ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 531.38

©2008. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЧЛЕНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Постановка задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных сферическим и неголономным шарнирами, дана в работе [1]. В работах [1–3] найдены точные решения задачи. В работе [4] получены уравнения аксоидов для этой задачи. В статье для уравнений движения механической системы, рассмотренной в работе [1], найдено частное решение.

Исходные соотношения. Приведем вначале три дифференциальных уравнения и одно алгебраическое из работы [1] [1]: (38)*, (39)*, (34)*, (37)*:

$$(\xi+1)[H(\Omega_2-\omega_2\cos\theta)-(A_0n+Nn_0)\sin\theta] = 2[H\omega_2'-(Nn_0+A_0n_0'\sin\theta)]\sin\theta, \tag{1}$$

$$(\xi-1)[H(\Omega_2\cos\theta-\omega_2)-(An_0+Nn)\sin\theta] = 2[H\Omega_2'-N(n_0'\sin\theta-n)]\sin\theta, \tag{2}$$

$$n' = -n_0'\cos\theta, \tag{3}$$

$$\omega_2\sin\theta = \frac{n}{J}\cos\theta-\frac{n_0}{J_0}. \tag{4}$$

Здесь A, A_0 – экваториальные моменты инерции тел, J, J_0 – осевые моменты инерции тел, $N = mm_0ll_0/(m+m_0)$ – параметр, имеющий размерность момента инерции, $H = AA_0-N^2 > 0$, штрихом обозначено дифференцирование по θ.

Построение решения. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\xi = 1, \tag{5}$$

при этом из уравнения (2) имеем

$$H\Omega_2'-N(n_0'\sin\theta-n) = 0. \tag{6}$$

Внесем сюда выражение n' из (3), получим

$$H\Omega_2'+N(n+n'\operatorname{tg}\theta) = 0. \tag{7}$$

Примем ограничение

$$N = 0, \tag{8}$$

из (7) находим

$$\Omega_2 = C, \tag{9}$$

[1]Звездочкой будем снабжать формулы работы [1].

где C – постоянная интегрирования.

Подставив (5), (8), (9) в (1), получим уравнение

$$A(\omega_2 \sin\theta)' = AC - n\sin\theta + n_0' \sin^2\theta, \tag{10}$$

которое, вследствие (3), (4), принимает вид

$$\left(\frac{A}{J}\cos^2\theta + \frac{A}{J_0} + \sin^2\theta\right) n' + \left(1 - \frac{A}{J}\right) n \sin\theta\cos\theta = AC\cos\theta \tag{11}$$

и может быть проинтегрировано без ограничений на параметры A, J, J_0, C:

$$n(\theta) = e^{\int P(\theta)d\theta}\left(C_2 + \int Q(\theta)e^{-\int P(\theta)d\theta}d\theta\right). \tag{12}$$

Здесь

$$P(\theta) = \frac{(A/J - 1)\sin\theta\cos\theta}{A/J_0 + (A/J)\cos^2\theta + \sin^2\theta}, Q(\theta) = \frac{AC\cos\theta}{A/J_0 + (A/J)\cos^2\theta + \sin^2\theta}. \tag{13}$$

Отметим, что

$$\frac{A}{J_0} + \frac{A}{J}\cos^2\theta + \sin^2\theta > 0, \qquad e^{\int P(\theta)d\theta} = \frac{1}{\sqrt{A/J_0 + (A/J)\cos^2\theta + \sin^2\theta}}.$$

Теперь из (12) находим:

$$\begin{gathered} n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{A/J_0 + (A/J)\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \times \\ \times \left(C_2 + AC\int \frac{d\sin\theta}{\sqrt{A/J_0 + A/J + (1 - A/J)\sin^2\theta}}\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Если $A = J$, то

$$n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{A/J_0 + 1}}\left(C_2 + \frac{AC\sin\theta}{\sqrt{A/J_0 + 1}}\right). \tag{15}$$

Если же $A \neq J$, то

$$\int \frac{d\sin\theta}{\sqrt{A/J_0 + A/J + (1 - A/J)\sin^2\theta}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 - A/J}} \arcsin\sqrt{\dfrac{(A - J)J_0}{A(J + J_0)}}\sin\theta, & \text{если} \quad A > J, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 - A/J}} \operatorname{arsh}\sqrt{\dfrac{(J - A)J_0}{A(J + J_0)}}\sin\theta, & \text{если} \quad A < J. \end{cases}$$

Подробно рассмотрим случай

$$C = 0. \tag{16}$$

При этом зависимость $n(\theta)$, как следует из (14), такова:

$$n(\theta) = \frac{C_2}{\sqrt{A/J_0 + 1 + (A/J - 1)\cos^2\theta}}. \tag{17}$$

Введем новые параметры C_*, b_* с целью сокращения записи

$$C_2 = \sqrt{A/J_0 + 1} JC_*, \tag{18}$$

$$A/J - 1 = b_*(A/J_0 + 1). \tag{19}$$

Отметим, что $b_* > 0$ при $A > J$, в противном случае $b_* < 0$. Случай $A = J$ приведет к постоянному значению переменной n, его не рассматриваем.

С учетом (18), (19) переменная (17) примет вид

$$n(\theta) = \frac{JC_*}{\sqrt{1 + b_*\cos^2\theta}}. \tag{20}$$

Условие (16) означает, что

$$\Omega_2 = 0. \tag{21}$$

Подставим (20) в (3) и проинтегрируем, найдем

$$n_0(\theta) = \frac{JC_* b_* \cos\theta}{\sqrt{1 + b_*\cos^2\theta}}. \tag{22}$$

Внеся (20), (22) в соотношение (4), определим

$$\omega_2(\theta) = \frac{JC_*(1 + b_*)}{A\sqrt{1 + b_*\cos^2\theta}}\ \mathrm{ctg}\theta. \tag{23}$$

Таким образом, на инвариантном соотношении (5) найдены выражения (20)–(23) для четырех переменных задачи. Компоненты угловых скоростей $\omega_3,\ \Omega_3$ находим из соотношений (11)*

$$\omega_3(\theta)\sin\theta = \Omega_2 - \omega_2\cos\theta, \tag{24}$$

$$\Omega_3(\theta)\sin\theta = \Omega_2\cos\theta - \omega_2. \tag{25}$$

Подставив в (24), (25) соотношения (21), (23), получим

$$\omega_3(\theta) = -\frac{JC_*(1 + b_*)}{A\sqrt{1 + b_*\cos^2\theta}}\ \mathrm{ctg}^2\theta, \tag{26}$$

$$\Omega_3(\theta) = -\frac{JC_*(1+b_*)}{A\sqrt{1+b_*\cos^2\theta}}\ \mathrm{ctg}^2\theta\sin\theta. \tag{27}$$

Для определения первых компонент угловых скоростей воспользуемся соотношениями (28)*

$$\omega_1 = (\xi+1)\varkappa, \qquad \Omega_1 = (\xi-1)\varkappa, \tag{28}$$

они на инвариантном соотношении (5) принимают вид

$$\omega_1(\theta) = 2\varkappa, \tag{29}$$

$$\Omega_1(\theta) = 0. \tag{30}$$

Условие (30) вместе с (21) означают, что угловая скорость тела S_0 направлена по оси динамической симметрии

$$\mathbf{\Omega} = \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^* = \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3. \tag{31}$$

Для определения $\varkappa$ (а, следовательно, и $\omega_1(\theta)$) воспользуемся интегралом (13)*

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1(\theta) + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1(\theta), \\ G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2(\theta) + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2(\theta) - n_0(\theta)\sin\theta, \\ G_3 = (A_0\Omega_2(\theta) - N\omega_2(\theta))\sin\theta + n(\theta) + n_0(\theta)\cos\theta. \end{gathered} \tag{33}$$

Представим компоненты момента количества движения с учетом (8), (21), (30), (29):

$$G_1 = 2A\varkappa, \qquad G_2 = A\omega_2 - n_0\sin\theta, \qquad G_3 = n + n_0\cos\theta. \tag{34}$$

Внесем их в интеграл (32)

$$4A^2\varkappa^2 = g^2 - (A^2\omega_2^2 - 2An_0\omega_2\sin\theta + n^2 + n_0^2 + 2nn_0\cos\theta). \tag{35}$$

Подставив (20), (22), (23) в (35), получим

$$2A\varkappa\sin\theta = \sqrt{g^2\sin^2\theta - J^2C_*^2(1+b_*\cos^2\theta)}. \tag{36}$$

Вместо θ введем новую переменную

$$u = \cos\theta, \tag{37}$$

тогда

$$\dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta. \tag{38}$$

Вследствие (31)*

$$\dot{\theta} = -2\varkappa, \tag{39}$$

находим
$$\dot{u} = 2\varkappa \sin\theta. \tag{40}$$

Запишем уравнение (36) с учетом (40), (37)

$$\frac{A}{g}\dot{u} = \sqrt{1 - J^2C_*^2/g^2 - (1 + J^2C_*^2 b_*/g^2)u^2}. \tag{41}$$

Из него найдем зависимость времени t от u

$$\frac{g}{A}(t - t_0) = \int \frac{du}{\sqrt{1 - J^2C_*^2/g^2 - (1 + J^2C_*^2 b_*/g^2)u^2}}. \tag{42}$$

Так как выражения $1 - J^2C_*^2/g^2$, $1 + J^2C_*^2 b_*/g^2$ могут иметь разные знаки, необходимо рассмотреть три варианта.

Первый из них

$$1 - J^2C_*^2/g^2 > 0, \qquad 1 + J^2C_*^2 b_*/g^2 > 0. \tag{43}$$

Введем новые безразмерные параметры ε и a_*

$$J^2C_*^2 = g^2\sin^2\varepsilon, \qquad A = a_*J \tag{44}$$

и безразмерное время
$$t_* = \frac{g}{A}(t - t_0), \tag{45}$$

тогда зависимость времени t_* от θ, как следует из (42) с учетом (43), (44), такова
$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon}{\nu}\sin\nu t_*, \tag{46}$$

где
$$\nu = \sqrt{1 + b_*\sin^2\varepsilon}. \tag{47}$$

Второй вариант интегрируемости

$$1 - J^2C_*^2/g^2 > 0, \qquad 1 + J^2C_*^2 b_*/g^2 < 0. \tag{48}$$

С учетом обозначений (44) эти ограничения запишем в виде

$$\cos^2\varepsilon > 0, \qquad 1 + b_*\sin^2\varepsilon = -\gamma_*^2 < 0, \tag{49}$$

и из (42) получим
$$\cos\theta = \frac{e^{t_*\gamma} - e^{-t_*\gamma}\cos^2\varepsilon}{2\gamma}. \tag{50}$$

Для третьего варианта

$$1 - J^2C_*^2/g^2 < 0, \qquad 1 + J^2C_*^2 b_*/g^2 < 0 \tag{51}$$

вводим обозначение

$$J^2 C_*^2 = g^2 / \cos^2 \varepsilon_*, \tag{52}$$

при котором ограничения (51) примут вид

$$\mathrm{tg}^2 \varepsilon_* > 0, \qquad 1 + b_* / \cos^2 \varepsilon_* < 0. \tag{53}$$

Выполнив интегрирование в (42), находим

$$\cos\theta = \frac{e^T + e^{-T} \sin^2 \varepsilon}{2\sigma}, \tag{54}$$

где

$$\sigma^2 = -(b_* + \cos^2 \varepsilon), \qquad T = \frac{\sigma t_*}{\cos \varepsilon_*}. \tag{55}$$

Таким образом, получены решения, явно зависящие от времени. С учетом ограничений (43), (5), (8), (16), соотношения (46) и обозначений (44), (45), (47) компоненты (20)–(23), (26), (27), (29), (36), (30) угловых скоростей тел в полуподвижных осях имеют вид

$$\omega_1(t_*) = \frac{g}{A} \; \frac{\cos\varepsilon \sqrt{\nu^2 - (1 + b_* \sin^2 \varepsilon) \sin^2 \nu t_*}}{\sqrt{\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \tag{56}$$

$$\omega_2(t_*) = \frac{g}{A} \; \frac{\nu(1 + b_*) \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin \nu t_*}{\sqrt{\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*} \sqrt{\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \tag{57}$$

$$\omega_3(t_*) = -\frac{g}{A} \; \frac{\nu(1 + b_*) \sin\varepsilon \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}{(\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*) \sqrt{\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \tag{58}$$

$$n(t_*) = \frac{g\nu \sin\varepsilon}{\sqrt{\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \tag{59}$$

$$\Omega_1(t_*) = 0, \tag{60}$$

$$\Omega_2(t_*) = 0, \tag{61}$$

$$\Omega_3(t_*) = -\frac{g}{A} \; \frac{\nu^2(1 + b_*) \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin \nu t_*}{(\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*) \sqrt{\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \tag{62}$$

$$n_0(t_*) = \frac{g b_* \sin\varepsilon \cos\varepsilon \sin \nu t_*}{\sqrt{\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}. \tag{63}$$

Для определения углов φ, Φ собственных вращений тел воспользуемся уравнениями (2)*, (3)*

$$\dot\varphi = -\omega_3 + n/J, \tag{64}$$

$$\dot\Phi = -\Omega_3 + n_0/J_0. \tag{65}$$

В них подставим (20), (22), (26), (27), получим:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{JC_*}{g} \int \frac{[A/J + (1 + b_* - A/J)u^2]du}{(1 - u^2)\sqrt{(1 + b_* u^2)[1 + J^2C_*^2/g^2 - (1 + J^2C_*^2 b_*/g^2)u^2]}}, \quad (66)$$

$$\Phi - \Phi_0 = -\frac{JC_*}{g} \int \frac{[A/J + (1 + b_* - A/J)u^2]udu}{(1 - u^2)\sqrt{(1 + b_* u^2)[1 + J^2C_*^2/g^2 - (1 + J^2C_*^2 b_*/g^2)u^2]}}. \quad (67)$$

Интеграл (66) эллиптический, а (67) можно представить посредством элементарных функций времени, но в виде громоздких выражений. В дальнейшем (при построении аксоидов тела S_0) выяснилось, что эта зависимость нам не потребуется, поэтому ее здесь не приводим. Так же легко можно выписать с учетом (20)–(23), (26), (27), (29), (30) компоненты угловых скоростей тел в полуподвижных осях в остальных двух случаях – (48), (51).

Чтобы получить компоненты угловых скоростей тел в неизменно связанных с телами базисах, воспользуемся соотношениями

$$\omega_1^*(t) = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \quad \omega_2^*(t) = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi,$$
$$\Omega_1^*(t) = 0, \ \Omega_2^*(t) = 0. \quad (68)$$

Как показывают выражения (68), (63), тело S_0 неравномерно вращается с угловой скоростью $n_0(t)/J_0$ вокруг оси динамической симметрии.

Потенциальная энергия для найденных решений (56)–(63) и для решений в случаях (48), (51) определяется из интеграла (15)*

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2)+A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2)-2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2)+n^2/J+n_0^2/J_0 = 2h-2\Pi(\theta). \quad (69)$$

В силу инвариантного соотношения (5) и ограничений (8), (16) потенциальная энергия (69) имеет вид

$$2h - 2\Pi = g^2/A + JC_*^2(1 - J/A) = \text{const},$$

это означает, что пружина не напряжена, т. е. можно считать, что упругий элемент отсутствует, а передача вращения от одного тела к другому осуществляется только за счет неголономного шарнира.

1. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 15–21.
2. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Там же. – 2004. – Вып. 34. – С. 80–86.
3. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Условия существования линейного инвариантного соотношения специального вида // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 51–57.
4. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Зб. наук.-метод. робiт. – Донецьк: ДонНТУ, 2006. – Вип. 4. – С. 63–80.

Национальный техн. ун-т, Донецк, Украина
Получено 06.11.07