

УДК 531.38

©2007. И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ С САМОПЕРЕСЕЧЕНИЕМ

Рассмотрена замкнутая система n твердых тел S_k , связанных упругими сферическими шарнирами. На систему не действуют внешние силы и моменты. Записаны уравнения равновесия изучаемого объекта. Рассмотрен частный случай равновесной конфигурации системы, когда оси симметрии всех тел расположены в одной плоскости. В простейшем случае ($n = 6$) построено решение типа “розы”, в котором возможно самопересечение в одной точке осей симметрии нескольких тел S_k . Данное решение является конечномерным аналогом решения Е.Л. Старостина, полученного для самопересекающихся упругих стержней. Выделены области геометрических параметров, в которых изучаемое решение существует.

Введение. В последнее время внимание многих ученых привлекает изучение замкнутых стержневых систем. Связано это с одним из наиболее интересных приложений теории стержней, а именно, моделированием с их помощью третичной структуры белковых молекул, в частности, молекул ДНК. Одним из направлений исследования является поиск равновесных состояний замкнутых упругих стержней. Изучению этой проблемы, в частности, посвящены работы [1–6]. Первыми, полученными в [1–4] равновесными конфигурациями замкнутых стержней, были такие, в которых упругая ось стержня расположена в плоскости и представляет собой окружность или “восьмерку”. В 2000 г. Е.Л. Старостин представил еще одно точное решение уравнений равновесия упругих замкнутых систем, которое он назвал решением типа “розы” [5]. В работе [6] проведен численный анализ этого решения. Следует отметить, что во всех приведенных работах [1–6] решения получены в виде сложных выражений, включающих специальные функции, и в дальнейшем возможен только их численный анализ.

В работах [7, 8] предложена конечномерная модель замкнутого упругого стержня, представляющего из себя систему n гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами. В [8] введен упругий шарнир, допускающий большие прогибы, что позволило, как и в упругих стержневых системах, учесть геометрическую нелинейность объекта. Предложенный конечномерный подход дал возможность в явном виде записать решения для круговой оси стержня [7, 8], а в случае кривой типа “восьмерки” выписать решение в явном виде и провести его анализ для конкретного числа тел в системе (в [8] $n = 4$ и 6).

В настоящей статье в простейшем случае ($n = 6$) построено решение типа “розы”, в котором возможно самопересечение в одной точке осей симметрии нескольких тел S_k . Это решение является конечномерным аналогом решения Е.Л. Старостина [5, 6]. Выделены области существования геометрических па-

раметров, допускающих полученное решение.

1. Постановка задачи. Уравнения равновесия. Допустим, что система состоит из n гироскопов Лагранжа S_k , связанных в точках O_k ($k = \overline{1, n}$) пересечения их осей симметрии упругими сферическими шарнирами. Как и в работах [1–7], полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, вследствие чего ее центр масс C неподвижен. Аналогично [7, 8] введем углы Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$, определяющие положение связанной системы координат каждого тела $C_k X_k Y_k Z_k$ по отношению к инерциальной $CXYZ$. Здесь C_k – центр масс тела S_k , а ось $C_k Y_k$ направлена вдоль оси симметрии тела S_k . Полагая, что система замкнута ($O_1 = O_{n+1}$), имеем следующие условия замкнутости [7, 8]:

$$\sum_{k=1}^n h_k \sin \psi_k \sin \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \cos \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \cos \psi_k \sin \theta_k = 0, \quad (1)$$

где $h_k = O_k O_{k+1}$.

Считая в уравнениях движения замкнутой системы, записанных в [8], все скорости и ускорения равными нулю, получаем следующие уравнения равновесия:

$$\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k+1} = 0; \quad \mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k+1} - \mathbf{h}_k \times \mathbf{R}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n}); \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}; \quad \mathbf{L}_{n+1} = \mathbf{L}_1.$$

Здесь \mathbf{R}_k и \mathbf{L}_k соответственно сила и момент силы, характеризующие действие тела S_{k-1} на S_k , а $-\mathbf{R}_{k+1}$ и $-\mathbf{L}_{k+1}$ – соответственно сила и момент силы действия тела S_{k+1} на S_k . В соотношениях (2) учтено, что момент сил реакции в сферическом шарнире равен нулю [9], и остаются лишь упругие моменты, характеризующие действие тел S_{k-1} и S_{k+1} на тело S_k . Как установлено в [8], упругий момент может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{L}_k = c_1^2 (\varkappa_k^1 \mathbf{e}_k^1 + \varkappa_k^2 \mathbf{e}_k^2) + c_2^2 \varkappa_k^3 \mathbf{e}_k^3.$$

Здесь c_1^2, c_2^2 – соответственно изгибная и крутильная жесткости, \mathbf{e}_k^i ($k = \overline{1, n}; i = 1, 2, 3$) – орты связанной с телом S_k системы координат, \varkappa_k^i – компоненты дискретного аналога вектора Дарбу $\boldsymbol{\kappa}_k$ в точке O_k , который равен

$$\boldsymbol{\kappa}_k = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_{k-1}^i \times \mathbf{e}_k^i), \quad h = \min_k h_k.$$

Допустим далее, что, как и в работах [1–8], оси симметрии тел S_k лежат в одной плоскости (пусть это будет плоскость Cyz). При этом полагаем, что $\psi_k = 0$. В этом случае, как в непрерывной модели [1–5], так и в конечномерной [7], показано, что разность углов собственного вращения $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \text{const}$ (постоянное кручение). Тогда получаем, что проекция изгибающего момента на ось $CX_k \parallel CX$ равна

$$L_k^1 = \frac{c_1^2}{h} \sin(\theta_k - \theta_{k-1}). \quad (3)$$

Проектируя (2) на ось \mathbf{e}_k^1 и учитывая (3), получаем следующую систему уравнений для определения реакции $\mathbf{R} = R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты осей CY и CZ) и углов θ_k :

$$\sin(\theta_{k+1} - \theta_k) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) = a_k(R_y \sin \theta_k - R_z \cos \theta_k), \quad (4)$$

где $a_k = \frac{h_k h}{c_1^2}$, $k = \overline{1, n}$; $\theta_1 = \theta_{n+1}$, $\theta_0 = \theta_n$.

Условия замкнутости системы тел в плоском случае получаем из уравнений (1), в которых $\psi_k = 0$. Имеем

$$\sum_{k=1}^n h_k \cos \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \sin \theta_k = 0. \quad (5)$$

Итак, наша задача состоит в определении возможности существования решения типа “роза” [5, 6] для системы уравнений (4), (5).

2. Решение типа “розы”. Как уже отмечалось, в этой конфигурации замкнутой системы, в отличие от “восьмерки”, возможно самопересечение осей симметрии нескольких тел в одной точке (см. рис. 1, 2).

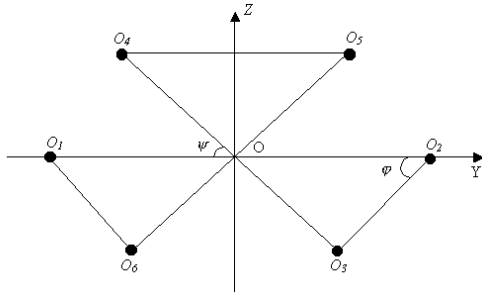


Рис. 1. Система типа “розы”.

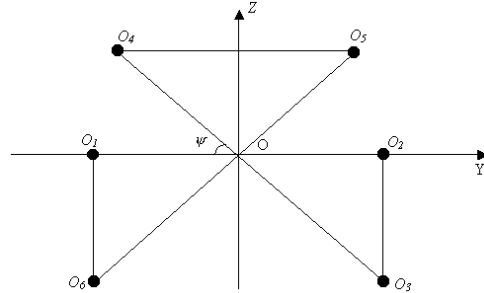


Рис. 2. Частный случай.

Рассмотрим простейший случай реализации такой конфигурации, когда конечномерный аналог упругой системы содержит шесть тел (рис. 1) и в точке O пересекаются оси симметрии трех тел: S_1, S_3 и S_5 . Аналогично [7, 8] полагаем, что рассматриваемая фигура симметрична относительно оси OZ и при этом длины $O_k O_{k+1}$ ($k = \overline{1, 6}$, $O_7 = O_1$) осей симметрии тел равны

$$O_1 O_2 = h_1, \quad O_2 O_3 = O_6 O_1 = h_2, \quad O_3 O_4 = O_5 O_6 = h_3, \quad O_4 O_5 = h_4, \quad (6)$$

а углы θ_k между осью симметрии тела S_k и осью OY таковы

$$\theta_1 = \theta_4 = 0, \quad \theta_2 = \pi + \varphi, \quad \theta_3 = \pi - \psi, \quad \theta_5 = \pi + \psi, \quad \theta_6 = \pi - \varphi. \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в (5), получаем, что это решение удовлетворяет условию (5) замкнутости оси, если

$$\cos \varphi = b - c \cos \psi, \quad (8)$$

где

$$c = \frac{h_3}{h_2}; \quad b = \frac{h_1 + h_4}{2h_2}. \quad (9)$$

Кроме того, решение (7) с учетом (6) удовлетворяет уравнениям равновесия (4) в случае $R_z = 0$ и

$$\sin(\varphi + \psi) - \sin \varphi = a_2 R_y \sin \varphi, \quad \sin \psi - \sin(\varphi + \psi) = -a_3 R_y \sin \psi. \quad (10)$$

После исключения из (10) компоненты силы реакции R_y получаем

$$\frac{\sin(\varphi + \psi) - \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi) - \sin \varphi} = c \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}. \quad (11)$$

Итак, получены два уравнения (8) и (11), которым должны удовлетворять углы φ и ψ для того, чтобы решение (7) было положением равновесия изучаемой системы. Входящие в (8), (11) параметры b и c связаны с длинами осей симметрии тел S_k , заданными в (6), по формулам (9).

Введем дополнительный параметр p . Пусть

$$\sin \varphi = p \sin \psi. \quad (12)$$

Так как в изучаемом случае углы φ и ψ острые, то $p > 0$. Кроме того, из постановки задачи (см. рис. 1) следует $h_2 \sin \varphi = OO_3 \sin \psi$, а поскольку $OO_3 < h_3$, имеем $p < c$. Таким образом, интервал определения параметра p таков:

$$0 < p < c. \quad (13)$$

Подставляя (8), (12) в (11) и учитывая, что $\sin \psi \neq 0$, имеем

$$\cos \psi = \frac{bc - p(b + c - 1)}{(c - p)^2}. \quad (14)$$

Поскольку $0 < \cos \psi < 1$, то из (14) следует

$$bc - p(b + c - 1) > 0, \quad (15)$$

$$bc - p(b + c - 1) < (c - p)^2. \quad (16)$$

Из (15), (16) получаем

$$\frac{p(c - 1)}{c - p} < b < \frac{p(c - 1)}{c - p} + (c - p). \quad (17)$$

Очевидно, что неравенства (17) должны исследоваться в области выполнения геометрического условия (13). Исследование системы неравенств было проведено численными методами при различных значениях параметра p . Получены характерные области в случаях $p > 1$ и $p < 1$. Так на рис. 3 показаны

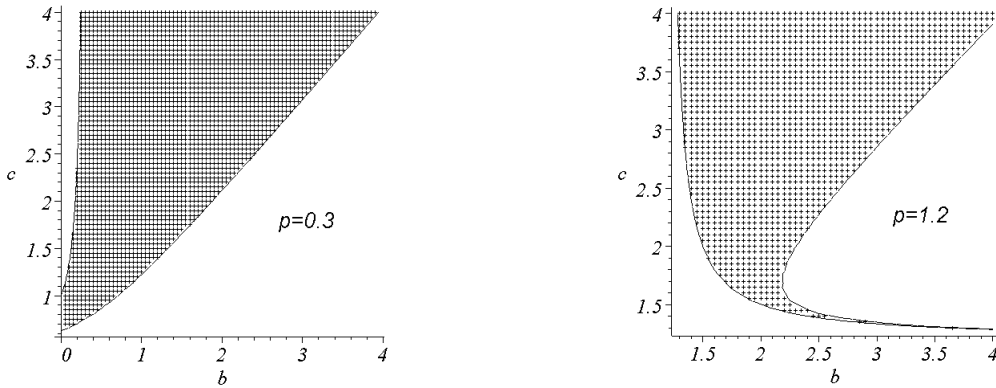


Рис. 3. Области выполнения неравенств (17).

области, где выполнены неравенства (17) при значениях p соответственно равных $p = 0.3$ и $p = 1.2$.

Кроме того, из (8), (12) следует

$$(c^2 - p^2) \cos^2 \psi - 2bc \cos \psi + p^2 + b^2 - 1 = 0. \quad (18)$$

Исключая из (18) с помощью (14) $\cos \psi$, получим следующее уравнение для определения дополнительного параметра $p = p(b, c)$:

$$f(p) = p^5 - 3cp^4 + 2[c^2 + (1-c)(b-1)]p^3 + 2c[1 + (c-b)(1-c)]p^2 - 3c^2p + c^3 = 0. \quad (19)$$

Поскольку $f(0) = c^3 > 0$, а $f(c) = -2c^3(c-1)^2 < 0$, то в области (13) имеется хотя бы один действительный положительный корень уравнения (19).

На рис. 4 показана область существования решений уравнения (19) при условии выполнения неравенств (13), (17).

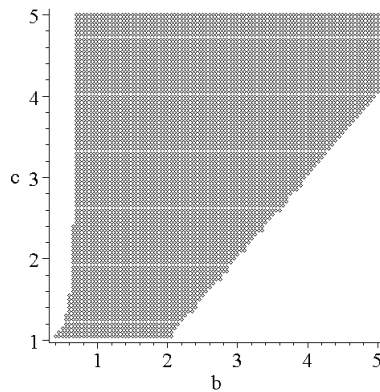


Рис. 4. Область существования решений (19).

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, что параметр c не может равняться единице. Действительно, полагая $c = 1$ в уравнении (19), получаем

$$p^5 - 3p^4 + 2p^3 + 2p^2 - 3p + 1 = (p + 1)(p - 1)^4 = 0.$$

У этого уравнения нет корней в области (13), где требуется $0 < p < 1$, т.е. при $c = 1$ не выполняется геометрическое условие существования конфигурации, заданной на рис. 1.

Таким образом, возможны варианты $c < 1$ ($h_3 < h_2$) либо $c > 1$ ($h_3 > h_2$). Отметим, что при условии $c < 1$ из (17) получаем, что необходимо выполнение неравенства $F(p) = p(c - 1) + (c - p)^2 > 0$. Дискриминант уравнения $F = 0$ равен $(3c + 1)(1 - c)$, и в этом случае он всегда больше нуля. Кроме того, учитывая что при этом $F(c) = c(c - 1) < 0$, а p принадлежит интервалу (13) получаем, что для $c < 1$ необходимо выбирать p из интервала $p > p^*$, где p^* — больший корень уравнения $F(p) = 0$.

Итак, в изучаемой замкнутой системе тел возможна конфигурация, представленная на рис. 1, и при этом углы θ_k задаются соотношениями (7), в которых ψ и θ находятся из (12), (14).

3. Частный случай решения типа “розы”. Возможен частный случай решения типа “розы”, в котором $\varphi = \pi/2$ (рис. 2). При этом из (8) следует

$$\cos \psi = b_1, \quad (19)$$

где $b_1 = b/c = (h_1 + h_4)/(2h_3)$. Учитывая, что ψ — острый угол, находим, что область определения параметра b_1 такова

$$0 < b_1 < 1. \quad (20)$$

Далее из (19), (11) получаем

$$\sin \psi = \frac{b_1}{c(b_1 - 1) + 1}. \quad (21)$$

Найдем промежуток изменения параметра c из условия $0 < \sin \psi < 1$. Из (21) следует

$$0 < \frac{b_1}{c(b_1 - 1) + 1} < 1.$$

Анализ этих неравенств позволяет установить, что $c \in (0, 1)$.

Из (19), (21) получаем

$$b_1^2 + \frac{b_1^2}{[c(b_1 - 1) + 1]^2} = 1. \quad (22)$$

Как нетрудно убедиться, уравнение (22) всегда имеет в области (20) один положительный корень меньший единицы.

Итак, выбираем произвольное значение b_1 из области (20) и находим из (22) соответствующий корень $c < 1$, что дает возможность определения $b = b_1 c$. Далее находим $\psi = \arccos b_1$ и, учитывая $\varphi = \pi/2$, определяем θ_k согласно (7). Таким образом, в рассмотренном частном случае также существует конфигурация, изображенная на рис. 2.

1. *Wadati M., Tsuru H.* Elastic model of looped DNA // *Physica*. – 1986. – 21D. – P. 213–226.
2. *Бенхэм Дж.* Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308 – 338.
3. *Starostin E.I.* Three-dimensional shapes of looped DNA // *Meccanica* **31**. – V. 3. – 1996. – P. 235–271.
4. *Кугушев Е.И., Пирогова Е.Е., Старостин Е.Л.* Математическая модель образования трехмерной структуры ДНК. – 1997. – 24 с. – (Препринт РАН ИПМ им. М.В. Келдыша, № 77).
5. *Starostin E.I.* Equilibrium configurations of a thin elastic rod with self contacts // Proc. of the 16th IMACS World Congress 2000, August 21–25. – 2000.
6. *Starostin E.I.* Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // *Phil. Trans. K. Soc. Lon.*, A, 362. – 2004. – P. 1317–1334.
7. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // *Механика твердого тела*. – 2005. – Вып. 35. – С. 33 – 39.
8. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
9. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
bolg@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.08.07