ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 62-50:519.7

©2008. **В.Ф. Щербак**

СИНХРОНИЗАЦИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ГИРОСТАТОВ

Рассмотрены задачи, возникающие при управлении движением системы из двух идентичных гиростатов, а именно: построение нелинейного наблюдателя и синтез закона управления, который решает задачу синхронизации вращений ведомого и ведущего гиростатов при неполной информации об их движении.

1. Задача синхронизации угловых скоростей идентичных гиростатов. Одно из направлений исследований в современной теории управления связано с задачами обеспечения предписанного движения для группы автономно управляемых устройств. В частности, таковой является задача о согласованном движении группы спутников [1]. Предлагаемая в работе [1] схема ее решения, в которой один из спутников (ведущий) передает информацию о своем движении остальным (ведомым), позволяет свести эту задачу к задаче об управляемой синхронизации вращений двух гиростатов. В рассматриваемой ниже постановке задачи эта информация не является полной: не все компоненты вектора угловой скорости ведущего спутника известны. В этом случае, при синтезе закона управления ведомого гиростата, фазовый вектор ведущего гиростата должен быть восстановлен (решена задача наблюдения) либо закон управления вращением ведомого гиростата должен быть основан только лишь на информации о собственном движении и движении ведущего гиростата (задача синхронизации движения систем при неполной информации).

В работе рассмотрены обе задачи. Предлагаемый способ решения основан на изложенном в [2] методе синтеза инвариантных многообразий для траекторий расширенной системы дифференциальных уравнений, описывающих движение ведущей и ведомой систем. В основе решения задачи синтеза управлений использован тот факт, что для систем данной структуры любое гладкое многообразие, при соответствующем выборе управлений, может стать инвариантным, а при определенных условиях – глобально притягивающим для всех траекторий.

В качестве уравнений движения гиростата, управляемого с помощью расположенных на нем трех роторов, возьмем уравнения [3]

$$\begin{aligned} A_1\dot\omega_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 - \dot\lambda_1, \\ A_2\dot\omega_2 &= (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 - \dot\lambda_2, \\ A_3\dot\omega_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 - \dot\lambda_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости носителя. Управлением является $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ –

вектор гиростатического момента, характеризующий вращение роторов.

Будем считать, что выполнены следующие предположения:

(i) Гиростаты имеют одни и те же моменты инерции A_1, A_2, A_3. Тогда система (1), записанная в переменых $p = (p_1, p_2, p_3),\ q = (q_1, q_2, q_3)$, описывает движение ведомого объекта

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{p}_1 &= (A_2 - A_3)p_2p_3 + q_2p_3 - q_3p_2 - \dot{q}_1,\\
A_2\dot{p}_2 &= (A_3 - A_1)p_1p_3 + q_3p_1 - q_1p_3 - \dot{q}_2,\\
A_3\dot{p}_3 &= (A_1 - A_2)p_1p_2 + q_1p_2 - q_2p_1 - \dot{q}_3.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(ii) Ведущий гиростат не является управляемым и имеет постоянный гиростатический момент, т.е. $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_2 = \dot{\lambda}_3 = 0$ в системе уравнений (1).

(iii) Выходом системы (1) – информацией, которая используется при формировании закона управления ведомомым гиростатом – являются величины $\omega_1(t), \omega_2(t), \Lambda$.

Далее будем называть законы управления допустимыми, если они являются функциями только лишь состояния ведомого гиростата и выхода системы (1). Вначале рассмотрим задачу определения значений неизвестной функции времени $\omega_3(t)$.

2. Определение угловой скорости ведущего гиростата. Рассмотрим задачу восстановления значений $\omega_3(t)$ как задачу наблюдения системы (1) по выходу (iii). Указанная система обладает свойством наблюдаемости [3] в некоторой области $\Omega \subset R^3$, а значит поставленная задача имеет единственное решение в этой области. Далее будем предполагать, что решения $\omega(t)$ системы (1) ограничены и принадлежат Ω.

В качестве уравнений наблюдателя для системы (1) выберем уравнения (2), в правые части которых подставим вместо переменных p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 соответственно известные функции времени $\omega_1(t), \omega_2(t)$ и параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Величины $\dot{q}_i$ заменим неопределенными пока функциями u_i – компонентами вектора управления, с помощью которого будем конструировать уравнения наблюдателя. В результате имеем

$$
\begin{aligned}
A_1\dot{p}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2p_3 + \lambda_2p_3 - \lambda_3\omega_2 - u_1,\\
A_2\dot{p}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1p_3 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1p_3 - u_2,\\
A_3\dot{p}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 - u_3.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Полученная система дифференциальных уравнений (3) является формальной системой, предназначенной для синтеза управлений, решающих задачу наблюдения. Она не может быть истолкована как система, описывающая движение некоторого гиростата, так как, в частности, $\dot{\lambda}_i \neq u_i,\ \ i = 1, 2, 3$.

Нашей целью является выбор такого управления $u(.)$, которое гарантирует выполнение условия $\lim_{t\to\infty} p_3(t) = \omega_3(t)$.

Запишем уравнения ошибок – отклонений траекторий системы (3) от траекторий (1). Обозначим $e_i = \omega_i - p_i,\ \ i = 1, 2, 3$. Дифференциальные уравнения для отклонений имеют вид

$$\begin{aligned} &A_1\dot{e}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2 e_3 + \lambda_2 e_3 + u_1, \\ &A_2\dot{e}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1 e_3 - \lambda_1 e_3 + u_2, \\ &A_3\dot{e}_3 = u_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Задача наблюдения системы (1), при сделанных предположениях (i)–(iii), состоит в определении значений компоненты $\omega_3(t)$ по известной информации о значениях переменных $\omega_1(t), \omega_2(t), \Lambda$. При фиксированном управлении $u(.)$ решение задачи Коши для системы (3) с любым начальным условием $p(0) = p_0$ известно. Поэтому $e_i(t) = \omega_i(t) - p_i(t)$, $i = 1, 2$, – известные функции времени, а для определения $\omega_3(t)$ достаточно найти функцию $e_3(t) = \omega_3(t) - p_3(t)$.

Основной идеей рассматриваемого подхода является нахождение алгебраического выражения, которое определяет искомую величину через известные функции времени:

$$e_3 = \Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2). \tag{5}$$

Для ее реализации достаточно решения задачи синтеза управления, при котором многообразие, описываемое равенством (5), становится инвариантным и глобально притягивающим для всех траекторий систем (1), (3) или, что то же самое, (1), (4). Тем самым будет получена формула для нахождения искомой функции $e_3(t)$. В частности, при обеспечении притяжения с постоянным показателем затухания $\gamma > 0$ асимптотическая оценка неизвестной компоненты угловой скорости ω_3 будет определяться формулой

$$\omega_3(t) = p_3(t) + \Phi(e_1(t), e_2(t), \omega_1(t), \omega_2(t)) + O(e^{-\gamma t}). \tag{6}$$

Так как начальное значение $e_3(0)$ неизвестно, то равенство (5), вообще говоря, не выполнено. В общем случае имеем:

$$e_3 = \Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2) + \eta, \tag{7}$$

где η характеризует отклонение от многообразия (5). Введем обозначеия

$$\begin{aligned} a_1 = &\frac{A_2 - A_3}{A_1},\ a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2},\ a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3},\ v_i = \frac{u_i}{A_i}, \\ a_{ij} = &\frac{\lambda_i}{A_j} \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j). \end{aligned}$$

Покажем вначале, что любое гладкое дифференцируемое многообразие вида (5) подбором управления можно сделать инвариантным для расширенной системы (1), (4). Не накладывая пока никаких ограничений на выбор компонент управления v_1, v_2, компоненту v_3 определим формулой

$$\begin{aligned} v_3 = &\left[(\Phi_{e_1} + \Phi_{\omega_1})(a_1\omega_2 + a_{21}) + (\Phi_{e_2} + \Phi_{\omega_2})(a_2\omega_1 - a_{12})\right]\Phi + \\ &+ \Phi_{e_1} v_1 + \Phi_{e_2} v_2 + \Phi_{\omega_1}(p_3 - a_{13}\omega_2) + \Phi_{\omega_2}(p_3 + a_{23}\omega_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\Phi_{(.)}$ – частная производная по указанной переменной. В результате подстановки (8) в (4) и замены e_3 суммой $\Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2) + \eta$ получаем, что последнее уравнение системы (4) становится однородным относительно η

$$\dot{\eta} = -\left[(\Phi_{e_1} + \Phi_{\omega_1})(a_1\omega_2 + a_{21}) + (\Phi_{e_2} + \Phi_{\omega_2})(a_2\omega_1 - a_{12})\right]\eta. \tag{9}$$

По построению управление v_3 является допустимым, а значит оно может быть использовано в системе (4). Тогда существование тривиального частного решения $\eta \equiv 0$ для уравнения (9) соответствует случаю, когда траектории расширенной системы (1), (4) с начальными условиями

$$e_3(0) = \Phi(e_1(0), e_2(0), \omega_1(0), \omega_2(0))$$

для любых $t > 0$ остаются на многообразии (5).

Таким образом установлено, что с помощью допустимого управления (8) и любой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2)$ для траекторий систем (1), (4) может быть синтезировано инвариантное многообразие вида (5). Отметим, что в результате этих построений, фиксируя вид v_3, свободу в выборе этой компоненты вектора управления мы заменили на свободу выбора функции $\Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2)$.

Воспользуемся этим обстоятельством и будем искать такую функцию, которая для всех траекторий (1), (4) обеспечивает их экспоненциальное притяжение с постоянным показателем затухания к инвариантному многообразию (5). Для этого в правой части уравнения (9) приравняем коэффициент при переменной η некоторой отрицательной постоянной. Пусть γ – положительная константа, и тогда соответствующее условие

$$\gamma = (\Phi_{e_1} + \Phi_{\omega_1})(a_1\omega_2 + a_{12}) + (\Phi_{e_2} + \Phi_{\omega_2})(a_2\omega_1 - a_{21}) \tag{10}$$

определяет для функции $\Phi(e_1, e_2, \omega_1, \omega_2)$ уравнение в частных производных первого порядка.

Вид общего решения (10) зависит от знаков a_1, a_2. Далее будем полагать, что $A_3 \neq A_1, A_3 \neq A_2$, т.е. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. При этом возможны два случая: знаки параметров a_1, a_2 могут быть различными либо одинаковыми. Первый из них имеет место, когда A_3 является либо максимальным, либо минимальным моментом инерции гиростата. Тогда общее решение (10) имеет вид

$$\Phi_1 = -\frac{\gamma}{\sqrt{a_1 a_2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a_1 a_2}\,(a_2\omega_1 - a_{21})}{a_2(a_1\omega_2 + a_{12})}\right) + F(\cdot). \tag{11}$$

Если же A_3 не является экстремальным моментом инерции, то общее решением задается выражением

$$\Phi_2 = \gamma \ln\left(\frac{a_1 a_2\omega_1 - a_1 a_{21} + (a_1\omega_2 + a_{12})\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{a_1 a_2}}\right) + F(\cdot). \tag{12}$$

В формулах (11), (12) $F(\cdot)$ – произвольная дифференцируемая функция, имеющая следующий вид

$$F\left(\omega_1(a_{21}-\frac{a_2\omega_1}{2})+\omega_2(a_{12}-\frac{a_1\omega_2}{2}), e_1-\omega_1, \frac{-e_2a_1+a_1\omega_2+a_{12}}{a_1}\right).$$

После нахождения семейства функций $\Phi(e_1,e_2,\omega_1,\omega_2)$, обеспечивающих экспоненциальное притяжение всех траекторий системы (1), (4) к многообразию, определяемому равенством (5), можно найти асимптотическую оценку для переменной $\omega_3(t)$. Для этого достаточно выполнить следующие действия.

1) В семействе решений (11) или (12) выбираем функцию $F(\cdot)$, например, $F(\cdot)=0$, и тем самым, в зависимости от известного распределения масс в гиростате, получаем конкретную функцию $\Phi(e_1,e_2,\omega_1,\omega_2)$.

2) По формуле (8) строим управление v_3. Так как на компоненты v_1,v_2 пока не накладывались никакие ограничения, кроме требования допустимости, то для них выбираются произвольные допустимые выражения, например, $v_1=v_2=0$.

3) Соответствущие функции $u_i(\omega_1,\omega_2,p_1,p_2,p_3)$, $\quad i=1,2,3$ подставляем в систему (3) и для нее решаем задачу Коши.

4) По формуле (6) получаем искомую оценку $\omega_3(t)$.

3. Построение нелинейного наблюдателя. Для того, чтобы система (3) стала наблюдателем в общепринятом понимании этого термина, необходимо выполнение условия $\lim_{t\to\infty}p_i(t)=\omega_i(t)$, $\quad i=1,2,3$. Дополнительно к шагам 1)–3) описанной выше схемы проведем следующие построения.

Потребуем вначале, чтобы решение уравнения в частных производных (10) удовлетворяло граничному условию $\Phi(0,0,\omega_1,\omega_2)=0$. Структура общего решения (10) известна, и с учетом (11), (12) любое частное решение уравнения (10) может быть представлено в виде $\Phi_i=F_i(\omega_1,a_1\omega_1+a_{12})+F(\cdot)$, $\ i=1,2$. Тогда, полагая $F(\cdot)=-F_i(\omega_1-e_1,-e_2a_1+a_1\omega_1+a_{12})$, $\ i=1,2$, получаем решение соответствующей граничной задачи для уравнения (10). В силу непрерывности функций Φ_i в рассматриваемой области значений переменных из условия $\lim_{t\to\infty}e_i(t)=0$, $\quad i=1,2$, следует, что $\lim_{t\to\infty}e_3(t)=0$.

Таким образом, чтобы система (3) стала нелинейным наблюдателем для системы (1), достаточно устремить первые две компоненты e_1,e_2 вектора ошибок к нулю. Для этого воспользуемся имеющейся свободой выбора управлений v_1,v_2. Положим

$$v_1=-\gamma e_1-(a_{21}+a_1\omega_2)\Phi,\quad v_2=-\gamma e_2+(a_{12}-a_2\omega_1)\Phi. \tag{13}$$

Уравнения (4) с учетом (5), (8), (13) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot e_1&=(a_1\omega_2+a_{21})\eta-\gamma e_1,\\ \dot e_2&=(a_2\omega_1-a_{12})\eta-\gamma e_2,\\ \dot\eta&=-\gamma\eta.\end{aligned}\tag{14}$$

Можно показать, что производная в силу системы (14) от положительно определенной функции $V = {e_1}^2 + {e_2}^2 + \eta^2$ выбором постоянной $\gamma > 0$ может быть сделана определенно отрицательной. Тем самым установлен факт стремления переменных $e_1(t), e_2(t), \eta(t)$ к нулю.

В итоге выполнения описанных выше построений по формулам (8), (13) будут найдены функции $u_i(\omega_1, \omega_2, p_1, p_2, p_3)$, $i = 1, 2, 3$, при которых система уравнений (3) становится асимптоическим наблюдателем для системы (1) с постоянным показателем затухания ошибки γ.

4. Задача синхронизации. В отличие от задачи наблюдения, при решении задачи синхронизации синтез управлений проводится не для искусственным образом составленной системы дифференциальных уравнений (3), а для реального объекта – ведомого гиростата, уравнениями движения которого является система (2).

Задача синхронизации угловых скоростей для ведомого гиростата состоит в синтезе такого закона изменения вектора гиростатического момента

$$\dot{q} = Q(\omega_1, \omega_2, p_1, p_2, p_3),$$

при котором

$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = \omega_i(t), \ \ i = 1, 2, 3.$$

Сведем задачу синхронизации к уже решенной задаче построения наблюдателя. Для этого положим

$$\begin{aligned}
Q_1 &= (A_2 - A_3)p_2p_3 + q_2p_3 - q_3p_2 - (A_2 - A_3)\omega_2p_3 - \lambda_2p_3 + \lambda_3\omega_2 + u_1, \\
Q_2 &= (A_3 - A_1)p_1p_3 + q_3p_1 - q_1p_3 - (A_3 - A_1)\omega_1p_3 - \lambda_3\omega_1 + \lambda_1p_3 + u_2, \\
Q_3 &= (A_1 - A_2)p_1p_2 + q_1p_2 - q_2p_1 - (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - \lambda_1\omega_2 + \lambda_2\omega_1 + u_3,
\end{aligned} \tag{15}$$

где u_1, u_2, u_3 – компоненты нового управляющего воздействия, которые предполагаем допустимыми.

По построению функции (15) являются допустимыми. В результате подстановки (15) в систему дифференциальных уравнений (2) последняя преобразуется в систему уравнений (3). Следовательно, найденные в предыдущем пункте законы управления $u_i(\omega_1, \omega_2, p_1, p_2, p_3)$, $i = 1, 2, 3$, обеспечивающие для решений системы (3) выполнение условия $\lim_{t\to\infty} p_i(t) = \omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, после подстановки их в (15) обеспечат выполнение этого условия и для системы (2). Таким образом, формулы (15) определяют законы управления для ведомого объекта, при котором его угловая скорость синхронизируется с угловой скоростью вращения ведущего гиростата.

1. *Kang W., H. Yeh* Coordinated control of multi-satellite systems // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. – 2002. – **12**. – P. 185–205.
2. *Щербак В.Ф.* Задача отслеживания состояния нелинейной системы при неполной информации о движении // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 127–132.
3. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 175 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`shvf@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 07.02.08