ij}} \dot{\Phi}_{ijl}^2(y_1, ..., y_k) > 0. \tag{20}$$

С учетом изложенного с помощью формулы (7) для функции $V_{aij}(x)$ получаем выражение

$$V_{aij}(x) = \langle \nabla \Phi_{ij}(y), f(y,z) \rangle^{2m_{ij}} \Big\langle \langle \nabla \Phi_{ij}(y), f(y,z) \rangle, \Phi_{ij}(y) \Big\rangle \prod_{(k,l) \neq (i,j)} \Phi_{kl}^2(y). \tag{21}$$

Здесь функции $y(x) = (y_1(x), ..., y_k(x))^T$, $z(x) = (z_1(x), ..., z_{n-k}(x))^T$ являются достаточное число раз дифференцируемыми функциями, при этом $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\det \dfrac{\partial(y,z)}{\partial x}\Big|_{x=0} \neq 0$; $\Phi_{ij}(y) = (\Phi_{ij1}(y), ..., \Phi_{ijk_{k_{ij}}}(y))^T$. Необходимо отметить, что $V_{aij} = V_{aij}(y)$, поскольку величина $\langle \nabla \Phi_{ij}(y), f(y,z) \rangle$ состоит из производных функций $\varphi_i(x)$ и в силу сделанных предположений выражается через переменную y. Это же замечание справедливо и относительно производных $V_{aij}^{(s)}$ в силу системы (1).

Для множеств M_{ij} первой группы строится функция $V_{f1}(x)$, производная которой обращается в нуль лишь на множествах второй группы, а в остальных точках области D сохраняющая знак. Для множеств M_{ij} второй группы из формул (19)–(21) следует, что $\dot{V}_{aij}(y) > 0$ для $y \in M_{ij}$. Повторяя доказательство теоремы 2 знакоопределенности функции $\dot{V}_f = \dot{V}_s + \alpha V_a(x)$, получаем, что производная функции (17) будет y-знакоопределенной. В силу построения множество обращения производной функции (18) в нуль является инвариантным. Теорема доказана. □

Замечание 3. В качестве дополнительных функций V_{aij} вместо определенных формулой (7) можно использовать упрощенные функции (10).

Теорема 3 будет использована для преобразования функции Ляпунова при решении задачи 1.

4. Основные теоремы. Решение задачи 1 из п. 1 требует применения методов исследования устойчивости по всем и по части переменных. Удобный аппарат для этого дает метод дополнительных функций, позволивший модернизировать теоремы Ляпунова, объединив исследования по всем и по части переменных и перейдя к координатному описанию на основе определения 1. Приведем теоремы, необходимые для решения задачи 1. Начнем с выделения асимптотически устойчивых переменных. Этот вопрос решает следующая теорема [15, 16].

Теорема 4. *Пусть для системы (1) существует знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой в силу системы (1) является знакопостоянной, знака противоположного $V(x)$. Множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ представляется суммой множеств $M = \bigcup_{i=1,\, j=1}^{s, s_i} M_{ij}$, описываемых формулами (17). Предполагаем, что $V(x), \varphi_i(x)$ – функции, дифференцируемые достаточное число раз, знакоопределенность функции $V(x)$ определяется формой конечного порядка; знакопостоянство $\dot{V}(x)$ и неравенства $\varphi_i^{(j)}(x) \neq 0$ определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа m_{ij}, α_{ij} такие, что функция (18) будет знакоопределенной, а ее производная $\dot{V}_f(x)$ будет y-знакоопределенной, знака, противоположного $V_f(x)$, и нулевое решение системы (1) будет устойчиво по всем переменным и асимптотически y-устойчиво.*

Здесь функции $V_{aij}(x)$ определены формулами (4), (7); $y^T = (y_1, ..., y_k)$, $y_i = \varphi_{pi}(x)$ – независимые функции, с помощью которых описываются инвариантные множества, содержащиеся в множествах M_{ij}.

Доказательство. Условия теоремы 4 отличаются от условий теоремы 3 лишь требованием знакоопределенности функции $V(x)$. Поэтому утверждение теоремы 4 относительно производной $\dot{V}_f(x)$ следует из теоремы 3. Остается лишь доказать, что при выборе чисел m_{ij}, α_{ij}, обеспечивающих y-знакоопределенность $\dot{V}_f$, удается сохранить знакоопределенность $V_f(x)$. Для этого достаточно проанализировать разложения $V(x)$ и $V_{aij}(x)$. Поскольку знакоопределенность функции $V(x)$ определяется формой конечного порядка, то знакоопределенность функции $V_f(x)$ достигается путем выбора чисел m_{ij} таким образом, чтобы дополнительные слагаемые от функций $V_{aij}(x)$ имели более высокий порядок, чем формы $V(x)$. Принимая во внимание эти требования на выбор m_{ij} при анализе $\dot{V}_f(x)$, получаем функцию $V_f(x)$ с указанными в теореме 4 свойствами. Теорема доказана. □

Замечание 4. Теорема 4 обобщает теорему 2 статьи [19], расширяя множество переменных, относительно которых нулевое решение асимптотически устойчиво.

Замечание 5. Теорема 4 при $k = n$ дает построение [6–8] функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского, а при $k < n$ обобщает известные распространения теоремы Барбашина–Красовского на случай частичной асимптотической устойчивости, когда функция $V(x)$ знакоопределенная.

В связи с теоремой 4 рассмотрим вопрос о том, можно ли расширить полученное в теореме 4 множество частичной асимптотической устойчивости, построив, например, другую функцию Ляпунова. Ответ на этот вопрос – отрицательный. Причина этому – наличие следующих двух свойств построенного множества M_p, дополнительного множеству частичной асимптотической устойчивости:

1. множество $M_p = \{x : y = 0\}$ – инвариантно;

2. $\dot{V}_f(x) = 0$ для точек $x \in M_p$.

Справедлива следующая теорема [15, 16].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда множество, относительно которого нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, является максимально возможным, т.е. не допускает расширения.*

Доказательство. Для доказательства покажем, что все решения системы (1) с начальными условиями из множества M_p не будут асимптотически устойчивыми, а лишь устойчивыми. Переходя к переменным y, z, вводимым при доказательстве теоремы 4, в силу инвариантности множества M_p, заключаем, что для этих решений $y = 0 \; \forall \, t \geq t_0$, а для переменной z при $y = 0$ получаем систему $\dot{z} = f_r(z)$ с функцией Ляпунова $V_f(z) > 0, \dot{V}_f(z) = 0$. Отсюда следует, что имеется частный интеграл $V_f(z) = c$ и все решения лежат на его поверхностях уровня, которые отделены от нуля в силу положительной определенности функции $V_f(z)$. Поэтому с возрастанием времени все решения не стремятся к нулю, и переменные z являются устойчивыми по определению 1, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Теоремы 4, 5 решают вопрос выделения асимптотически устойчивых и устойчивых переменных для случая, когда для известной знакопостоянной производной $\dot{V}(x)$ сама функция $V(x)$ является знакоопределенной, знака, противоположного $\dot{V}(x)$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда функция $V(x)$ является знакопостоянной, знака, противоположного $\dot{V}(x)$. Важное значение для анализа имеет следующее свойство.

Свойство 1. *Пусть для системы (1) известна положительно постоянная функция $V(x)$, производная которой есть функция отрицательно постоянная. Тогда выполняется включение $\{x : V(x) > 0\} \supseteq \{x : \dot{V}(x) < 0\}$ и множество $\{x : V(x) = 0\}$ инвариантно.*

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения отметим, что предположение о нарушении включения приводит к противоречию при рассмотрении окрестностей точек, в которых $V(x) = 0$. Из данного включения следует, что $\{x : \dot{V}(x) = 0\} \supseteq \{x : V(x) = 0\}$. Поэтому для всех точек множества $\{x : V(x) = 0\}$ выполняется равенство $\dot{V}(x) = 0$, что на основании теоремы 1 означает инвариантность множества $\{x : V(x) = 0\}$. $\square$

Задачу выделения асимптотически устойчивых переменных в этой ситуации решает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть для системы (1) существует y-знакоопределенная функция $V(y)$ $\left(y^T = (y_1, ..., y_m) = (x_1, ..., x_m)\right)$, производная которой в силу системы (1) является знакопостоянной функцией $\dot{V}(y)$, знака, противоположного $V(y)$. Множество $M = \{y : \dot{V}(y) = 0\}$ представляется суммой множеств $M = \bigcup\limits_{\substack{i=1\\j=1}}^{s,s_i} M_{ij}$*

$$M_{ij} = \{y : \varphi_i(y) = 0, \dot{\varphi}_i(y) = 0, ..., y_i^{(j-1)}(y) = 0, \varphi_i^{(j)}(y) \neq 0, \nabla\varphi_i(y) \neq 0\},$$

$$M_{ij} \bigcap M_{kl} = \emptyset.$$

Предполагаем, что $V(y), \varphi_i(y)$ – функции, дифференцируемые достаточное число раз. Знакоопределенность функции $V(y)$ определяется формой конечного порядка, знакопостоянство $\dot{V}(y)$ и неравенства $\varphi_i^{(j)}(y) \neq 0$ – членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа m_{ij}, α_{ij} такие, что функция

$$V_f(y) = V(y) + \sum_{i,j=1}^{s,s_i} \alpha_{ij} V_{aij}(y)$$

будет y-знакоопределенной, а ее производная $\dot{V}_f(y)$ будет $y_{(1)}$-знакоопределенной, знака, противоположного $V_f(y)$, и нулевое решение системы (1) будет y-устойчиво и асимптотически $y_{(1)}$-устойчиво.

Здесь функции $V_{aij}(y)$ определены формулами (4),(7); $y_{(1)}^T = (y_{(1)1}, ..., y_{(1)k})$, $y_{(1)i} = \varphi_{pi}(y)$ – независимые функции, с помощью которых описываются инвариантные множества, содержащиеся в множествах M_{ij}.

Доказательство. На основании свойства 1 заключаем, что множество $\{y : V(y) > 0\}$ инвариантно. Используя лемму 4 и принимая $z_{(1)} = 0,\ z_{(2)} = z$, запишем систему (1) в виде

$$\dot{y} = F_1(y), \qquad \dot{z} = F_2(y, z). \tag{22}$$

В силу того, что $V = V(y), \dot{V} = \dot{V}(y)$, вместо системы (22) достаточно ограничиться рассмотрением системы

$$\dot{y} = F_1(y). \tag{23}$$

Тогда условия данной теоремы для системы (23) совпадают с условиями теоремы 4 для системы (1) и, следовательно, справедливо ее заключение, сформулированное в переменных y. Это заключение совпадает с утверждением теоремы 6. □

Замечание 6. Теорема 6 включает теорему о частичной асимптотической устойчивости и обобщения теоремы Барбашина–Красовского на частичную асимптотическую устойчивость [17], когда функция $V(x)$ знакопостоянна.

Теоремы 4–6 выделяют асимптотически устойчивые и устойчивые переменные в случаях, когда $V(x)$ – знакоопределенная, а $\dot{V}(x)$ – знакопостоянная функции, и в случаях, когда $V(x)$ и $\dot{V}(x)$ – знакопостоянные функции. Во втором случае требуется дальнейшая детализация характеристики движений относительно переменных, не участвующих в формировании функций $V, \dot{V}$.

Перейдем к изучению неустойчивых движений. В дополнение к теоремам Ляпунова и Четаева о неустойчивости движения метод дополнительных функций позволяет доказать следующую теорему [11, 12].

Теорема 7. *Пусть для системы (1) существует функция $V(x)$, производная которой является функцией знакопостоянной и представима в форме знакоопределенной функции $\dot{V}(y)$ меньшего числа переменных $y_1, ..., y_k$ $(k < n)$, причем множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ – инвариантно. При этом в сколь угодно малой окрестности B нуля существуют точки $x \in B \setminus M$, в которых функция $V(x)$ принимает значения того же знака, что и $\dot{V}(x)$. Тогда нулевое решение неустойчиво.*

Доказательство. Выберем достаточно малую окрестность B_0 нуля, в которой выполнены условия теоремы, и покажем, что в любой сколь угодно малой окрестности нуля $B \subset B_0$ найдется точка, начинающаяся в которой траектория системы (1) покидает B_0. Для удобства сделаем замену $y = (y_1, ..., y_n) = y(x)$, выделив подвектор $y^{(1)} = (y_1, ..., y_k)$, относительно которого производная $\dot{V}(y^{(1)})$ знакоопределена и который определяет множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ уравнением $y^{(1)} = 0$. Необходимо отметить, что ввиду инвариантности множества M траектории системы (1), начинающиеся в области $B_0 \setminus M$, не попадают в множество M, и поэтому для этих траекторий выполнено $\dot{V}(y^{(1)}) > 0$. Здесь и в дальнейшем функция $\dot{V}(y^{(1)})$ принята положительно определенной.

В силу условий теоремы начальная точка x_0, для которой $V(x_0) > 0$, присутствует в любой сколь угодно малой окрестности нуля и $x_0 \in B_0 \setminus$ $\setminus M$. Вдоль траектории, начинающейся в этой точке, выполнено неравенство $V(x(t)) > V(x_0)$ и, поскольку $V(x)$ непрерывна и $V(0) = 0$, то $\|y^{(1)}(t)\| \geq$ $\geq \alpha > 0$. Тогда в силу знакоопределенности $\dot{V}(y^{(1)})$ имеем $\dot{V}(y^{(1)}(t)) \geq \beta > 0$. Следовательно,

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{V}(y^{(1)}(\tau))d\tau \geq V(x_0) + \beta(t - t_0).$$

Отсюда следует, что $V(x(t))$ возрастает с увеличением времени, и траектория $x(t)$ покидает заданную окрестность нуля, сколь бы близко к нулю не была выбрана начальная точка x_0. Это и доказывает неустойчивость нулевого решения. □

Замечание 7. Теорема 7 обобщает первую теорему Ляпунова о неустойчивости на случай знакопостоянной производной, совпадая с ней, когда производная становится знакоопределенной. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости и теорема Четаева о неустойчивости представляют два различных самостоятельных направления исследований неустойчивости, отличные от теоремы 7 и первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

5. Разбиение на варианты. Теоремы 4–7 являются основными, поскольку с их помощью решается задача установления свойства асимптотической устойчивости, устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы (1), если для нее известна функция со знакоопределенной производной. Для полной классификации переменных, т.е. решения задачи 1, может потребоваться несколько функций и проведение анализа поэтапно. Начнем с рассмотрения первого этапа.

Пусть для системы (1) известна функция $V(x)$ со знакопостоянной производной $\dot{V}(x)$. Для определенности будем считать $\dot{V}(x)$ отрицательно постоянной. С помощью Центральной теоремы переходим к функции $V(x)$ с отрицательно постоянной производной $\dot{V}(x)$, для которой множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ инвариантно (для упрощения записи у преобразованной функции сохранено исходное обозначение). В зависимости от значений функции $V(x)$ в окрестности нуля возможны следующие пять вариантов:

1. $V(x)$ – положительно определенная функция;
2. $V(x)$ – положительно постоянная функция;
3. $V(x)$ – отрицательно определенная функция;
4. $V(x)$ – отрицательно постоянная функция;
5. $V(x)$ – знакопеременная функция.

Переходя к рассмотрению вариантов, заключаем, что для варианта 1 вопрос об устойчивости полностью решается применением теорем 4, 5. Вектор x разделяется на два подвектора $x = (x_{(1)}, x_{(2)})$, и нулевое решение асимптотически устойчиво по переменной $x_{(1)}$ и устойчиво по переменной $x_{(2)}$.

Для анализа варианта 2 применяется теорема 6. Вектор x разделяется на три подвектора $x = (x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$, и нулевое решение асимптотически устойчиво по переменной $x_{(1)}$ и устойчиво по переменной $x_{(2)}$. Множество $M = \{x : x_{(1)} = 0, x_{(2)} = 0\}$ является инвариантным, на нем $\dot{V}(x)$=0, и для исследования поведения переменной $x_{(3)}$ требуется построение новой функции $V_s(x)$.

Рассмотрение вариантов 3–5 проводится с применением теоремы 7. Нулевое решение является неустойчивым. Более детальная характеристика поведения решения требует дополнительного анализа.

Таким образом, теоремы 4–7 позволили сделать заключение о том, является ли нулевое решение асимптотически устойчивым, устойчивым либо неустойчивым, а также некоторые заключения о частичной асимптотической устойчивости и частичной устойчивости. Однако для полной характеристики переменных в общей ситуации одного этапа может оказаться недостаточно. Следующим шагом исследования будет описание всей информации о переменных, которую можно получить на одном этапе для заданной функции $V(x)$ со знакопостоянной производной.

6. Устойчивые движения. Опишем случаи, в которых движение является устойчивым, либо асимптотически устойчивым по всем и по части переменных. Движение является асимптотически устойчивым (по всем переменным) только в первом варианте при дополнительном условии $M = \emptyset$, при этом все переменные являются асимптотически устойчивыми. В вариантах 1, 2 движение асимптотически устойчиво по переменной $x_{(1)}$, и переменные $x_{(1)}$ являются асимптотически устойчивыми.

Движение является устойчивым по переменной $x_{(2)}$ для вариантов 1, 2. Кроме того, движение устойчиво по переменной $x_{(2)}$ и для варианта 3, если подвектор $x_{(2)}$ ввести следующим образом: $x = (x_{(1)}, x_{(2)})$, $M = \{x : x_{(1)} = = 0\}$. При этом $\dot{V}(x_{(2)}) = 0$ и функция $V(x_{(2)}) = V(0, x_{(2)})$ знакоопределена в силу знакоопределенности функций $\dot{V}(x_{(1)})$, $V(x_{(1)}, x_{(2)})$. Отсюда заключаем, что существует знакоопределенный интеграл $V(x_{(2)}) = \mathrm{const}$, что влечет за собой устойчивость по переменной $x_{(2)}$. Во всех трех случаях переменные $x_{(2)}$ являются устойчивыми.

Отметим, что устойчивые переменные могут появиться при исследовании решений системы (1) для вариантов 2, 4, 5 в инвариантном множестве M с использованием новой функции V_s со знакопостоянной производной.

7. Неустойчивые движения. Движения системы (1) неустойчивы для вариантов 3–5. Это заключение получается с использованием теоремы 7. Опишем подробнее ее применение для каждого из вариантов.

Для варианта 3 отмечаем, что для всех точек некоторой окрестности нуля функция $V(x)$ принимает отрицательные значения, и на основании теоремы 7 отсюда следует неустойчивость нулевого решения. В множестве M, как показано выше, движение устойчиво относительно переменных, его определяющих.

Рассматривая вариант 4, заметим, что $V(x)$ принимает отрицательные значения в любой сколь угодно малой окрестности из $B_0 \setminus M$, поскольку предположение противного означает, что для всех $x \in B_0 \setminus M$ имеем $V(x) = 0$. Отсюда следует, что $\dot{V}(x) = 0$, однако во всех этих точках имеем $\dot{V}(x) < 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 7, и нулевое решение неустойчиво. Поведение системы в инвариантном множестве M требует дополнительного исследования.

Для варианта 5 в любой сколь угодно малой окрестности из $B_0 \setminus M$ функция $V(x)$ принимает значения разных знаков. Случаи, когда она принимает значения одного знака, рассмотрены в вариантах 2, 4. Применяя теорему 7, получаем заключение о неустойчивости движения. Как и в вариантах 2, 4, поведение системы в множестве M для варианта 5 требует дополнительного исследования.

8. Результаты одного этапа и полный анализ. Вся информация, которую можно получить об устойчивости нулевого решения при известной функции со знакопостоянной производной, приведена в п.п. 5–7. Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица результатов одного этапа

№	Описание варианта	Преобразованная функция и результат	Полнота анализа
1.	$\dot V(x) \le 0$, $V(x) > 0$	$V(x_{(1)}, x_{(2)}) = V_1(x_{(1)}) + V_2(x_{(1)}, x_{(2)})$ $\dot V(x_{(1)}, x_{(2)}) = \dot V_1(x_{(1)}),\ \dot V_2(x_{(1)}, x_{(2)}) = 0$ $V_1(x_{(1)}) > 0, V_2(0, x_{(2)}) > 0,\ \dot V_1(x_{(1)}) < 0$ $x_{(1)}$ – асимптотически устойчивые переменные $x_{(2)}$ – устойчивые переменные	полный анализ
2.	$\dot V(x) \le 0$, $V(x) \ge 0$	$V(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = V_1(x_{(1)}) +$ $+ V_2(x_{(1)}, x_{(2)})$ $\dot V(x) = \dot V(x_{(1)}), \dot V(x_{(1)}, x_{(2)}) = 0$ $V_1(x_{(1)}) > 0, V_2(0, x_{(2)}) > 0, \dot V_1(x_{(1)}) < 0$ $x_{(1)}$ – асимптотически устойчивые переменные $x_{(2)}$ – устойчивые переменные	не изучено инвариантное множество $M = \{x : x_{(1)} =$ $= x_{(2)} = 0\}$
3.	$\dot V(x) \le 0$, $V(x) < 0$	$V(x_{(1)}, x_{(2)}) = V_1(x_{(1)}) + V_2(x_{(1)}, x_{(2)})$ $\dot V(x) = \dot V_1(x_{(1)}), \dot V_2(x_{(1)}, x_{(2)}) = 0$ $V_1(x_{(1)}) < 0, V_2(0, x_{(2)}) < 0, \dot V_1(x_{(1)}) < 0$ $x_{(2)}$ – устойчивые переменные движение неустойчиво	не выделены неустойчивые переменные
4.	$\dot V(x) \le 0$, $V(x) \le 0$	$M = \{x : \dot V(x) = 0\}$ – инвариантное множество	не выделены неустойчивые переменные;
5.	$\dot V(x) \le 0$, $V(x) \gtrless 0$	$\forall\ B_0\ \exists\ x^* \in B_0 \backslash M : V(x^*) < 0$ движение неустойчиво	не изучено множество M

Из таблицы видно, что для всех пяти вариантов удается получить заключение об устойчивости нулевого решения. Однако решение задачи 1, что соответствует полному анализу, получено лишь для первого варианта. Для вариантов 2, 4, 5 остался открытым вопрос о поведении системы в инвариантном множестве M. Кроме того, самостоятельное значение имеет задача исследования неустойчивых движений, а именно выделение неустойчивых переменных. Этот вопрос присутствует в вариантах 3–5, и его решение в полном объеме для нелинейных систем требует дополнительного исследования (даже в пределах одного этапа).

Таким образом, на следующем этапе необходимо исследовать поведение решений системы (1) в инвариантном множестве M для вариантов 2, 4, 5. Для этого вектор x разбивается на два подвектора $x = (x_{(1)}, x_{(2)})$ таким образом, что инвариантное множество M описывается уравнением $x_{(1)} = 0$. Дальнейшее исследование может быть осуществлено двумя способами.

Первый способ состоит в построении функции $V(x)$ со знакопостоянной производной $\dot{V}(x_{(2)})$. При втором способе рассматривается система $\dot{x}_{(2)} = f(0, x_{(2)})$ и строится функция $V(x_{(2)})$ со знакопостоянной производной $\dot{V}(x_{(2)})$. По результатам этого анализа делается заключение о необходимости следующего этапа. Число этапов конечно и не превышает n – размерности системы (1).

В качестве простого примера использования n этапов для полного решения задачи 1 приведем линейную диагональную систему $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$ $(i = 1, ..., n)$ и функции $V_i = x_i^2$ $(i = 1, ..., n)$, используемые на i-том этапе.

9. Примеры. Продемонстрируем применение полученных результатов к исследованию устойчивости линейных и нелинейных систем. Два первых примера представляют системы с асимптотически устойчивыми и устойчивыми переменными. Следующие два примера иллюстрируют свойство неустойчивости.

Пример 1 [6]. Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ &\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4 + b x_3^2, \\ &\dot{x}_3 = \omega x_4 + c x_4^2 - b x_2 x_3, \\ &\dot{x}_4 = -\omega x_3 - c x_3 x_4 + a x_2^3 + \lambda_4 x_4^3. \end{aligned} \tag{24}$$

В качестве функции Ляпунова примем $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Для производной имеем выражение $\dot{V} = 2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_4 x_4^4)$. Отсюда получаем $\dot{V} \leq 0$ при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_4 < 0$. Множество $M = \{x : \dot{V} = 0\}$ определяется уравнениями $\varphi_1 = x_1 = 0,\ \varphi_2 = x_2 = 0,\ \varphi_3 = x_4 = 0$. Дополняя эти уравнения еще одним уравнением $\dot{\varphi}_2 = \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4 + b x_3^2 = 0$, получаем, что при $b \neq 0$ система уравнений $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ имеет только нулевое решение, и на основании теоремы 1 множество M не содержит целых полутраекторий. Поэтому, применяя теорему Барбашина–Красовского [3], заключаем, что нулевое решение системы (24) асимптотически устойчиво.

Для построения функции Ляпунова со знакоопределенной производной применим метод дополнительных функций. В данном случае имеем $\varphi_1 =$

$= x_1,\ \varphi_2 = x_2,\ \varphi_3 = x_4$, поэтому

$$(\nabla\varphi(x), f(x)) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4 + b x_3^2, -\omega x_3 - c x_3 x_4 + a x_2^3 + \lambda_4 x_4^3)^T.$$

Отсюда по формуле (4) находим

$$V_a = [\lambda_1^2 x_1^2 + (\lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4 + b x_3^2)^2 + (-\omega x_3 - c x_3 x_4 + a x_2^3 + \lambda_4 x_4^3)^2]^m \times$$
$$\times[\lambda_1 x_1^2 + (\lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4 + b x_3^2) x_2 + (-\omega x_3 - c x_3 x_4 + a x_2^3 + \lambda_4 x_4^3) x_4]. \quad (25)$$

Представление (5) для системы (24) имеет вид

$$f_M = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4, \omega x_4 + c x_4^2 - b x_2 x_3^2, -c x_3 x_4 + a x_2^3 + \lambda_4 x_4^3)^2)^T,$$
$$f_N = (0, b x_3^2, 0, -\omega x_3)^T. \quad (26)$$

С учетом формул (6), (26) получаем упрощенное выражение для функции V_a:

$$V_{af} = (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)^m (b x_2 x_3^2 - \omega x_3 x_4). \quad (27)$$

Производные функций (25), (27) принимают на множестве M значение

$$\dot V_a = (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)^{m+1}.$$

Используем теорему 4 для построения функции Ляпунова со знакоопределенной производной. Принимаем $m = 4,\ \alpha = -1$ и получаем

$$V_f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)^4 (b x_2 x_3^2 - \omega x_3 x_4).$$

Для $\dot V_f$ находим выражение

$$\dot V_f = 2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_4 x_4^4) - (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)^5 - (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)^3 \times$$
$$\times\big[\big(8(2b^2 x_3^3 + \omega^2 x_3)(b x_2 x_3^2 - \omega x_3 x_4) + (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)(2b x_2 x_3 -$$
$$-\omega x_4)\big)(\omega x_4 + c x_4^2 - b x_2 x_3) + b x_3^2 (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)(\lambda_2 x_2 - a x_2^2 x_4) -$$
$$-\omega x_3 (b^2 x_3^4 + \omega^2 x_3^2)(-c x_3 x_4 + a x_2^3 + \lambda_4 x_4^3)\big].$$

Пример 2. [15] Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= \lambda_1 x_1 + a x_2^2 + b x_3^3, \\ \dot x_2 &= -a x_1 x_2 + c x_2 x_3 x_4, \\ \dot x_3 &= \omega x_4 + \lambda_2 x_2^2 x_3 - b x_1 x_3^2, \\ \dot x_4 &= -\omega x_3 - c x_2^2 x_3. \end{aligned} \quad (28)$$

При $\lambda_1\lambda_2\omega ac \neq 0$ для системы (28) нуль является изолированной особой точкой. Для исследования устойчивости нулевого решения рассмотрим функцию
$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$
Для ее производной находим выражение
$$\dot{V} = 2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 x_3^2).$$
Отдельно рассмотрим два случая:

1) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \omega abc \neq 0;$ 2)$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0,\ \omega ac \neq 0,\ b = 0.$

Исследование начнем с изучения множества M, на котором $\dot{V}(x) = 0$.

В первом случае множество M состоит из трех множеств: $M = M_1 \bigcup M_2 \bigcup \bigcup M_3$, где
$$M_1 = \{x : \varphi_{11} = x_1 = 0, \varphi_{12} = x_2 = 0\}, M_2 = \{x : \varphi_{21} = x_1 = 0, \varphi_{22} = x_3 = 0\},$$
$$M_3 = M_1 \bigcap M_2 = \{x : \varphi_{31} = x_1 = 0, \varphi_{32} = x_2 = 0, \varphi_{33} = x_3 = 0\}.$$
При этом предполагается, что точки множества $M_1 \bigcap M_2$ исключены из множеств M_1, M_2. Рассмотрим поведение производных функций $\varphi_i(x)$ на множествах M_i. На множестве M_1 имеем $\dot{\varphi}_{11} = bx_3^2,\ \dot{\varphi}_{12} = 0$. Так как точки множества M_1, для которых $x_3 = 0$, отнесены к множеству M_3, то $\dot{\varphi}_{11} \neq 0$. На множестве M_2 – $\dot{\varphi}_{21} = ax_2^2,\ \dot{\varphi}_{22} = \omega x_4$ и $\dot{\varphi}_{11}^2 + \dot{\varphi}_{22}^2 > 0$. На множестве M_3 – $\dot{\varphi}_{31} = 0,\ \dot{\varphi}_{32} = 0,\ \dot{\varphi}_{33} = \omega x_4$ и $\dot{\varphi}_{33} \neq 0$. На основании теоремы 4 существуют числа $m_1, m_2, m_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что функция
$$V_f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \alpha_1(bx_3^2)^{2m_1} bx_3^2 x_1(x_1^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)+$$
$$+\alpha_2(a^2x_2^4 + \omega^2 x_4^2)^{m_2}(ax_2^2 x_1 + \omega x_4 x_3)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)+$$
$$+\alpha_3(\omega x_4)^{2m_3}\omega x_4 x_3(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2) \tag{29}$$
будет определенно положительной, а ее производная в силу системы (28) – определенно отрицательной. Таким образом, в первом случае нулевое решение системы (28) асимптотически устойчиво. Отметим, что при построении функции (29) использованы упрощенные дополнительные функции.

Второй случай отличается от первого только тем, что на множестве M_1 имеем $\dot{\varphi}_{11} = \dot{\varphi}_{12} = 0$ (также и все высшие производные равны нулю). На основании теоремы 1 заключаем, что множество M_1 инвариантно.

Функция V_f будет иметь вид (29), где надо положить $b = 0$, и останется положительно определенной, а ее производная, в отличие от первого случая, будет отрицательно постоянной и будет обращаться в нуль только на множестве M_1, т.е. будет отрицательно (x_1, x_2)-постоянной. Таким образом, на основании теоремы 4 во втором случае нулевое решение системы (28) устойчиво (по всем переменным) и асимптотически (x_1, x_2)-устойчиво. Максимальность множества частичной асимптотической устойчивости демонстрируется тем, что для $x_1 = 0, x_2 = 0$ система принимает вид $\dot{x}_3 = \omega x_4,\ \dot{x}_4 = -\omega x_3$. Движение по x_3, x_4 устойчиво в силу наличия интеграла $V_{f0} = x_3^2 + x_4^2$. Движение в малой окрестности нуля можно охарактеризовать как вращательное, стремящееся при $t \to \infty$ к вращению по окружности $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3^2 + x_4^2 = c^2$.

Рассмотрим две линейные системы для иллюстрации применения теоремы 7 и возможности ее использования в дальнейшем исследовании особых точек. Для простоты системы выбраны таким образом, что поведение траекторий в окрестности нуля очевидно, и выбор функций Ляпунова в форме, удовлетворяющей теореме 7, не вызывает затруднений.

Пример 3. Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \qquad \dot{x}_2 = -\omega x_3, \qquad \dot{x}_3 = \omega x_2. \tag{30}$$

Для функции $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ имеем $\dot{V} = 4x_1^2$. Производная $\dot{V}$ положительно постоянна. Множество $M = \{x : \dot{V} = 0\}$ представляет собой плоскость Ox_2x_3 и является инвариантным множеством. Функция V положительно определена. Таким образом, условия теоремы 7 выполнены и нулевое решение системы (30) неустойчиво. Для дальнейшего исследования поведения системы в плоскости Ox_2x_3 можно использовать начальную функцию V, приняв $x_1 = 0$. Тогда в инвариантном множестве $M = \{x : x_1 = 0\}$ система (30) принимает вид

$$\dot{x}_2 = -\omega x_3, \qquad \dot{x}_3 = \omega x_2. \tag{31}$$

Для функции $V = x_2^2 + x_3^2$ получаем $\dot{V} = 0$, что означает устойчивость нулевого решения системы (31). Таким образом, использование функции $V(x)$ сначала для исходной системы (30), а затем для инвариантного множества, позволило получить полную картину движения для системы (30). Траектории являются спиралями, расположенными на цилиндрах $x_2^2 + x_3^2 = c^2$, вдоль которых точки расходятся от окружностей $x_1 = 0,\ x_2^2 + x_3^2 = c^2$, удаляясь вдоль оси Ox_1 в бесконечность и вращаясь вокруг нее с угловой скоростью ω.

Отметим, что возможность получения полной картины поведения решения системы (30) обеспечена выбором функции $V(x)$. Для установления неустойчивости с использованием теоремы 7 можно применить функцию $V = x_1^2$. Однако, для дальнейшего анализа системы в инвариантном множестве эта функция непригодна.

Несколько более сложный и разнообразный характер носят траектории следующей системы.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \qquad \dot{x}_2 = 3x_2, \qquad \dot{x}_3 = -4x_3. \tag{32}$$

Исследование системы (32) начнем с функции $V = x_1^2 + x_2^2$. Для ее производной имеем выражение $\dot{V} = 4x_1^2 + 6x_2^2$. Условия теоремы 7 выполнены, и нулевое решение системы (32) неустойчиво. Для анализа поведения системы в инвариантном множестве $M = \{x : x_1 = x_2 = 0\}$ рассматриваемая функция ничего не дает. Однако функция $V = x_3^2$ показывает, что нулевое решение уравнения $\dot{x}_3 = -4x_3$ является асимптотически устойчивым по второй теореме Ляпунова. Эта же функция $V = x_3^2$ с применением теоремы Ризито позволяет установить асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (32) по отношению к переменной x_3 ввиду того, что множество $M = \{x : \dot{V} = 0\}$ является инвариантным и $\dot{V} < 0$ вне M.

Покажем, как этот же результат можно получить с помощью функций $V_i = x_i^2,\ i = 1, 2$. Для каждой из этих функций условия теоремы 7 выполнены, и подтверждается полученный вывод о неустойчивости нулевого решения системы (32). Дальнейший анализ для функций V_i проводится по одной и той же схеме. Поэтому выполним его для функции $V_1 = x_1^2$. В инвариантном множестве $M = \{x : x_1 = 0\}$ система (32) принимает вид

$$\dot{x}_2 = 3x_2, \qquad \dot{x}_3 = -4x_3. \tag{33}$$

Начальная функция V_1 ничего не дает. Исследование можно продолжить с помощью функции $V_2 = x_2^2$. С помощью теоремы 7 получаем неустойчивость нулевого решения системы (33), а затем с помощью второй теоремы Ляпунова устанавливаем асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения $\dot{x}_3 = -4x_3$ с использованием функции $V_3 = x_3^2$. Эту же функцию можно применить к системе (33) и с помощью теоремы Ризито установить асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (33) по отношению к переменной x_3. Затем неустойчивость нулевого решения уравнения $\dot{x}_2 = 3x_2$ устанавливаем с помощью функции V_2, применив первую теорему Ляпунова о неустойчивости.

10. Механические системы. В рассмотренных примерах 1–4 основное внимание уделено асимптотической устойчивости и неустойчивости движений. Устойчивые движения возникают, в основном, в качестве сопутствующих, являясь либо предельными движениями, либо характеризуя относительные движения, в частности, и при общей неустойчивости системы в целом. Устойчивые переменные выделены в вариантах 1–3, и они сопровождаются важным дополнительным свойством – наличием интеграла движения, который получается явным образом из вида преобразованной функции $V(x)$ (см. таблицу). Этот результат сформулируем в форме теоремы.

Теорема 8. *Пусть знакоопределенная функция* $V(x)$ *преобразована к виду* $V(x_1, x_2) = V_1(x_{(1)}) + V_2(x_1, x_2)$, *при этом* $\dot{V}_2(x_1, x_2) = 0$, $V_1(x_1)$ *и* $\dot{V}_1(x_1)$*– знакоопределенные функции. Тогда у системы (1) существует интеграл* $V_2(x_1, x_2) = const$.

Выделяемые теоремой 8 переменные являются устойчивыми и асимптотически устойчивыми (варианты 1, 2: функции $V_1(x_1)$, $\dot{V}_1(x_1)$ разных знаков), либо устойчивыми и неустойчивыми (вариант 3: функции $V_1(x_1)$, $\dot{V}_1(x_1)$ одного знака). Из теоремы 8 вытекает следствие.

Следствие 1. *Все переменные системы (1) являются устойчивыми тогда и только тогда, когда существует знакоопределенный интеграл, который является функцией Ляпунова для нулевого решения.*

Именно для решения вопроса об устойчивости в случае, описанном в следствии 1, Н.Г. Четаев предложил метод связки интегралов [20 – 22] для построения функции Ляпунова. Если же в случае устойчивого решения среди переменных имеются асимптотически устойчивые, то функция Ляпунова имеет более сложный вид. Тем не менее, она включает в себя интеграл в качестве составной части. Таким образом, задачи исследования устойчивых решений и интегрирования динамических систем являются, в определенном смысле, обратными друг другу: зная функцию Ляпунова, можно указать интеграл и наоборот. Это означает, что результаты из одной области можно использовать при решении задач из другой области. Продемонстрируем это на двух классических задачах динамики систем твердых тел.

Пример 5. Равновесие твердого тела с маховиком. Рассмотрим движение относительно центра масс твердого тела с маховиком. Уравнения движения можно записать в форме [23]

$$(A\omega + \lambda \mathbf{e})^\bullet = (A\omega + \lambda \mathbf{e}) \times \omega, \qquad \dot{\lambda} = -\alpha\lambda. \tag{34}$$

Здесь ω – угловая скорость тела, λ – величина кинетического момента маховика, $\mathbf{e}$ – единичный вектор направления кинетического момента маховика, A – тензор инерции системы тело–маховик, α – коэффициент усиления.

Система (34) допускает положение равновесия $\omega = 0, \lambda = 0$. Для исследования его на устойчивость в качестве функции Ляпунова примем функцию

$$V = (A\omega + \lambda \mathbf{e})^2 + \lambda^2. \tag{35}$$

Для производной $\dot{V}(x)$ имеем выражение $\dot{V} = -2\alpha\lambda^2$. Функция (35) имеет вид: $V = V_1(\lambda) + V_2(\lambda, \omega)$, где $V,\ V_1(\lambda) = \lambda^2,\ V_2(0, \omega) = (A\omega)^2$ – положительно определенные функции; $\dot{V}_2(\lambda, \omega) = 0;\ \dot{V}_1(\lambda)$ при $\alpha > 0$ является отрицательно определенной функцией; множество $M = \{(\lambda, \omega) : \lambda = 0\}$ – инвариантно. На основании теоремы 4 заключаем, что для системы (34) переменные ω_i являются устойчивыми, а переменная λ – асимптотически устойчивая.

Применяя теорему 8 к функции (35), устанавливаем, что у системы (34) существует интеграл $V_2(\lambda, \omega) = (A\omega + \lambda \mathbf{e})^2$, при этом частный интеграл $V_2(0, \omega) = (A\omega)^2$ – положительно определенный.

Таким образом, знание функции Ляпунова (35) позволило получить интеграл системы (34). С другой стороны, знание этого интеграла не приводит непосредственно к построению функции Ляпунова (например, методом Четаева), а требует дополнительных рассуждений.

Пример 6. Движение гироскопа Горячева–Чаплыгина. Движение гироскопа Горячева–Чаплыгина описывается уравнениями [24]

$$
\begin{gathered}
4\dot{p} = 3qr, \quad 4\dot{q} = -3pr - a\gamma_3, \quad \dot{r} = a\gamma_2, \\
\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2,
\end{gathered} \tag{36}
$$

где p, q, r и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции на подвижные оси, соответственно, вектора угловой скорости тела и единичного вектора вертикали, a – параметр, характеризующий распределение масс тела.

Уравнения (36) имеют интегралы

$$
\begin{aligned}
&J_1 = 4(p^2 + q^2) + r^2 - 2a\gamma_1 = c_1, \\
&J_2 = 4(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = c_2, \\
&J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned}
$$

При $c_2 = 0$ уравнения (36) допускают дополнительный интеграл [24]

$$
J_4 = r(p^2 + q^2) + ap\gamma_3 = c_4. \tag{37}
$$

Положению равновесия тела соответствуют следующие значения переменных:

$$
p_0 = q_0 = r_0 = 0, \quad \gamma_{10} = \pm 1, \quad \gamma_{20} = \gamma_{30} = 0. \tag{38}
$$

Для рассмотрения устойчивости решения (38) системы (36) введем возмущения

$$
p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = x_3, \quad \gamma_1 = \gamma_{10} + x_4, \quad \gamma_2 = x_5, \quad \gamma_3 = x_6
$$

и запишем уравнения и интегралы возмущенного движения

$$
\begin{aligned}
&4\dot{x}_1 = 3x_2x_3, \quad 4\dot{x}_2 = -3x_1x_3 - ax_6, \quad \dot{x}_3 = ax_5, \\
&\dot{x}_4 = x_3x_5 - x_2x_6, \quad \dot{x}_5 = -\gamma_{10}x_3 + x_1x_6 - x_3x_4, \\
&\dot{x}_6 = \gamma_{10}x_2 + x_2x_4 - x_1x_5.
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_{p1} = -2ax_4 + 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2, \\
&J_{p2} = 4\gamma_{10}x_1 + 4(x_1x_4 + x_2x_5) + x_3x_6, \\
&J_{p3} = 2\gamma_{10}x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2.
\end{aligned} \tag{40}
$$

Постоянные интегралов (40) выбраны таким образом, чтобы в начале координат интегралы обращались в нуль.

Выберем в качестве функции Ляпунова интеграл

$$
V = \frac{\gamma_{10}}{a}\left[4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2\right] + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2. \tag{41}
$$

На основании следствия 1 заключаем, что при $a\gamma_{10} > 0$ все переменные системы (39) являются устойчивыми.

Поставим задачу получения из интеграла (41) новых интегралов. В качестве первого варианта рассмотрим две функции $V_{1s} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$, $V_{2s} = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$. Находим

$$\dot{V}_{1s} = 2\gamma_{10}(x_2x_6 - x_5x_3) = -2\gamma_{10}\dot{x}_4, \qquad \dot{V}_{2s} = 2a(x_5x_3 - x_2x_6) = 2a\dot{x}_4.$$

Отсюда следует, что функции $V_{1f} = V_{1s} + 2\gamma_{10}x_4$, $V_{2f} = V_{2s} - 2ax_4$ будут интегралами системы (39). При этом $V_{1f} = J_{p3}$, $V_{2f} = J_{p1}$ и $V = \dfrac{\gamma_{10}}{a}J_{p1} + J_{p3}$.

Еще пару интегралов можно получить, взяв одним из них J_{p2}. Тогда второй интеграл получается из формулы (41) как $J = V - J_{p2}$. В силу построения эти четыре интеграла зависимы. Независимыми являются три классических интеграла (40).

Для получения четвертого независимого интеграла можно использовать частный интеграл (37), который на инвариантном многообразии $M = \{x : J_{p2} = 0\}$ является независимым от известных трех интегралов (40). Однако эта задача, ввиду своей сложности, представляет предмет самостоятельного исследования.

Заключение. Полученные в данной работе результаты: дополнительные функции, Центральная теорема, новые теоремы об устойчивости и неустойчивости, позволяют говорить о создании метода дополнительных функций в теории устойчивости. Этот метод открывает новые возможности в решении задач устойчивости и привел к формулировке новых задач, решение которых позволяет давать более детальную (практически исчерпывающую) характеристику решений дифференциальных уравнений относительно свойства устойчивости. Подтверждением этого является выполненное в настоящей работе решение задачи устойчивости для нелинейных систем со знакопостоянной производной. Вместе с тем, исследование показало отсутствие подходов к выделению неустойчивых переменных, что ставит эту задачу, наряду с задачей 2 данной статьи, в число первоочередных для решения. Решение этих двух задач является необходимым для создания конструктивной теории устойчивости.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 472 с.; Ляпунов А.М. Собр. соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
2. *Красовский Н.Н.* Критерии, основанные на функциях Ляпунова со знакопостоянными производными. Дополнение III к монографии *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – С. 463–467.
3. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**. № 3. – С. 453–456.
4. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parziale // Ann. Math. Pura Appl. – 1970. – **84**. – P. 279–292.
5. *Красовский Н.Н.* Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1955. – **101**, № 1. – С. 17–20.
6. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина—Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.

7. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины. – 2008. – № 12. – С. 22–27.
8. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 5–15.
9. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. – Bolonga: Zanichelli, 1952. – **2**. – 671 p. = *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1951. – **2**, ч. 2. – 555 с.
10. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела, Киев: Наук. думка, 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
11. *Ковалев А.М.* Инвариантность и неустойчивость // Прикл. математика и механика. – 2009. – В печати.
12. *Ковалев А.М.* Решение задач неустойчивости с использованием метода дополнительных функций // Докл. НАН Украины. – 2009, № 11. – С. 21–27.
13. *Ковалев А.М.* Интегрируемость и устойчивость // Прикл. математика и механика. – 2009. – В печати.
14. *Ковалев А.М.* Выделение устойчивых переменных нелинейных систем с использованием метода дополнительных функций // Докл. НАН Украины. – 2009. – В печати.
15. *Ковалев А.М.* Инвариантность и асимптотическая устойчивость // Прикл. математика и механика. – 2009. – В печати.
16. *Ковалев А.М.* Метод дополнительных функций в задачах частичной устойчивости // Докл. НАН Украины. – 2009. – № 7. – С. 17–23.
17. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
18. *Кириченко В.В., Ковалев А.М.* Построение функций с положительнопостоянной второй производной для линейной системы дифференциальных уравнений // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2008. – **17**. – С. 74–79.
19. *Румянцев В.В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных // Прикл. математика и механика. – 1971. – **35**, вып. 1. – С. 138–143.
20. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращательных движений снаряда // Там же. – 1946. – **10**, вып. 1. – С. 135–138.
21. *Четаев Н.Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа // Там же. – 1954.– **18**, вып. 1. – С. 457–458.
22. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
23. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.
24. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке. (Сообщено 28 дек. 1899 г. В Моск. мат. об-ве). – Собр. соч. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. – Т. 1.– С. 118–124. (Изд. 1-е. – Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1901. – **10**, вып. 2. – С. 32–34).

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.10.09