ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2007. Вып. 37

УДК 531.36

©2007. **Р.Г. Мухарлямов**

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Известные динамические аналогии позволяют использовать уравнения движений механических систем с программными связями для моделирования динамики в системах, содержащих элементы различной физической природы, процесса познания и процессов в экономических системах. Для оценки отклонений от уравнений связей, следуя Н.Г. Четаеву, вводятся избыточные переменные. Стабилизация связей обеспечивается дополнительными силами, которые определяются модификацией множителей Лагранжа. Приводится решение задачи моделирования динамики электромеханической системы и решение обратных задач динамики твердого тела переменной массы с гироскопом.

Основу моделирования динамических процессов составляет описание динамики объектов и систем различной природы обыкновенными дифференциальными уравнениями. Известные динамические аналогии [1] позволяют построить математические модели, отражающие процессы в системах, содержащих элементы различной физической природы и распространить их на экономические объекты [2] и другие процессы [3, 4]. Современные методы моделирования динамики и технологических процессов, алгоритмов решения обратных задач динамики и синтеза управления [5] представляются перспективными для решения различных задач управления.

1. Динамика производственного объекта. Рассмотрим производственный объект, выпускающий однотипную продукцию. Максимальный объем продукции, которую может выпускать объект в единицу времени при отсутствии ограничений составляет его мощность $y = y(t)$. Пусть функция $q = q(t)$ определяет состояние основных производственных фондов в момент времени t. Тогда отношение $q(t)/y(t) = m(t)$ является мгновенной фондоемкостью основных фондов объекта по выпуску данного вида продукции. Дифференцирование выражения $q(t) = m(t)y(t)$ по времени t приводит к уравнению мощности

$$\frac{d}{dt}(m(t)y(t)) = u_0(t).$$

Величина $u_0(t)$ представляет собой истинный прирост основных фондов в единицу времени. Он учитывает вновь поступившие и используемые с момента t основные фонды $u = u(t)$ и фонды w, выбывающие из потребления за счет износа и старения оборудования. Выбывающие фонды w в общем случае зависят от мощности y, объема выпускаемой продукции Y, от времени t, т.е. $w = w(Y, y, t)$.

Если объект производит продукцию полной своей мощностью $y(t) = \dfrac{dY}{dt}$, то уравнение развития записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dY}{dt}\right)+w\left(Y,\frac{dY}{dt},t\right)=u\left(Y,\frac{dY}{dt},t\right). \tag{1}$$

Если известны величина m, функции $w\left(Y,\dfrac{dY}{dt},t\right)$, $u\left(Y,\dfrac{dY}{dt},t\right)$ и начальные значения $Y(t_0)=Y_0, y(t_0)=y_0$, то закон изменения объема выпускаемой продукции во времени будет определяться решением дифференциального уравнения (1). Из выражения (1) следует, что, управляя потоком u вновь поступающих в производство основных фондов, можно добиться требуемых законов изменения во времени объема выпускаемой продукции $Y=Y(t)$ и мощности производственного объекта $y=y(t)$. Уравнением (1) описывается динамика объектов и систем, содержащих элементы различной физической природы. В работе [1] вводятся динамические показатели и устанавливаются динамические аналогии между элементами различной физической природы, позволяющие использовать для анализа динамики и синтеза управления аналитические методы, наиболее полно развитые в классической механике.

2. Моделирование процесса познания. Процесс познания рассматривается как процесс накопления информации о внешней материи и описывается дифференциальным уравнением [3]

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dI}{dt}\right)+\left(\tau-\frac{dI}{dt}\right)\frac{dI}{dt}+\frac{I}{G}=M. \tag{2}$$

Здесь L, G, τ – параметры, характеризующие интеллектуальные свойства субъекта познания, G – относительная информационная проницаемость органов чувств, I – объем информации, $\tau\dfrac{dI}{dt}$ и $L\dfrac{d^2I}{dt^2}$ оценивают соответственно отрицание и отрицание отрицания информации I во времени, M – потенциальная информация. Потенциальная информация M в правой части уравнения (2) может рассматриваться как функция управления.

3. Управление простейшей биомеханической системой. В качестве двигательной задачи простейшей биомеханической системы, которой соответствует механическая модель, составленная из стержня с грузом, вращающегося вокруг неподвижной оси в вертикальной плоскости, рассматривается [4] процесс вращения в одном суставе. Положение груза на стержне считается неизвестным. Уравнение движения записывается в виде

$$\frac{d}{dt}(J\omega)+m(\varphi,\omega,t)=M, \qquad \omega=\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Здесь J – момент инерции относительно оси вращения звена, составленного из стержня с грузом, φ – суставной угол, ω – угловая скорость, $m(\varphi,\omega,t)$ – момент неконтролируемых возмущающих сил, включая силу веса, разброс моментных характеристик двигателя и силы реакции в суставе, M – управляющий момент, развиваемый идеальным двигателем. Сравнение уравнений

(1), (2), (3) показывает аналогию с уравнением прямолинейного движения материальной точки переменной массы. Так, в простейшем случае движение материальной точки в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости с коэффициентом сопротивления β и пропорциональным перемещению с коэффициентом сопротивления k, при отсутствии других внешних сил описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)+\beta\frac{dx}{dt}+kx=R. \tag{4}$$

Закон движения материальной точки определяется решением $x=x(t)$ уравнения (4), если известны ее начальное положение и начальная скорость $x(t_0)=x_0,\quad v(t_0)=v_0$.

4. Динамика механической системы. Рассмотрим механическую систему или систему иной физической природы, обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}^j$ которой удовлетворяют уравнениям связей

$$f^{\mu}\left(q^i,t\right)=0, \qquad \dot{f}^{\mu}\equiv\frac{\partial f^{\mu}}{\partial q^s}\dot{q}^s+\frac{\partial f^{\mu}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\dot{f}^{\rho}\left(q^i,\dot{q}^j,t\right)=0, \tag{6}$$

$$i,j,s=1,\ldots,n,\quad \mu=1,\ldots,m,\quad \rho=m+1,\ldots,r,\quad r<n.$$

В равенствах (5), как и всюду в дальнейшем, по одинаковым индексам предполагается суммирование. Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{dq^i}{dt}=\dot{q}^i, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^0}{\partial\dot{q}^i}-\frac{\partial L^0}{\partial q^i}=Q_i-\frac{\partial D^0}{\partial\dot{q}^i}+R_i, \tag{7}$$

$$q^i\left(t_0\right)=q_0^i, \qquad \dot{q}^j\left(t_0\right)=\dot{q}_0^j. \tag{8}$$

Здесь $L^0=T^0-P^0$, $T^0=T^0\left(q^i,\dot{q}^j\right)$ – кинетическая энергия, $P^0=P^0\left(q^i,t\right)$ – потенциальная энергия, $D^0=D^0\left(q^i,\dot{q}^j,t\right)$ – диссипативная функция, $Q_i=$ $=Q_i\left(q^s,\dot{q}^j,t\right)$ – обобщенные непотенциальные внешние силы, $R_i=\lambda\dfrac{\partial\dot{f}^{\kappa}}{\partial\dot{q}^i}$ – управляющие силы или реакции связей, $\kappa=1,\ldots,r$. Если уравнения (7) описывают динамику управляемой системы, то равенства (5), (6) можно рассматривать как условия, которые должны быть обеспечены за счет управляющих воздействий R_i. При этом уравнения голономных связей (5) полностью или частично задают траекторию изображающей точки в пространстве координат q_i, уравнениями неголономных связей (6) можно задавать семейство траекторий [6].

Численное решение системы дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений связей (5), (6) и уравнений динамики (7) с начальными условиями (8), оказывается неустойчивым по отношению к уравнениям связей. Неустойчивость следует из самого способа определения множителей Лагранжа λ_κ, исходя из равенства $\dfrac{d\dot{f}^\kappa}{dt} = 0$.

Для стабилизации связей необходимо учитывать отклонения от уравнений связей вместе с их производными [7], которые рассматриваются как параметры или дополнительные координаты некоторой расширенной системы. Задача о движении механических систем с параметрами, вынужденными изменяться под действием дополнительных сил-принуждений, была поставлена в работе [8] Н.Г. Четаевым. Введение параметров в выражения динамических показателей системы приводит к дифференциальным уравнениям, описывающим изменение координат и параметров. Задача стабилизации связей сводится к определению множителей Лагаранжа λ_κ, соответствующих уравнениям связей

$$y^\mu = f^\mu\left(q^i, t\right), \qquad \dot{y}^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^s}\,\dot{q}^s + \frac{\partial f^\mu}{\partial t}, \qquad \dot{y}^\rho = f^\rho\left(q^i, \dot{q}^j, t\right), \tag{9}$$

где y^μ, $\dot{y}^\kappa$ – параметры, определяемые как асимптотически устойчивое тривиальное решение $y^\mu = 0$, $\dot{y}^\kappa = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy^\mu}{dt} = \dot{y}^\mu, \qquad \frac{d\dot{y}^\kappa}{dt} = Y\left(y^\mu, \dot{y}^\kappa, q^i, \dot{q}^j, t\right), \qquad Y\left(0, 0, q^i, \dot{q}^j, t\right) = 0. \tag{10}$$

Связи, заданные уравнениями (9), (10), являются программными связями по отношению к управляемой системе.

5. Уравнения динамики системы с избыточными переменными. Следуя Н.Г. Четаеву, будем рассматривать y^μ, $\dot{y}^\kappa$ как параметры или избыточные переменные, оценивающие отклонения от уравнений связей. С учетом новых переменных кинематическое состояние системы, соответствующей математической модели, будет определяться обобщенными координатами q^i, y^μ и скоростями $\dot{q}^i$, $\dot{y}^\kappa$. Кинетическая энергия, потенциальная энергия и диссипативная функция будут также содержать избыточные координаты y^μ и скорости $\dot{y}^\kappa$: $T = T\left(q^i, y^\mu, \dot{q}^j, \dot{y}^\kappa\right)$, $P = P\left(q^i, y^\mu, t\right)$, $D = D\left(q^i, y^\mu, \dot{q}^j, \dot{y}^\kappa, t\right)$. Предполагается, что функции T, P, D по крайней мере дважды дифференцируемы по всем переменным и при $y^\mu = 0$, $\dot{y}^\kappa = 0$ удовлетворяют условиям

$$T = T^0\left(q^i, \dot{q}^j\right), \qquad P = P^0\left(q^i, t\right), \qquad D = D^0\left(q^i, \dot{q}^j, t\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y^\mu} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^\kappa} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y^\mu} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{y}^\kappa} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = 0 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^\mu \partial \dot{y}^\kappa} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^\kappa \partial \dot{y}^\eta} = a_{\kappa\eta}\left(q^i\right), \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = k_{\mu\nu}\left(q^i, t\right), \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{y}^\kappa \partial \dot{y}^\eta} = c_{\kappa\eta}\left(q^i, \dot{q}^j, t\right),$$

$$\nu = 1, \ldots, m, \qquad \eta = 1, \ldots, r.$$

Если значения переменных y^μ, $\dot y^\kappa$ достаточно малы: $\|z\| \le \varepsilon$, $z = (y^\mu, \dot y^\kappa)$, то, полагая $T^0 = \dfrac{1}{2} m_{ij}\left(q^s\right)\dot q^i \dot q^j$, функции T, P, D можно представить разложениями в ряды по степеням y^μ, $\dot y^\kappa$:

$$T = \frac{1}{2} m_{ij}\left(q^s\right)\dot q^i \dot q^j + \frac{1}{2} a_{\kappa\eta}\left(q^s\right)\dot y^\kappa \dot y^\eta + T^{(3)},$$

$$P = P^0\left(q^s, t\right) + \frac{1}{2} k_{\mu\nu}\left(q^s, t\right) y^\mu y^\nu + P^{(3)},$$

$$D = D^0\left(q^s, \dot q^k, t\right) + \frac{1}{2} c_{\kappa\eta}\left(q^s, \dot q^k, t\right)\dot y^\kappa \dot y^\eta + D^{(3)}.$$

Здесь $T^{(3)}$, $P^{(3)}$, $D^{(3)}$ – соответствующие слагаемые, которые содержат множители y^μ, $\dot y^\kappa$ в степени не ниже третьей. Предполагается, что коэффициенты m_{ij}, $a_{\kappa\eta}$, $k_{\mu\nu}$, $c_{\kappa\eta}$ и все их частные производные ограничены в области Ω изменения переменных q^s, $\dot q^j$ и при всех $t \ge t_0$. Силы R_s соответствуют координатам q^s и рассматриваются как управляющие силы, обеспечивающие выполнение равенств (9).

Возможные перемещения исходной системы δq^i связаны с возможными перемещениями избыточных переменных δy^κ равенствами

$$\frac{\partial \dot y^\kappa}{\partial \dot q^i}\delta q^i = \delta y^\kappa. \tag{11}$$

Из принципа Даламбера–Лагранжа с учетом общего решения [5] системы (11) в случае идеальных связей следуют уравнения динамики управляемой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial P}{\partial q^i} - \frac{\partial D}{\partial \dot q^i} + Q_i + f_i^\kappa \lambda_\kappa \tag{12}$$

и уравнения возмущений связей

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot y^\kappa} - \frac{\partial T}{\partial .y^\kappa} = -\frac{\partial P}{\partial y^\kappa} - \frac{\partial D}{\partial \dot y^\kappa}. \tag{13}$$

Выражения для множителей λ_κ определяются, если уравнения (12), (13) представить в виде, разрешенном относительно $d\dot q^i$, $d\dot y^\kappa$

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot q^k, \qquad \frac{d\dot q^k}{dt} = m^k\left(q^i, \dot q^j, t\right) + f^{k\kappa}\left(q^i, \dot q^j, t\right)\lambda_\kappa + m^{k(2)}, \tag{14}$$

$$\frac{dy^\kappa}{dt} = \dot y^\kappa, \qquad \frac{d\dot y^\kappa}{dt} = b_\eta^\kappa\left(q^i, \dot q^j, t\right)\dot y^\eta + k_\mu^\kappa\left(q^i, t\right) y^\mu + Y^{\kappa(2)}, \tag{15}$$

где $m^{k(2)}$, $Y^{\kappa(2)}$ – слагаемые, которые содержат множители y^μ, $\dot y^\kappa$ в степени нениже второй. Из уравнений (9), (14), (15) следует, что множители λ_κ будут определяться рядами $\lambda_\kappa = \lambda_\kappa^{(0)} + \lambda_\kappa^{(1)} + \lambda_\kappa^{(2)}$ по степеням возмущений связей

y^μ, $\dot{y}^\kappa$. Первое слагаемое $\lambda_\kappa^{(0)}$ соответствует множителю Лагранжа, которое вычисляется из условия $\dfrac{d\dot{f}^\kappa}{dt} = 0$.

Необходимым условием стабилизации связей (5) является асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (15), коэффициенты которой определяются выражениями кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции. Условия устойчивости определяются методом функций Ляпунова. Если функция $V = V\left(q^i, \dot{q}^j, y^\mu, \dot{y}^\kappa, t\right)$ является положительно определенной по переменным y^μ, $\dot{y}^\kappa$, а ее производная $\dot{V}$, вычисленная в силу системы уравнений (14), (15), является отрицательно определенной функцией, и функции V, y^μ, $\dot{y}^\kappa$ допускают бесконечно малый высший предел [9], то тривиальное решение системы (15) устойчиво асимптотически.

6. Моделирование динамики электромеханической системы. Использование уравнений связей (9) в сочетании с уравнениями возмущений связей (13) позволяет применить для моделирования процессов динамики простейшие численные методы интегрирования системы дифференциальных уравнений. В качестве примера применения описанного метода моделирования О.В. Шемеловой была исследована задача моделирования динамики электромеханической системы, представленной на рис. 1.

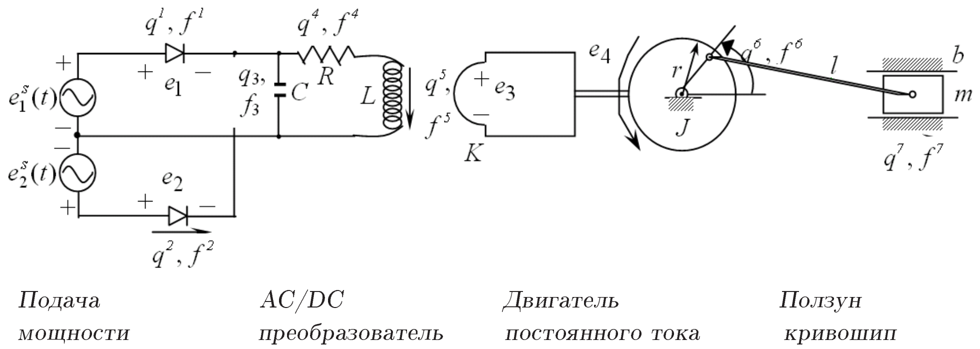

Рис. 1.

В системе привода кривошипно-шатунного механизма [1] блок питания обеспечивает подачу электрической мощности двигателю переменного тока. Переменный ток через выпрямитель подается в двигатель постоянного тока, который, в свою очередь, управляет работой кривошипно-шатунного механизма, расположенного в однородном поле силы тяжести. Построена система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, которая содержит 9 уравнений с 9 неизвестными. Вывод и решение системы дифференциальных уравнений проводилось с помощью интегрированной системы компьютерной символьной математики MAPLE 7. Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений и построение фазовых портретов были осуществлены с помощью графической функции phaseportrait методом Эйлера с шагом $h = 0,01$. На рис. 2 и 3 представлены графики голономной связи $\left(q^7 - r\cos q^6\right)^2 + \left(r\sin q^6\right)^2 = l^2$, полученные в результате кинематического и динамического расчетов. Графические зависимости представлены на рис. 4–8 соответственно. Фазовые портреты решения уравнений динамики для переменных $q^3(t)$, $q^6(t)$, $f^6(t)$, $q^7(t)$, $f^7(t)$ изображены на рис. 9–11.

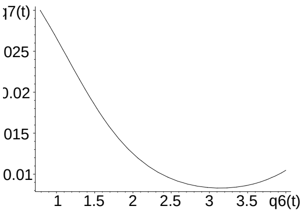

Рис. 2.

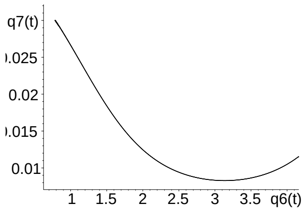

Рис. 3.

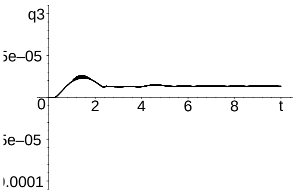

Рис. 4.

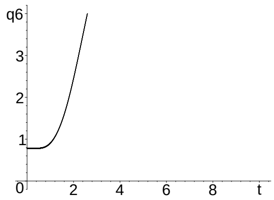

Рис. 5.

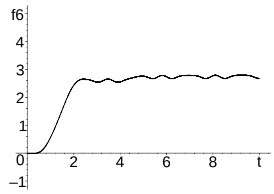

Рис. 6.

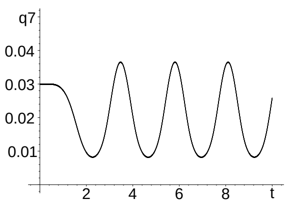

Рис. 7.

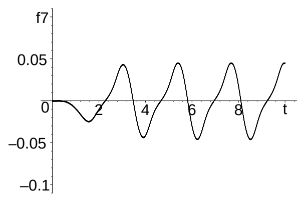

Рис. 8.

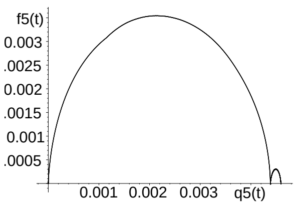

Рис. 9.

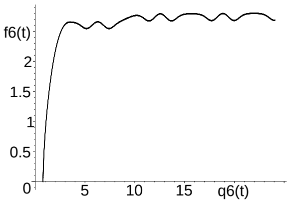

Рис. 10.

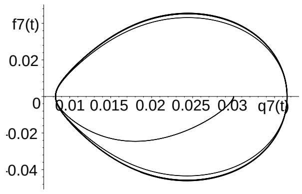

Рис. 11.

7. Обратные задачи динамики твердого тела переменной массы. Изложенный метод моделирования динамики может быть успешно использован для решения обратных задач динамики твердого тела. Некоторые задачи восстановления уравнений твердого тела постоянной массы по известным свойствам движения рассматривались в [10]. Решение задачи сводится к определению сил и моментов, приложенных к телу, по известным первым интегралам и частным интегралам уравнений движения. Условия существования интегралов уравнений движения для тела переменной массы сформулированы в [11]. По заданным интегралам могут быть определены динамические свойства тела и поле сил, в котором движение тела обладает указанными свойствами.

Рассмотрим твердое тело с одной неподвижной точкой, состоящее из неизменной части и изменяющейся части. Будем предполагать, что частицы изменяющейся массы перемещаются по отношению к неизменной части известным образом и в определенном месте покидают тело. Главные оси инерции тела неподвижны относительно неизменной части тела, и оси координат направлены по главным осям инерции. К твердому телу прикреплен гироскоп с постоянными моментами количества движения λ, μ, ν, и размеры тела относительно малы. Относительно главных моментов инерции A, B, C и координат центра масс x_c, y_c, z_c сделаем предположения, соответствующие случаю Лагранжа: $A = B \neq C$, $x_c = y_c = 0$, $z_c \neq 0$, $\lambda = \mu = 0$. Представим уравнения движения тела в виде

$$\begin{cases} A\dot{p} = (A - C)\, qr - \nu q + X + M_x, \\ A\dot{q} = (C - A)\, rp + \nu p + Y + M_y, \\ C\dot{r} = Z + M_z, \\ \dot{\gamma}_i = \Gamma_i\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\,, \qquad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь γ_1, γ_2, γ_3 – косинусы углов наклона осей подвижной системы координат $Oxyz$ к осям неподвижной системы, $M_x = M_x^{\phi} + M_x^{r} + M_x^{k}$, M_x^{ϕ}, M_x^{r}, M_x^{k} – соответственно моменты относительно оси Ox реактивной силы, сил инерции движущихся частиц и сил Кориолиса . Предполагается, что величины A, B, C, M, x_c, y_c, z_c и их производные являются непрерывными и ограниченными функциями времени. В дальнейшем будем полагать, что

$$\lim_{t\to\infty} x_c = x_c^0, \quad (x, y, z)\,, \quad \lim_{t\to\infty} A = A_0,\ (A, B, C)\,, \quad \lim_{t\to\infty} M = M_0,$$

где A_0, B_0, C_0, M_0, x_c^0, y_c^0, z_c^0 – соответствующие значения динамических показателей неизменной части тела. Поставим следующую задачу. Определить условия, накладываемые на X, Y, Z, Γ_i, при которых система (16) имеет интегралы

$$\begin{cases} f_1 \equiv A\left(p^2+q^2\right)+Cr^2+2Mgz_c\gamma_3-\dfrac{3g}{R}\left(A-C\right)\gamma_3^2=C_1, \\ f_2 \equiv A\left(p\gamma_1+q\gamma_2\right)+Cr\gamma_3+\nu\gamma_3=C_2, \\ f_3 \equiv C\left(r-r_0\right), \qquad r_0=\mathrm{const}, \qquad g=\dfrac{\mu_1}{R^2}, \\ f_4 \equiv \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1=0. \end{cases} \tag{17}$$

где C_1, C_2, μ, R – постоянные, M – масса тела. Продифференцируем выражения (17) с учетом системы (16) и уравнений возмущений связей

$$\dot{f}_1=k_{11}f_1+k_{12}f_2+k_{13}f_3, \quad \dot{f}_2=k_{21}f_1+k_{22}f_2+k_{23}f_3,$$

$$\dot{f}_3=k_{31}f_1+k_{32}f_2+k_{33}f_3, \quad \dot{f}_4=k_{44}f_4.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} p\tilde{X}+q\tilde{Y}+r\tilde{Z}=h_1, \quad \gamma_1\tilde{X}+\gamma_2\tilde{Y}+\gamma_3\tilde{Z}=h_2, \\ Z=h_3, \quad \gamma_1\Gamma_1+\gamma_2\Gamma_2+\gamma_3\Gamma_3=k_{44}f_4, \end{cases} \tag{18}$$

для определения выражений

$$\tilde{X}=X+M_x, \qquad \tilde{Y}=Y+M_y, \qquad \tilde{Z}=Z+M_z,$$

$$h_1=\sum_{i=1}^{3}k_{1i}f_i-Mgz_c\Gamma_2+\frac{3g}{R}\left(A-C\right)\gamma_3\Gamma_3-\frac{1}{2}\dot{A}\left(p^2+q^2\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\dot{C}r^2+\frac{3g}{2R}\left(\dot{A}-\dot{C}\right)\gamma_3^2-Mg\gamma_3\dot{z}_c,$$

$$h_2=\sum_{i=1}^{3}k_{2i}f_i, \qquad h_3=\sum_{i=1}^{3}k_{3i}f_i.$$

Решение системы (18) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{X}=\frac{1}{p\gamma_2-q\gamma_1}\left(\gamma_2h_1-qh_2+\left(q\gamma_3-r\gamma_2\right)h_3\right), \\ &\tilde{Y}=\frac{1}{p\gamma_2-q\gamma_1}\left(ph_2-\gamma_3h_1+\left(r\gamma_1-p\gamma_3\right)h_3\right), \\ &\tilde{Z}=h_3, \\ &\Gamma_1=c_3\gamma_2-c_2\gamma_3+\gamma_1\gamma^{-2}k_{44}f_4, \qquad \left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right), \\ &\gamma^{-2}=\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) при $k_{ij} \equiv 0$, $i, j = 1, 2, 3$, $k_{44} \equiv 0$, $c_1 = p$, $c_2 = q$, $c_3 = r$,

$$M_x = \frac{\gamma_2 \tilde{h}_1}{p\gamma_2 - q\gamma_1}, \qquad M_y = \frac{p\tilde{h}_1}{p\gamma_2 - q\gamma_1}, \qquad M_z = 0,$$
$$2\tilde{h}_1 = -\dot{A}\left(p^2 + q^2\right) - \dot{C}r^2 - 2Mg\gamma_3\dot{z}_c + \frac{3g}{2R}\left(\dot{A} - \dot{C}\right)\gamma_3^2$$

следуют выражения проекций силы

$$X = Mgz_c\gamma_2 + \frac{3g}{R}\left(C - A\right)\gamma_2\gamma_3, \quad Y = -Mgz_c\gamma_1 + \frac{3g}{R}\left(A - C\right)\gamma_3\gamma_1, \qquad Z = 0$$

соответствующей силовой функции [12]

$$U = -\frac{\mu_1 M}{R^2}\left(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3\right) - \frac{3}{2}\frac{\mu_1}{R^3}\left(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2\right). \tag{20}$$

При этом система (16) записывается в виде [13]:

$$\begin{cases} A\dot{p} = \left(A - C\right)qr - \nu q + Mgz_c\gamma_2 + \dfrac{3g}{R}\left(C - A\right)\gamma_2\gamma_3, \\ A\dot{q} = \left(A - C\right)rp + \nu p - Mgz_c\gamma_1 + \dfrac{3g}{R}\left(A - C\right)\gamma_3\gamma_1, \\ C\dot{r} = 0, \\ \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3 \qquad (1, 2, 3). \end{cases} \tag{21}$$

Система (21) имеет частные интегралы:

$$\begin{array}{lll} x_1 \equiv p = 0, & x_2 \equiv q = 0, & x_3 \equiv r - r_0 = 0, \\ x_4 \equiv \gamma_1 = 0, & x_5 \equiv \gamma_2 = 0, & x_6 \equiv \gamma_3 - 1 = 0. \end{array} \tag{22}$$

Уравнения возмущений связей (22) записываются в виде:

$$\begin{array}{lll} x_1 \equiv p = 0, & x_2 \equiv q = 0, & x_3 \equiv r - r_0 = 0, \\ x_4 \equiv \gamma_1 = 0, & x_5 \equiv \gamma_2 = 0, & x_6 \equiv \gamma_3 - 1 = 0. \end{array}$$

Используем в качестве функции Ляпунова связку интегралов (17):

$$V = f_1 - \frac{1}{A}\left(Cr_0 + \nu\right)f_2 + 2C\left(\frac{Cr_0 + \nu}{A} - r_0\right)f_3 + \frac{C}{A}\left(C - A\right)f_3^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{2A}\left(Cr_0+\nu\right)^2+3\omega^2\left(A-C\right)-Mgz_c\right)f_4+\frac{3}{4}\omega^2\left(A-C\right)f_4^2,\omega^2=\frac{3g}{R}.$$

Тогда согласно теореме об асимптотической устойчивости интегрального многообразия [9] можно показать, что движение твердого тела с гироскопом устойчиво асимптотически по отношению к уравнениям связей (21) при выполнении следующих неравенств [13]:

$$\left(Cr_0+\nu\right)^2-4a\left(Mgz_c-3\omega^2\left(A-C\right)\right)>0,\qquad A'<0,\qquad \left(\frac{C^2}{A}\right)'<0,$$

$$A'\left(\frac{1}{2A}\left(Cr_0+\nu\right)^2+3\omega^2\left(A-C\right)-Mgz_c\right)'-\frac{1}{4}\left(\left(Cr_0+\nu\right)'\right)^2>0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код 06–01–00664.

1. *Layton R.* Differential-Algebraic Equations of Dynamical Systems. – Springer, 2001. – 159 p.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Динамическое моделирование экономических объектов. – Казань: Фэн, 1996. – 223 с.
3. *Саитов Р.И.* Математическая модель процесса познания // Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах России на современном этапе: – Материалы II Уральской регион. межвузов. научно-практической конф. (19–21 мая 1997 г.). – Уфа, 1997. – Ч. 2. – С. 66–67.
4. *Пятницкий Е.С.* Теоретическая биомеханика. Концепция управления движением в условиях неопределенности. – Избр. тр.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2006. – Т. 3. – 448 с.
5. *Мухарлямов Р.Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Диф. уравнения. – 2003. – Вып. 39, № 3. – С. 343–353.
6. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование динамики систем различной физической природы и обратные задачи динамики // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – Казань, 2007. – Вып. 13, **1**(**27**). – С. 23–36.
7. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1972. – P. 1–16.
8. *Четаев Н.Г.* О вынужденных движениях // Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 329–335.
9. *Мухарлямов Р.Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Диф. уравнения. – 1969. – **5**, N 4. – С. 688–699.
10. *Галиуллин А.С.* Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
11. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы // Тр. Казан. авиац. ин-та, 1959. – Вып. 48. – 118 с.
12. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
13. *Киргизбаев Ж.* К устойчивости перманентных вращений тела переменной массы с гироскопом в ньютоновском поле сил // Тр. ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. – 1968. – Вып 5. – С. 13–23.

Российский ун-т дружбы народов, Москва, Россия
robgar@mail.ru

Получено 03.11.07