Выводы. Таким образом, в данной статье проанализированы основные виды интегральной зависимости между выходным и входным сигналами в системе с переменными параметрами, что даёт возможность аналитического представления решения дифференциального уравнения и импульсной переходной функции системы вида (1). Получение переходных функций по экспериментальным данным приводит к возможности аналитического или численного формирования адекватных интегральных моделей рассматриваемого объекта.

1. *Солодов А.В., Петров Ф.С.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. – М:. Наука, 1971.
2. *Шевелёв А.Г.* Основы линейной теории нестационарных систем автоматического управления. Мин. образ. и науки Украины НАУ. – К:. изд. НАУ, 2004. – 265с.

Поступила 11.08.2010р.

УДК 621.

А.М. Корнеев, ПуАО «Хмельницкгаз», г. Хмельницкий

РЕКУРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

The paper discusses algorithms for solving integro-differential equations based on recurrence algorithms for problems in the theory of viscoelasticity.

В работе получены рекуррентные алгоритмы типовых для теории вязкоупругости слабосингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на основе замены интегралов квадратурами, а также предложен способ учета особенности интегральных операторов.

Алгоритмы реализации типовой модели. В качестве типовой модельной задачи при исследовании динамики вязкоупругой системы [1] рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\ddot{U}(t) + \omega^2[U(t) - \int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau] = f(t), \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$U(0) = T_0, \quad \dot{U}(0) = T_1, \qquad (2)$$

где $f(t) = (\beta^2 + \omega^2 - \dfrac{\varepsilon\omega^2 t^\alpha}{\alpha})e^{-\beta t}$; $f(t)$ – произвольно заданная функция; $R(t-\tau) = \varepsilon(t-\tau)^{\alpha-1}e^{-\beta(t-\tau)}$ – ядро; T_0, T_1, α, ε, ω – коэффициенты.

Если принять $T_0 = 1; \quad T_1 = -\beta; \quad \alpha = 0{,}25; \quad \varepsilon = 0{,}01; \quad \omega = 2\pi$, то уравнение (1) при начальных условиях (2) имеет точное решение $U(t) = e^{-\beta t}$.

Используя метод вариации [2], исходное интегро-дифференциальное уравнение можно привести к виду

$$U(t) = \cos\omega t - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\theta) f(\theta)d\theta +$$
$$+\omega\int_0^t [\int_0^{t-\tau} \sin\omega(t-\tau-\theta)R(\theta)d\theta]U(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Тогда рекуррентный алгоритм для решения уравнения (3) принимает вид (алгоритм 1)

$$U(t_n) = \cos\omega t_n - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t_n + \frac{1}{\omega}I(n) + \omega\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i J(n-i)U_i\ , \tag{4}$$

где

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N-1}, \quad n = \overline{1,N}, \quad \mathrm{A}_1 = \frac{\Delta t}{2},$$
$$\mathrm{A}_i = \Delta t, \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$f(t) = (\beta^2 + \omega^2 - \frac{\varepsilon\omega^2 t^\alpha}{\alpha})e^{-\beta t}, \quad R(t) = \varepsilon t^{\alpha-1}e^{-\beta t},$$

$$I(n) = \int_0^{t_n} \sin\omega(t_n - \theta)f(\theta)d\theta \approx \sum_{j=1}^m \mathrm{B}_j^{(m,n)} \sin\omega(t_n - x_j)f(x_j),$$

$$J(n-i) = \varepsilon\int_0^{(n-i)\Delta t} \sin\omega[(n-i)\Delta t - \theta]e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}d\theta =$$

$$= \varepsilon(n-i)^\alpha \int_0^{\Delta t} \sin[\omega(n-i)(\Delta t - \tau)]e^{-\beta(n-i)\tau}\tau^{\alpha-1}d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha}(n-i)^\alpha \int_0^{\Delta t} \sin[\omega(n-i)(\Delta t - z^{\frac{1}{\alpha}})]e^{-\beta(n-i)z^{\frac{1}{\alpha}}}dz =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha}(n-i)^\alpha \sum_{j=1}^m C_j^{(m,n,i)} \sin[\omega(n-i)(\Delta t - x_j^{\frac{1}{\alpha}})]e^{-\beta(n-i)x_j^{\frac{1}{\alpha}}},$$

$\mathrm{B}_j^{(m,n)}$, $C_j^{(m,n,i)}$ – веса, а x_j – узлы Гаусса.

Если исходить из более сложной зависимости между напряжениями и деформациями [2], то исходное уравнение (1) рассматриваемой задачи можно записать в виде

$$U(t)=1-\beta t+\int_0^t (t-s)f(s)ds-\omega^2\int_0^t \Gamma(t-s)U(s)ds\ , \tag{5}$$

где $\Gamma(t-s)=t-s-\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R(\tau)d\tau$.

Рекуррентное соотношение для уравнения (5) имеет вид (алгоритм 2)

$$\begin{aligned} U(t_n)&=1-\beta t_n+\sum_{j=1}^{m}\mathrm{B}_j^{(m,n)}(t_n-x_j)f(x_j)-\\ &-\omega^2(t_n\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_jU_i-\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_it_iU_i)+\\ &+\frac{\varepsilon\omega^2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i[\sum_{j=1}^{m}C_j^{(m,n,i)}(t_n-t_i-x_j^{\frac{1}{\alpha}})e^{-\beta x_j^{\frac{1}{\alpha}}}]U_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Для решения интегро-дифференциального уравнения с начальными условиями может быть использован также метод Рунге-Кутта (алгоритм 3). Для этого приведем исходное уравнение к удобному виду, т.е.

$$\begin{aligned} &U'=V,\quad V'=f(t)-\omega^2U(t)+\omega^2\int_0^t R(t-\tau)U(\tau)d\tau,\\ &U(0)=1,\quad V(0)=-\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

Полагая $t=t_n=(n-1)\Delta t,\quad U(t_n)=U_n$, из (7) получим

$$\begin{aligned} &U_n'=V_n,\quad V_n'=f_n-\omega^2U_n+\omega^2\int_0^{t_n} R(t-\tau)U(\tau)d\tau,\\ &U_1=1,\quad V_1=-\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку интеграл, входящий в систему (8), имеет слабую особенность типа Абеля, для его вычисления непосредственное использование какой-либо квадратурной формулы невозможно. Для преодоления данной трудности проведем замену переменных: $t_n-\tau=z^r$, $r=\dfrac{1}{\alpha}$, что позволяет устранить эту особенность. При этом получим:

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_n} R(t_n-\tau)U(\tau)d\tau=\varepsilon\int_0^{t}(t_n-\tau)^{\alpha-1}e^{-\beta(t_n-\tau)}U(\tau)d\tau=\\ &=\frac{\varepsilon}{\alpha}\int_{i=1}^{n}e^{-\beta z^r}U(t_n-z^r)dz=\frac{\varepsilon}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{A}_ie^{-\beta s_i^r}U(t_n-s_i^r)= \end{aligned} \tag{9}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta t_i} U(t_n - t_i) = \frac{\varepsilon}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta t_i} U_{n+1-i},$$

$$s_i = (i-1)\Delta s, \quad \Delta s = \frac{t_n^{\alpha}}{n-1}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$A_1 = A_n = \frac{\Delta s}{2}, \quad A_j = \Delta s, \quad j = \overline{2, n-1}.$$

Система (8) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &U_n' = V_n, \\ &V_n' = f_n - \omega^2 U_n + \frac{\varepsilon\omega^2}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta t_i} U_{n+1-i}, \\ &U_1 = 1, \quad V_1 = -\beta, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

что позволяет применить метод Рунге-Кутта.

Достаточно большое количество вычислительных экспериментов по решению ряда вариантов задачи (1) – (2) позволило установить работоспособность рассмотренных алгоритмов. Наиболее высокие показатели точности решений получены посредством алгоритмов 1 и 2, которые по точности и времени счета выгодно отличаются от итерационных методов. По затратам времени алгоритм 1 имеет предпочтение по отношению к алгоритму 2.

Таким образом, сравнительный анализ численных алгоритмов решения интегро-дифференциальных уравнений рассматриваемого класса задач вязкоупругости свидетельствует о том, что наиболее рациональным подходом является замена интеграла квадратурами.

Способ учета слабосингулярности. Как известно [3], большинство задач теории вязкоупругости сводится к решению слабо сингулярных интегральных уравнений или их систем. В этом случае, непосредственное применение формул приводит к определенным трудностям, одним из подходов, к преодолению которых, может быть предварительное преобразование математической модели.

Рассмотрим данный подход на примере уравнения

$$U(t) - \int_0^t \frac{K(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} U(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 < 1-\alpha < 1, \tag{11}$$

где $K(t,\tau)$ - регулярная функция. Выполняя дискретизацию уравнения (11) узлами $t_n = (n-1)\Delta t$ и обозначая $U(t_n) = U_n$, получим

$$U_n - \int_0^{t_n} \frac{K(t_n,\tau)}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} U(\tau)\, d\tau = f_n\,. \tag{12}$$

Интеграл, входящий в уравнение (12), с помощью, рассмотренной выше, замены переменных $t_n - \tau = z^{\frac{1}{\alpha}}$ приводим к виду

$$\int_0^{t_n} \frac{K(t_n,\tau)}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} U(\tau)d\tau = \frac{1}{\alpha}\int_0^{t_n^\alpha} K(t_n, t_n - z^{\frac{1}{\alpha}})U(t_n - z^{\frac{1}{\alpha}})dz, \tag{13}$$

используя обозначения

$$\Delta z = \frac{t_n^\alpha}{n-1}, \quad z_i = (i-1)\Delta z, \quad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Используя какую-нибудь квадратурную формулу, например, формулу трапеций для вычисления интеграла (13), получим рекуррентную зависимость для вычисления приближенных значений решения уравнения (14)

$$U_n = \frac{\alpha}{\alpha - \mathrm{A}_1\mathrm{K}_{n,n}}[f_n + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^{n} \mathrm{A}_i\mathrm{K}_{n,n+1-i}U_{n+1-i}], \tag{15}$$

$$U_1 = f_1, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Для интегро-дифференциальных уравнений можно выполнить преобразование по методу вариации произвольных постоянных и двукратное интегрирование с учетом заданных начальных условий.

Пример. Решается интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\ddot{U}(t) + \omega^2[U(t) - \int_0^t R_1(t-\tau)U(\tau)d\tau] + \\ + \rho\omega^2[U^3(t) - \int_0^t R_3(t-\tau)U^3(\tau)d\tau] = f(t),\end{gathered} \tag{16}$$

с начальными условиями

$$U(0) = U_0, \quad \dot{U}(0) = \overline{U}_0, \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}R_i(t) = \mathrm{A}e^{-i\beta t}t^{\alpha-1}; \quad i = 1,3; \quad 0 < \alpha < 1; \quad U_0 = 1; \quad \dot{U}_0 = -\beta; \\ f(t) = [\beta^2 + \omega^2 - \frac{\mathrm{A}\omega^2 t^\alpha}{\alpha} + \rho\omega^2 e^{-2\beta t}(1 - \frac{\mathrm{A}t^\alpha}{\alpha})]e^{-\beta t};\end{gathered} \tag{18}$$

(в этом случае уравнение (16) имеет точное решение $U(t) = e^{-\beta t}$).

Дважды интегрируя уравнение (16) и учитывая условия (17), получим

$$U(t) = 1 - \beta t + \int_0^t (t-s)f(s)\,ds - \omega^2\int_0^t [\Gamma_1(t-s) + \rho\Gamma_3(t-s)U^3(s)]U(s)\,ds, \tag{19}$$

где

$$\Gamma_i(t-s)=t-s-\int_0^{t-s}(t-s-\tau)R_i(\tau)\,d\tau,\quad i=1,3. \tag{20}$$

Согласно алгоритму 1 приближенные значения $U_n=U(t_n)$, решения для уравнения (19) в узлах $t_n=(n-1)\Delta t,\quad n=1,2,\ldots,$ находим последовательно из соотношения

$$\begin{gathered}U_n=1-\beta t_n-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{B}_j^{(m,n)}(t_n-x_j)f(x_j)-\\ -\omega^2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\Gamma_1(t_n-t_i)U_i-\rho\omega^2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\Gamma_3(t_n-t_i)U_i^3,\\ n=2,3,\ldots,\end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\Gamma_1(t_n-t_i)=t_n-t_i-\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}C_j^{(m,n)}(t_n-t_i-x_j^{\frac{1}{\alpha}})e^{-\beta x_j^{\frac{1}{\alpha}}}; \tag{22}$$

$$\Gamma_3(t_n-t_i)=t_n-t_i-\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}D_j^{(m,n)}(t_n-t_i-x_j^{\frac{1}{\alpha}})e^{-3\beta x_j^{\frac{1}{\alpha}}}; \tag{23}$$

$$\mathrm{A}_1=\frac{\Delta t}{2};\quad \mathrm{A}_k=\Delta t;\quad k=\overline{2,n-1}, \tag{24}$$

$\mathrm{B}_j^{(m,n)},\quad C_j^{(m,n)},\quad D_j^{(m,n)}$ - веса и x_j - узлы Гаусса.

Аналогично, для алгоритма 2, можно получить следующую рекуррентную зависимость для нахождения приближенных значений искомых решений:

$$\begin{gathered}U_n=\cos\omega t_n-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t_n+\frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{B}_j^{(m,n)}\sin\omega(t_n-x_j)f(x_j)-\\ -\omega^2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\overline{\Gamma}_1(t_n-t_i)U_i-\rho\omega^2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{A}_i\overline{\Gamma}_3(t_n-t_i)U_i^3,\quad n=2,3,\ldots,\end{gathered} \tag{25}$$

где

$$\overline{\Gamma}_1(t_n-t_i)=\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}C_j^{(m,n)}\sin\omega(t_n-t_i-x_j^{\frac{1}{\alpha}})e^{-\beta x_j^{\frac{1}{\alpha}}}; \tag{26}$$

$$\overline{\Gamma}_3\left(t_n-t_i\right)=\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\sum_{j=1}^{m}D_j^{(m,n)}\sin\omega(t_n-t_i-x_j^{\frac{1}{\alpha}})e^{-3\beta x_j^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{27}$$

Для расчетов, выполненных по формулам (21) и (22) в интервале от 0 до 10 с шагом $\Delta t = 0{,}01$ и исходными данными:

$$\beta = 0{,}05; \quad \alpha = 0{,}25; \quad \omega = 2\pi; \quad \mathrm{A} = 0{,}01; \quad \rho = 0{,}01,$$

максимальная погрешность Δ по обоим алгоритмам имеет величину порядка $const \cdot \Delta t^2$.

Отметим, что пример (16) характерен для задач физически нелинейной теории вязкоупругости [4].

Рассмотрим пример, характерный для геометрически нелинейных динамических задач теории вязкоупругости. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}\ddot{U}(t) + \omega^2[U(t) - \int_0^t R_1(t-\tau)U(\tau)d\tau] + \\ + \rho\omega^2[U^3(t) - U(t)\int_0^t R_3(t-\tau)U^2(\tau)d\tau] = f(t),\end{gathered} \tag{28}$$

с начальными условиями

$$U(v) = U_0, \quad \dot{U}(0) = \overline{U_0}, \tag{31}$$

где

$$R_1(t) = \mathrm{A}e^{-\beta t}t^{\alpha-1}; \quad i = 1{,}3; \quad 0 < \alpha < 1; \quad U_0 = 1; \quad \dot{U}_0 = -\beta;$$

$$f(t) = [\beta^2 + \omega^2 - \frac{\mathrm{A}\omega^2 t^\alpha}{\alpha} + \rho\omega^2 e^{-2\beta t}(1 - \frac{\mathrm{A}t^\alpha}{\alpha})]e^{-\beta t};$$

$$R_3(t) = \mathrm{A}e^{-2\beta t}t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{30}$$

Уравнение (30) имеет точное решение $U(t) = e^{-\beta t}$.

Рекуррентная зависимость для решения уравнения по алгоритму 1 для данного примера принимает вид

$$\begin{gathered}U_n = 1 - \beta t_n - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{B}_j^{(m,n)}(t_n - x_j)f(x_j) - \omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i \Gamma_1(t_n - t_i)U_i - \\ - \rho\omega^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i(t_n - t_i)[U_i^3 - \frac{\mathrm{A}}{\alpha}U_i \sum_{j=1}^{i} D_j e^{-2\beta t_j} U_{i+1-j}^2] \right\},\end{gathered} \tag{33}$$

где $\mathrm{A}_1 = \dfrac{\Delta t}{2}$, $\mathrm{A}_k = \Delta t$, $k = \overline{2, n-1}$, $D_1 = \dfrac{\Delta z_i}{2}$, $\Delta z_i = \dfrac{t_i^\alpha}{i-1}$, $D_k = \Delta z_i$, $k = \overline{2, i-1}$, $D_i = \dfrac{\Delta z_i}{2}$, а рекуррентная зависимость для решения по алгоритму 2 представляет собой

$$U_n = \cos\omega t_n - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t_n + \frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{B}_j^{(m,n)} \sin\omega(t_n - x_j) f(x_j) -$$

$$-\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i \overline{\Gamma}_1 (t_n - t_i) U_i - \qquad (34)$$

$$-\rho\omega^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}_i \sin\omega\left(t_n - t_i\right)\left[U_i^3 - \frac{\mathrm{A}}{\alpha} U_i \sum_{j=1}^{i} D_j e^{-2\beta t_j} U_{i+1-j}^2\right] \right\}.$$

Заключение. Предложены эффективные рекуррентные алгоритмы решения слабосингулярных интегро-дифференциальных уравнений для задач динамики вязкоупругих систем. Вычислительные эксперименты на компьютере показывают, что предложенные методы позволили достичь высокой точности приближенного решения.

1. *Бадалов Ф.Б.* Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. – Ташкент: Фан, 1980. – 221 с.
2. *Корнєєв О.М.* Про застосування інтегрального методу до розв’язування задач спадкової в’язкопружності. Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. – Вип. 52. – К.: 2009. – с. 221 – 225
3. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2003. – 561 с.
4. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.

Поступила 6.09.2010р.

УДК 621.039.7.001.2

О.О.Попов, І.П.Каменева

КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОГЕННИХ НАВАНТАЖЕНЬ НА АТМОСФЕРУ ВІД ВИКИДІВ СТАЦІОНАРНИХ ДЖЕРЕЛ ЗАБРУДНЕННЯ ЗА РІЗНИМИ СЦЕНАРІЯМИ

Вступ

На теперішній час фахівцями-екологами широко використовуються програми для розрахунку розповсюдження домішок в атмосфері та інші спеціалізовані екологічні програми, що прогнозують розмір викидів від окремих підприємств. Ці програми досить точно вирішують задачі, орієнтовані на оцінку локальних навантажень на атмосферу. Проте для вирішення найбільш актуальних задач моніторингу та контролю екологічного