ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 531.38

©2008. **Г.В. Горр, Е.М. Миронова**

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА

На основе первого метода Ляпунова [1] получены достаточные условия существования асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата в случае, когда предельным движением гиростата является полурегулярная прецессия первого типа [2–4]. К исследованию применена механическая модель, которая описывается уравнениями Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [5].

Введение. Прецессионные движения гиростата с неподвижной точкой характеризуются постоянством угла между двумя осями, проходящими через неподвижную точку. Одна из указанных осей фиксирована в гиростате, а вторая неподвижна в пространстве. Обзор результатов, полученных при изучении прецессионных движений, изложен в работе [2].

Когда решение уравнений динамики твердого тела построено, представляет большой интерес исследование поведения интегральных траекторий в окрестности построенных решений [6], в частности, в случае асимптотически-прецессионных движений [7, 8].

В данной статье продолжено изучение асимптотически-прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Рассмотрен вариант, когда предельным движением гиростата является полурегулярная прецессия первого типа [3, 4]. Первым методом Ляпунова получены достаточные условия существования рассматриваемых движений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое описывается уравнениями Кирхгофа [5]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции, вычисленный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \nu \cdot \nu = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{2}$$

где E и k – произвольные постоянные.

Пусть $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор оси, проходящей через неподвижную точку и неизменно связанной с гиростатом. Движение тела называется прецессией относительно вертикали, если постоянен угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$, то есть

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad a_0 = \cos\theta_0, \quad \theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}). \tag{3}$$

В работе [2] для прецессий относительно вертикали в случае, когда $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, получены соотношения

$$\begin{gathered} \nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \\ \omega_1 = a_0'\dot{\psi} \sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0\dot{\psi}; \end{gathered} \tag{4}$$

здесь φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии.

Будем рассматривать случай $\dot{\psi} = m$, где m – постоянная, то есть полурегулярную прецессию первого типа. Кроме этого будем предполагать, что $A = \mathrm{diag}(\mu_0, \mu_0, \mu_0)$. Это означает, что эллипсоид инерции является сферой. Полурегулярные прецессии первого типа рассмотрены в работах [3, 4]. В этих работах условия существования прецессий записаны в виде системы алгебраических уравнений на параметры дифференциальных уравнений (1), постоянные интегралов (2) и параметры прецессии (3), (4) (при $\dot{\psi} = m$). Однако случай сферического гиростата в указанных работах не анализировался. Поэтому рассмотрим его детально.

Следуя методу [2], условия существования полурегулярных прецессий первого типа сведем к исследованию решений системы дифференциальных уравнений

$$a_0\mu_0\dot{\varphi} = k - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \mu_0 m, \tag{5}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{a_0'^2\mu_0^2}\left\{\mu_0[2E + 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})] - \left[k - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\right]^2\right\}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}\Big[3a_0'^2\mu_0 m + a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}) - a_0(B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2k\Big] + m\Big[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}) + a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2a_0 k\Big] + \\ +3a_0(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s}) - (C\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) - a_0(C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 4a_0 E = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Пусть $a_0 \neq 0$. Выразив из равенства (5) $\dot{\varphi}$ и подставив это значение в уравнения (6), (7), потребуем, чтобы полученные уравнения были тождествами по φ в силу соотношений (4). Получим следующие условия на параметры задачи

$$\lambda_2 = a_0 B_{23}, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad C_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11}, \tag{8}$$

$$(a_0 B_{13} - \lambda_1)^2 = a_0^2\mu_0(C_{22} - C_{11}), \quad C_{13} = \frac{1}{a_0\mu_0}[a_0 B_{11} B_{13} - \lambda_1(B_{11} + \mu_0 m)], \tag{9}$$

$$\begin{gathered} 2a_0(s_1 - a_0 C_{13})(m\mu_0 + a_0'^2 B_{11}) + \\ +(a_0 B_{13} - \lambda_1) \cdot \Big[a_0 m(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{13}) + 2a_0'^2\big(s_3 + a_0(C_{22} - C_{33})\big)\Big], \end{gathered} \tag{10}$$

$$2E = \mu_0 a'^2_0 m^2 - 2a_0 s_3 + a'^2_0 C_{22} + a_0^2 C_{33} + \frac{\mu_0 a_0^2 (s_1 - a_0 C_{13})^2}{(a_0 B_{13} - \lambda_1)^2}, \tag{11}$$

$$k = a_0 \lambda_3 + a'^2_0 m \mu_0 - \frac{1}{2}(a'^2_0 B_{11} + a_0^2 B_{33}) + \frac{\mu_0 a_0^2 (s_1 - a_0 C_{13})}{(a_0 B_{13} - \lambda_1)}. \tag{12}$$

При выполнении условий (8)–(12) скорость собственного вращения определяется из соотношения (5) по формуле

$$\frac{d\varphi}{dt} = p_0 + q_0 \sin\varphi, \tag{13}$$

где

$$p_0 = \frac{a_0(s_1 - a_0 C_{13} - m(a_0 B_{13} - \lambda_1))}{(a_0 B_{13} - \lambda_1)}, \qquad q_0 = \frac{a'_0(a_0 B_{13} - \lambda_1)}{a_0 \mu_0}. \tag{14}$$

Будем предполагать, что $p_0 > 0,\ p_0 > q_0$. Тогда из (13) вытекает, что $\dfrac{d\varphi}{dt} > 0$, т. е. $\varphi(t)$ – монотонная функция времени

$$\varphi = 2\mathrm{arctg}\left[\frac{p_0 \mathrm{tg}\tau}{\sqrt{p_0^2 - q_0^2} - q_0 \mathrm{tg}\tau}\right]. \tag{15}$$

Здесь $\tau = \sqrt{p_0^2 - q_0^2}t$. При этом из (15) следует, что $\varphi = 0$ при $\tau = 0$. Введем параметр $\alpha_0:\ \sin\alpha_0 = \dfrac{q_0}{p_0},\ \cos\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{p_0^2 - q_0^2}}{p_0}$. Тогда из формулы (15) найдем

$$\sin\varphi = \frac{p_0 \sin(\tau + \alpha_0) - q_0}{p_0 - q_0 \sin(\tau + \alpha_0)}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{p_0^2 - q_0^2}\cos(\tau + \alpha_0)}{p_0 - q_0 \sin(\tau + \alpha_0)}. \tag{16}$$

Из (14) вытекает, что изучаемая прецессия выражается по формулам

$$\begin{gathered} \nu_1 = a'_0 \sin\varphi, \qquad \nu_2 = a'_0 \cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0, \\ \omega_1 = a'_0 m \sin\varphi, \qquad \omega_2 = a'_0 m \cos\varphi, \qquad \omega_3 = (a_0 m + p_0) + q_0 \sin\varphi, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ определены функциями (16). Следовательно, решение (17) является периодическим с периодом $\dfrac{2\pi}{\sqrt{p_0^2 - q_0^2}}$.

Поставим теперь задачу об исследовании условий существования асимптотических движений, т. е. движений, стремящихся при $t \to \infty$ к движению, которое описывается решением (17). Поскольку решение (17) периодическое, то для решения этой задачи применим первый метод Ляпунова (система первого приближения является правильной системой дифференциальных уравнений).

Редукция системы уравнений в вариациях к уравнению Хилла. Следуя работе [7], обозначим через $\boldsymbol{\nu}^*(t)$, $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ периодическое решение, которое описывает прецессию (17). Для анализа асимптотических движений в уравнениях (1) положим $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}$. Тогда получим следующие уравнения для возмущений

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu_0}\big[\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\Omega} - B\boldsymbol{\nu}^*\times\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}^*\times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^*\times C\boldsymbol{\gamma} - C\boldsymbol{\nu}^*\times\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Omega}\times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\times C\boldsymbol{\gamma}\big],$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^*\times\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\Omega}. \tag{18}$$

Известно, что первый метод Ляпунова [1] основан на анализе линейной системы, которая следует из системы (18) при отбрасывании в первом уравнении выражений $\boldsymbol{\Omega}\times B\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}\times C\boldsymbol{\gamma}$, а во втором уравнении – выражения $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\Omega}$. Линейная система допускает интегралы

$$\mu_0(\boldsymbol{\omega}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}) + (C\boldsymbol{\nu}^* - \boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_1,\ \ \boldsymbol{\nu}^*\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_2,\ \ \mu_0(\boldsymbol{\nu}^*\cdot\boldsymbol{\Omega}) + (\mu_0\boldsymbol{\omega}^* - B\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_3. \tag{19}$$

В силу существования интегралов (19) система первого приближения, вытекающая из (18), в случае периодических $\boldsymbol{\nu}^*(t)$ и $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ имеет четыре нулевых характеристичных числа. Для существования асимптотически-прецессионных движений, представимых рядами Ляпунова, необходимо, чтобы линейная система имела хотя бы одно положительное характеристичное число. Следуя работе [7], изучение характеристичных чисел линейной системы сведем к исследованию характеристичных чисел уравнения Хилла. Пусть

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{a} - a_0\boldsymbol{\nu}^*(t),\ \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\nu}^*(t) - a_0\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}^*(t),\ \boldsymbol{\tau}_4 = \boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}^*,\ \boldsymbol{\tau}_5 = \boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*. \tag{20}$$

Введем переменные [7]

$$\begin{gathered} u_1 = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a}),\quad u_2 = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nu}^*),\quad u_3 = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\tau}_3),\\ u_4 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{a},\qquad u_5 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}^*,\qquad u_6 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\tau}_3. \end{gathered} \tag{21}$$

На основании обозначений (20) и соотношений (21) первые интегралы (19) преобразуются к виду

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}u_1 + mu_2 - {a'}_0^{-2}[(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3)u_6] = c_1,\\ u_5 = c_2,\quad u_2 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3)u_6 = c_3, \end{gathered} \tag{22}$$

где $\boldsymbol{b} = {a'}_0^{-2}\big[\mu_0(\dot{\varphi}\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}^*) + \boldsymbol{\tau}_5\big]$. В силу интегралов (22) можно вести новые переменные: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ [7], где

$$\boldsymbol{x} = q(t)\boldsymbol{u}. \tag{23}$$

Здесь

$$q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{\varphi} & m & 0 & -{a'}_0^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) & -{a'}_0^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) & -{a'}_0^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1 & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2 & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

В результате применения преобразований (21), (23) к линейной системе, вытекающей из (18), получим: $x_4 = c_1,\ x_5 = c_2,\ x_6 = c_3$ и неоднородную линейную систему с периодическими коэффициентами для переменных x_1, x_2, x_3. Ненулевые характеристичные числа может иметь только однородная система. Используя соотношения (21), (23), (24), запишем ее так:

$$\dot{x}_1 = h_{12}(t)x_2 + \frac{\mu_0 m \ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{\mu_0}x_1 - mx_3, \quad \dot{x}_3 = h_{32}(t)x_2 + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}x_3. \qquad (25)$$

Здесь

$$h_{12}(t) = \frac{1}{{a'}_0^2\mu_0\dot{\varphi}}\{\mu_0\dot{\varphi}^2(\boldsymbol{\tau}_2 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) - \mu_0 m\dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot B\boldsymbol{\tau}_1) -$$

$$-\mu_0\dot{\varphi}(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot C\boldsymbol{\tau}_1) - \mu_0{a'}_0^2\dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\nu}^* \cdot C\boldsymbol{\nu}^*) -$$

$$-[\mu_0 a_0\dot{\varphi} + (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}^*) - (B\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\nu}^*)][\mu_0{a'}_0^2 m\dot{\varphi} + m\boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) + \qquad (26)$$

$$+\boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}^*)] - [\mu_0\dot{\varphi} + \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*)][{a'}_0^2\mu_0\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\tau_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*)]\},$$

$$h_{32}(t) = -\frac{1}{{a'}_0^2\mu_0\dot{\varphi}}[a_0{a'}_0^2\mu_0\dot{\varphi}^2 + a_0\dot{\varphi}\boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) + m\boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}^*)].$$

Вид системы (25) позволяет получить уравнение Хилла для x_2, не применяя свойства сопряженной системы, как это предложено в работе [7]. Выразим x_1 из второго уравнения системы (25) и подставим в первое уравнение этой системы

$$\mu_0\ddot{x}_2 + (\mu_0 m h_{32}(t) - h_{12}(t))x_2 = 0. \qquad (27)$$

Уравнение (27) в общем случае, т. е. в случае, когда выполняются условия (8)–(12), имеет достаточно сложный вид. Поэтому рассмотрим частный вариант. Пусть параметры задачи удовлетворяют условиям:

$$B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0,\ \ B_{22} = B_{11},\ \ \lambda_2 = 0,\ \ s_1 = s_2 = 0,\ \ C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0,$$

$$m = -\frac{B_{11}}{\mu_0},\ \ \lambda_3 + a_0(B_{11} - B_{33}) = 0,\ \ s_3 = a_0(C_{33} - C_{22}) + \frac{B_{11}a_0}{2{a'}_0^2}({a'}_0^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}), \qquad (28)$$

$$\lambda_1^2 = a_0^2\mu_0(C_{22} - C_{11}).$$

Используя соотношения (4), (26), (28), уравнение (27) представим в виде

$$\ddot{x}_2 + \frac{1}{{a'}_0^2\mu_0^2({a'}_0\lambda_1\sin\varphi - a_0^2B_{11})}\{4{a'}_0^3\lambda_1^3\sin^3\varphi - {a'}_0^2(3+a_0^2)\lambda_1^2B_{11}\sin^2\varphi +$$

$$+\frac{{a'}_0\lambda_1}{2}[B_{11}^2(7a_0^2-13a_0^4+2)+B_{11}B_{33}(2-4a_0^2+a_0^4)-2{a'}_0^4\mu_0(C_{22}-C_{33})]\sin\varphi + \qquad (29)$$

$$+a_0^2B_{11}[B_{11}^2(2a_0^2-1)+B_{11}B_{33}(1-2a_0^2-a_0^4)+{a'}_0^4\mu_0(C_{22}-C_{33})]\}x_2 = 0.$$

В уравнении (29) зависимость функции $\sin\varphi$ от времени определяется первой формулой из (16), где, в силу (14), (28),

$$p_0 = \frac{a_0B_{11}}{\mu_0}, \quad q_0 = -\frac{{a'}_0\lambda_1}{a_0\mu_0}, \quad \left(a_0B_{11} > 0, \quad \frac{a_0^2B_{11} + a'_0\lambda_1}{a_0} > 0\right). \qquad (30)$$

Уравнение (29) в более компактном виде записывается так $\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0$. Воспользуемся достаточным условием существования у уравнения (29) положительного характеристичного числа. Потребуем, чтобы для всех t выполнялось условие $p(t) \le 0$ ($p(t) \not\equiv 0$). Этого можно добиться, полагая, что λ_1 – малый параметр и имеет место неравенство

$$B_{11}\big[B_{11}^2(2a_0^2-1)+B_{11}B_{33}(1-2a_0^2-a_0^4)+{a'}_0^4\mu_0(C_{22}-C_{33})\big] > 0. \qquad (31)$$

Тогда уравнение (29) имеет решение

$$x_2(t) = C_1e^{\beta t}\psi_1(t) + C_2e^{-\beta t}\psi_2(t), \qquad (32)$$

где β – положительное характеристичное число; $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ – периодические функции времени периода $\dfrac{2\pi}{\sqrt{p_0^2-q_0^2}}$; C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Функции x_1, x_2 можно определить с помощью решения (32) из уравнений

$$\left(\frac{x_3}{\dot\varphi}\right)^{\bullet} = \dot\varphi h_{32}(t)x_2, \quad x_1 = \mu_0(\dot{x}_2 - mx_3), \qquad (33)$$

где

$$h_{32}(t) = -\frac{a_0B_{11}}{\mu_0}\left[a_0 + \frac{({a'}_0^2B_{11}+a_0^2B_{33})\big(p_0 - q_0\sin(\sqrt{p_0^2-q_0^2}\,t+\alpha_0)\big)}{2{a'}_0^2\mu_0(p_0^2-q_0^2)}\right].$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{u}$ из формулы (23) найдем по формулам

$$u_1 = \frac{1}{\dot\varphi}\{c_1 - c_3m + [m(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1) + {a'}_0^2(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1)]x_2 +$$

$$+[m(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2)+a_0'^2(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2)]c_2+[m(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3)+a_0'^2(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3)]x_3\}, \qquad (34)$$

$$u_2=c_3-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1)x_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2)c_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3)x_3,\ \ u_3=x_1,\ \ u_4=x_2,\ \ u_5=c_2,\ \ u_6=x_3.$$

Вычислять значения (34) необходимо с учетом условий (28), решения (32) и решений уравнений (33). Тогда векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ найдем из соотношений

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{\mu_0 a_0'^2}(u_1\boldsymbol{\tau}_1+u_2\boldsymbol{\tau}_2+u_3\boldsymbol{\tau}_3),\qquad \boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{a_0'^2}(u_4\boldsymbol{\tau}_1+u_5\boldsymbol{\tau}_2+u_6\boldsymbol{\tau}_3). \qquad (35)$$

Формулы (32), (33) позволяют определить фундаментальную матрицу системы первого приближения, вытекающей из системы (18). Существование положительного характеристичного числа β этой системы позволяет установить [1] существование решения системы (18) в виде рядов Ляпунова

$$u_i=\sum_{n=1}^{\infty}L_i^{(n)}(t)c^n e^{-\beta n t}\quad (i=\overline{1,6}), \qquad (36)$$

где c – произвольная постоянная, характеристичные числа функций $L_i^n(t)$ не менее нуля. Ряды Ляпунова (36) сходятся абсолютно и при $t\to\infty, u_i\to 0$. Из формул (35) вытекает, что при $t\to\infty$ векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ стремятся к нулю. Это означает, что при выполнении условий (30), (31) существует такое начальное положение и начальная скорость гиростата, что при $t\to\infty$ движение гиростата стремится к движению, которое описывается формулами (4) ($\dot\psi=m$). Таким образом, данное движение является асимптотически-прецессионным, а предельное движение характеризуется полурегулярной прецессией первого типа. Отметим, что в качестве первого приближения рядов (36) принимается решение (34), в котором $c_1=c_2=c_3=0,\ C_1=0$.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 5 т. – М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т.2. – С. 7–263.
2. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – **67**, вып. 4. – 2003. – С. 573–587.
3. *Курганский Н.В.* О полурегулярной прецессии первого типа относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 67–71.
4. *Мозалевская Г.В., Орешкина Л.Н.* Безнутационные движения твердого тела // Там же. – 1991. – Вып. 23. – С. 1–5.
5. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Там же. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
6. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Там же. – 1992. – Вып. 24. – С. 25–41.
7. *Горр Г.В., Думбай Д.И.* Об асимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Там же. – 1994. – Вып. 26 (I). – С. 20–28.
8. *Молочинская А.И.* Об одном классе асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата // Вiсн. Донецьк. ун-ту. Серiя А. – 2005. – № 2. – С. 88–93.

Национальный ун-т, Донецк, Украина Получено 29.10.07