*Наука та інновації.2005.Т 1.№ 3.С. 34–50.*

# ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ГРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЇХ СТАНАМИ

***І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека***
***Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ***

*Надійшла до редакції 29.03.05*

**Резюме:** На основі нових математичних моделей (нових класів задач з розривними розв'язками) опису різноманітних процесів, що характерні для багатокомпонентних грунтових середовищ з включеннями, високоточних чисельних методів їх розв'язання з великими об'ємами повнопов'язаних даних розроблена інформаційна технологія дослідження складних явищ в зазначених об'єктах. Технологія зорієнтована на використання суперкомп'ютерів сімейства СКІТ. Досліджені питання оптимального керування станами згаданих об'єктів.

**Ключові слова:** інформаційна технологія, суперкомп'ютери сімейства СКІТ, багатокомпонентні грунтові середовища, високоточні чисельні методи, великі об'єми повнопов'язаних даних, оптимальне керування станами багатокомпонентних розподілених систем.

**И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИХ СОСТОЯНИЯМИ.**

**Резюме:** На основании новых математических моделей (новых классов задач с разрывными решениями) описания разнообразных процессов, которые характерны для многокомпонентных грунтовых сред с включениями, высокоточных численных методов их решения с большими объемами полносвязаных данных разработана информационная технология исследования сложных явлений в указанных объектах. Технология сориентирована на использование суперкомпьютеров семейства СКИТ. Исследованы вопросы оптимального управления состояниями упомянутых объектов.

**Ключевые слова:** информационная технология, суперкомпьютеры семейства СКИТ, многокомпонентные грунтовые среды, высокоточные численные методы, большие объемы полносвязаных данных, оптимальное управление состояниями многокомпонентных распределенных систем.

**I. V. Sergienko, V. S. Deineka. INFORMATION TECHNOLOGY FOR INVESTIGATION OF PROCESSES IN MULTICOMPONENT GROUND MEDIA AND OPTIMAL CONTROL OF THEIR STATES.**

**Abstract:** The paper considers an IT used for investigation of complicated effects in multicomponent ground media with inclusions. An IT is based on new mathematical models (new classes of problems with discontinuous solutions) of description of different processes in multicomponent ground media with inclusions and on higher-order accuracy numerical methods of their solution under a large volume of completely-connected data. The technology is used for an intelligent SCIT cluster family. The problems of optimal control of the above-mentioned states are investigated.

**Keywords:** IT, intelligent SCIT cluster family, multicomponent ground media, higher-order accuracy numerical methods, large volume of completely-connected data, optimal control of the states of distributed systems.

Землі нашої держави багаті на різноманітні корисні копалини. Неконтрольоване природокористування та нераціональне ведення господарської діяльності призвели до збіднення родовищ, рослинного світу, орних земель та до погіршення загального стану довкілля.

Досить небезпечними також є різноманітні приповерхневі дії (забудова, зокрема, висотними будинками не тільки грунтових схилів, а й рівнинних територій; створення підземних споруд різноманітного призначення; бездумна вирубка лісів тощо), які призводять до порушення природно збалансованих режимів руху грунтових вод.

Велика загроза нависла над Херсонщиною. Постійно збільшується площа її території, що затоплена водою від Каневського моря за умов поливу сільськогосподарських угідь, заілення малих річок, руйнації дренажних систем. Збільшується мінералізація підземних вод артезіанських колодязів та ін.

Природно, що доцільність тієї чи іншої видобувної діяльності, створення підземних комунікацій, ведення наземного будівництва та різноманітна господарська діяльність має бути всебічно досліджена – промодельована і це можливо сьогодні за допомогою сучасних комп'ютерних засобів, на яких реалізавані сучасні нові інформаційні технології.

## 1. МОДЕЛІ ТА ВИСОКОТОЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ГРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розвиток основних процесів в однорідних складових реальних грунтових середовищ (руху рідини, формування температурного стану, міграції хімічних елементів, переходу солей з твердого стану в розчин і навпаки, механічного деформування) досить повно описується відповідними диференціальними рівняннями в частинних похідних, отриманими на основі основних законів збереження та припущення суцільності середовища. Разом з цим для конкретних багатокомпонентних об'єктів (зокрема грунтових), природного чи штучного походжень, розвиток згаданих процесів суттєво залежить від неоднорідності досліджуваного тіла. Про це яскраво свідчать численні дані натурних спостережень, що проведені після Чорнобильської катастрофи, повені в Закарпатті, в зонах водойм-відстійників Качанівського нафтовидобувного вузла, в сильно-неоднорідних водоносних товщах Південно-східного району Татарстану, а також останні підтоплення Херсонської та Запоріжської областей, дані моніторингу свердловин добування прісних вод та ін. Окрім цього, необхідно зауважити, що наявні тонкі включення (слабкопроникливі, слабкотривкі) породжують істотні відмінності відповідних характеристик (порових тисків, п'єзометричних напорів, дотичних зміщень тощо) на різних сторонах таких включень та тріщин. На цю обставину звернули увагу ще в 40-х роках минулого століття відомі вчені М. К. Гиринський та Г. М. Каменський, які врахували взаємодію водоносних горизонтів через слабкопроникливе включення шляхом введення певної умови, що в літературі отримала назву умови перетікання. За допомогою такого типу умови дослідники температурних процесів в тілах з включеннями враховували перетік тепла через слабкопроникливе включення.

Більш ретельне вивчення та врахування впливу наявних природних чи штучних тонких включень на досліджувані процеси (фільтрації рідини, фільтрації-вологопереносу, теплопровідності), проведене в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, дозволило уточнити згадану умову перетікання на випадок довільно розташованого в просторі тонкого слабкопроникливого включення $\gamma$, а потім і на більш загальний випадок – довільно розташоване в просторі тонке тришарове включення $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_1 \cup \overline{\gamma}_2 \cup \overline{\gamma}_3$, де $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_3$ – слабкопроникливі складові, $\overline{\gamma}_2$ – розташована між $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_3$ сильнопроноиклива складова. Доведено, що вплив такого включення на рух рідини та температурний режим досить повно описується певними диференціальними виразами (умовами спряження)

$$L_l(u) = 0\,,\ x \in \gamma\,, \qquad (1)$$

де $\gamma$ – серединна поверхня $\overline{\gamma}$, $u = u(x, t)$ – п'єзомеричний напір, чи температура тіла в точці $x = (x_1, x_2, x_3)$ декартової системи координат $x_1x_2x_3$ в зазначений час $t$.

З метою зменшення термоопорів $R_1$, $R_3$ слабкопроникливих складових $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma}_3$ (для вирівнювання температури по багатокомпонентному тілу) на практиці часто виконуються певні запобіжні заходи (зменшення зазорів між складовими тіла, влаштування фольгових прошарків та ін.).

При $R_1 = R_3 = 0$ природна складова системи (1) переходить в головну [1]

$$[u] = -\delta\,,\ x \in \gamma\,, \qquad (2)$$

тобто на тонкому включенні заданий стрибок шуканого розв'язку $u$ відповідної крайової чи початково-крайової задачі, $\delta$ – деяка відома функція.

В Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України досліджені [1-10] задачі з умовами спряження: власного джерела; коли зміна температурного поля на $\gamma$ описується диференціальним рівнянням в частинних похідних; різноманітні умови, що відображають вплив тонких слабкотривких включень чи тріщин на напружено-деформований стан складених тіл; умови спряження зосереджених теплоємностей, зосереджених мас (започаткованих А. М. Тихоновим, О. А. Самарським); різноманітні умови спряження на власні функції в спектральних диференціальних задачах та ін.

Ретельний аналіз різноманітних умов спряження (співвідношень, що враховують вплив тонких включень на досліджувані процеси) показав, що доцільно їх класифікувати як природні та головні [1], аналогічно як це зроблено з крайовими умовами в задачах математичної фізики відомим вченим С. Г. Міхліним.

В результаті проведених теоретичних досліджень для крайових задач, що описуються еліптичними рівняннями другого порядку з різноманітними типами умов спряження та змішаними крайовими умовами (в тому числі за наявних неоднорідних головних умов спряження та крайових умов), побудовані відповідні класичні узагальнені задачі (задачі в слабких постановках), що полягають в пошуку функції $u = u(x) \in H = \{v(x) \in \bar{H} : L_2(v) = \varphi\}$, яка $\forall\, w \in H_0 = \{v(x) \in \bar{H} : L_2(v) = 0\}$ задовольняє тотожність

$$a(u, w) = l(w)\,, \qquad (3)$$

де $a(\cdot,\cdot) : \bar{H} \times \bar{H} \to R^1$ та $l(\cdot) : \bar{H} \to R^1$ відповідно, деякі білінійна форма та лінійний функціонал, $\bar{H} = \left\{v(x) : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2\right\}$, $R^1$ – множина дійсних чисел, $W_2^1(\Omega_i)$ – простір функцій Соболєва, що визначені на області $\Omega_i$, $L_2(v)$ – оператор, що задає головні крайові умови та головні умови спряження. Отримані достатні умови існування непорожніх множин $H$ [1].

Доведені теореми існування та єдиності розривних розв'язків $u \in H$ відповідних задач (3) [1, 7, 8]. Показано, що за умови достатньої гладкості на $\Omega_i$, $i = 1, 2$, узагальнений розв'язок $u = u(x)$ є класичним розв'язком вихідної диференціальної (крайової) задачі, де природні умови (крайові та спряження) виконуються автоматично.

Доведено, що єдині розв'язки $u \in H$ задач вигляду (3) доставляють найменше значення на $H$ функціоналу енергії

$$\Phi(v) = a(v, v) - 2l(v)\,, \qquad (4)$$

де білінійна форма $a(\cdot,\cdot)$ та лінійний функціонал $l(\cdot)$ визначені задачею (3).

Розроблено методику побудови класів $H_k^N, H_{k0}^N$ розривних функцій методу скінченних елементів (МСЕ), де наближені розв'язки $u_k^N \in H_k^N$ розглядуваних диференціальних задач є розв'язками наступних задач:

а) знайти функцію $u_k^N \in H_k^N$ таку, що $\forall v_k^N \in H_{k0}^N \subset H_0$ має місце тотожність

$$a\left(u_k^N, v_k^N\right) = \ell\left(v_k^N\right)\;; \qquad (5)$$

б) знайти функцію $u_k^N \in H_k^N$ таку, що

$$\Phi\left(u_k^N\right) = \min_{v_k^N \in H_k^N} \Phi(v_k^N) = \min_{v_k^N \in H_k^N} \left(a\left(v_k^N, v_k^N\right) - 2\ell\left(v_k^N\right)\right). \qquad (6)$$

Доведено еквівалентність задач (5), (6). Встановлено існування та єдиність їх спільного розв'язку $u_k^N \in H_k^N$. Отримано оцінки похибок наближених розв'язків

$$\left\| u - u_k^N \right\|_L \le ch^k\,, \qquad (7)$$

де $\|\cdot\|_L = a^{1/2}(\cdot,\cdot)$ – енергетична норма, що породжена оператором вихідної задачі, $u$ – класичний розв'язок, $c = \text{const}$, $h$ – найбільший з діаметрів всіх скінченних елементів, $k$ – степінь поліномів МСЕ, $N$ – кількість скінченних елементів, на які розбита область $\bar{\Omega}$ з розрізом $\gamma$.

Доведено, що у випадку $H_k^N \not\subset H$

$$\left\| u - u_k^N \right\|_L \le ch^k, \quad 0 \le \Phi\left(u_k^N\right) - \Phi(u) \le c_1\left(h^{2k} + \bar{h}^{k+1}\right), \qquad (8)$$

а при $H_k^N \subset H$

$$0 \le \Phi\left(u_k^N\right) - \Phi(u) \le c_1 h^{2k}, \qquad (9)$$

$$\left\| u - u_k^N \right\|_{W_2^1} \le c_2 h^k\,, \qquad (10)$$

де $c_1, c_2 = \text{const}$, $\bar{h}$ – найбільший з діаметрів скінченних елементів розбиття частини $\Gamma_1$ границі області $\bar{\Omega}$ та розрізу $\gamma$, на яких задані неоднорідні головні умови.

Для чисел обумовленості матриць $A$ систем алгебраїчних рівнянь МСЕ

$$Ax = B\,, \qquad (11)$$

отриманих на основі еквівалентних задач (5), (6), має місце оцінка

$$cond(A) \le ch^{-2}\,, \qquad (12)$$

де $h$ – довжина найменшої з сторін прямокутної дискретної сітки розбиття складеної області $\bar{\Omega}$.

Отримані також еквівалентні узагальнені задачі вигляду (3), (4) для еліптичних задач, що визначені в циліндричних та полярних системах координат з розривними розв'язками. Для них побудовані відповідні класи $H_k^N, H_{k_0}^N$ функцій МСЕ. Для наближених розв'язків $u_k^N \in H_k^N$ отримані оцінки вигляду (7)–(10), а для чисел обумовленості матриць $A$ систем алгебраїчних рівнянь МСЕ вигляду (11) – оцінку вигляду (12).

Зазначимо, що отримані оцінки (7)–(10) для розривних наближених розв'язків МСЕ за порядком кроку розбиття області $\bar{\Omega}$ не гірші аналогічних, відомих для відповідних класів задач з гладкими розв'язками. Цю властивість має і оцінка (12).

Для всіх розглянутих класів задач розроблена методика заміни неоднорідних головних умов спряження та неоднорідних головних крайових умов природніми з використанням малого параметру $\varepsilon > 0$. Встановлена оцінка похибки збурення розв'язку [1–3]

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1} \le c\sqrt{\varepsilon} \ , \qquad (13)$$

де $u$ та $u_\varepsilon$ – розв'язки, відповідно, вихідної та збуреної задач.

Розв'язуючи за допомогою МСЕ збурену задачу, маємо наближений розв'язок $u_{k_\varepsilon}^N$ вихідної задачі. Отримана оцінка похибки [1–3]

$$\|u - u_{k_\varepsilon}^N\|_{W_2^1} \le c\left(h^k + \sqrt{\varepsilon}\right). \qquad (14)$$

Побудовані крайові задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь з різноманітними типами умов спряження (в тому числі і з головними неоднорідними) [1, 11]. Розглянуті класичні чотири типи нелінійності оператора, що зустрічаються в роботах Варги Р., Марчука Г. І., Самарського О. А. та ін.

На основі розробленої в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України методики отримані класичні узагальнені задачі в слабких постановках, що визначені на класах розривних функцій.

Доведено теореми про існування та єдиність розривних узагальнених розв'язків квазілінійних задач з неоднорідними природніми та головними умовами [11].

Для визначення наближених узагальнених розв'язків побудовані обчислювальні схеми підвищеного порядку точності дискретизації отриманих узагальнених задач. Доведено теореми про існування та єдиність розривних наближених узагальнених розв'язків цих задач. Для наближених узагальнених розв'язків отримані оцінки вигляду (10).

Для всіх розглянутих класів квазілінійних задач розроблена методика побудови регуляризатора $B$ ітераційного методу

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A(y_k) = 0, \ \ k = 0,1,2,\ldots, \forall y_0 \in E^n \ , \qquad (15)$$

розв'язування проміжної нелінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$A(y) = 0 \ , \qquad (16)$$

де $\tau > 0$ – параметр.

Оператор $B$ будується так, що забезпечується збіжність геометричної прогресії ітераційного процесу (15) [1], тобто

$$\|y_k - y\|_B \le \rho_0^k \|y_0 - y\|_B \ , \qquad (17)$$

де $0 < \rho_0 < 1$, $y$ – розв'язок системи (16).

Для цих задач розглянута та теоретично обґрунтована методика використання малого параметру $\varepsilon > 0$ при заміні неоднорідних головних умов природними. Для збуреного розв'язку $u_\varepsilon$ та наближеного узагальненого розв'язку $u_{k_\varepsilon}^N$ отримано, відповідно, оцінки вигляду (13) та (14) [1].

Досліджені питання побудови обчислювальних схем підвищеного порядку точності розрахунку нелінійних температурних полів складених тіл обертання в циліндричній системі координат та циліндричного складеного тіла в полярній системі координат за різноманітних умов на межах контакту складових тіл [1]. Отримані класичні узагальнені задачі в слабких постановках, що визначені на класах розривних функцій. Для різноманітних типів нелінійностей та різноманітних типів умов спряження розроблені обчислювальні схеми підвищеного порядку точності дискретизації відповідних задач в слабких постановках. Доведено теореми про існування та єдиність наближених розривних узагальнених розв'язків $u_k^N \in H_k^N$ МСЕ. Для наближених узагальнених розв'язків $u_k^N(x)$ отримані оцінки похибки вигляду (10).

Для всіх розглянутих класів квазілінійних задач в циліндричній та полярній системах координат з різноманітними типами умов спряження розроблена методика побудови регуляризатора $B$ ітераційного методу (15) розв'язування відповідних проміжних нелінійних систем (16) алгебраїчних рівнянь МСЕ, що забезпечує збіжність геометричної прогресії (17) цього ітераційного процесу [1].

Розглянута та теоретично обгрунтована методика використання малого параметру $\varepsilon > 0$ при заміні неоднорідних головних умов природними [1].

Побудовані нові диференційні математичні моделі пружного деформування багатокомпонентних тіл, що вміщують довільно зорієнтовані в просторі тонкі тріщини, що заповнені рідиною за умов розклинювального тиску та заданим нормальним розходженням берегів продовгуватої тріщини [1]. Подібні диференційні математичні моделі побудовані для складених ізотропних та ортотропних циліндричних тіл обертання.

Розроблена методика побудови відповідних класичних узагальнених задач в слабких (3) та варіаційних (4) постановках. Для останніх доведено їх еквівалентність та установлено існування їх єдиного розривного розв'язку (в кожному з зазначених випадків).

На основі використання класів розривних функцій методу скінченних елементів розроблені обчислювальні схеми підвищеного порядку точності дискретизації побудованих нових узагальнених задач. Для наближених узагальнених векторних розв'язків $u_k^N(x)$ МСЕ отримані оцінки вигляду (7)–(10), що засвідчують те, що такі обчислювальні алгоритми за точністю не гірші аналогічних відомих для відповідних класів задач з гладкими розв'язками. Показано, що для чисел обумовленості матриць МСЕ розроблених обчислювальних алгоритмів, як і для еліптичних задач з розривними розв'язками, має місце оцінка $O(1/h^2)$ [1].

Побудовані нові диференціальні математичні моделі динамічного пружного деформування багатокомпонентних тіл з розклинювальним тиском на довільно зорієнтованій у просторі продовгуватій тріщині та за умов наявності зосереджених мас на берегах тріщини [9]. Початково-крайові задачі для динамічної пружної рівноваги з розривними зміщеннями отримані для декартової та циліндричної (осесиметричний випадок) систем координат.

Розроблена методика (шляхом використання відповідних класів розривних функцій) побудови відповідних класичних узагальнених задач. На основі використання класів розривних вектор-функцій методу скінченних елементів побудовані обчислювальні схеми підвищеного порядку точності дискретизації отриманих нових узагальнених задач динамічної пружної рівноваги багатокомпонентних тіл. Для наближеного розривного розв'язку $u_k^N(x, t)$ МСЕ має місце оцінка

$$\left\| u - u_k^N \right\|_{L_2 \times L_\infty} \le c h^k , \tag{18}$$

а для дискретного за часом наближення $U^j$, отриманого за допомогою МСЕ та різницевої схеми Кранка-Ніколсона, маємо оцінку

$$\max_{j=\overline{0,m}} \left\| U^j - u^j \right\|_{L_2} \le c_1 \left( h^k + \tau^2 \right), \tag{19}$$

де $c$, $c_1$ = const, $u = u(x, t)$ – класичний розв'язок відповідної початково-крайової задачі, $u^j = u^j(x) = u(x, t_j)$, $t_j = j\tau$, $\tau$ – крок дискретизації по часовій змінній, $\|\varphi\|_{L_2 \times L_\infty} =$

$$= \sup_{t \in (0, \ )} \|\varphi\|_{L_2}, \quad \|\varphi\|_{L_2} = \left\{ \int_\Omega \varphi^2 dx \right\}^{1/2} .$$

Отримані оцінки (18), (19) засвідчують, що за порядками кроків дискретизації $h$, $\tau$ розроблені обчислювальні алгоритми для задач динамічної рівноваги тіл з включеннями не гірші аналогічних відомих для відповідних класів задач з гладкими розв'язками.

Дослідження процесів напірної фільтрації рідини в багатокомпонентних тілах з різноманітними включеннями, а також дослідження формування усталених температурних полів в таких тілах при заданих на їх границі потоках рідини чи тепла (при заданих крайових умовах Неймана) зводяться до розв'язування крайових задач Неймана для еліптичних рівнянь другого порядку з умовами спряження та неєдиними розривними розв'язками (з неєдиними розривними п'єзометричними напорами в задачах фільтрації рідини чи неєдиними розривними полями температур) [1–3, 7, 8].

Для різноманітних типів умов спряження отримані умови сумісності – необхідні умови існування класичних розривних розв'язків таких задач, що пов'язують внутрішні джерела / витоки тіла $\Omega \cup \gamma$, значення потоків $g$ на границі $\Gamma$ досліджуваного багатокомпонентного тіла $\Omega$ та джерела / витоки $\omega$ на поверхнях тріщин $\gamma$, у вигляді

$$\int_\Omega f dx + \int_\Gamma g d\Gamma = \int_\gamma \omega d\gamma . \qquad (20)$$

Побудовані відповідні задачі в слабкій постановці пошуку функції $u \in H_Q$ такої, що $\forall w \in H_0$ задовольняє тотожність вигляду (3), де $H_Q = \left\{ v(x) \in \overline{H} : \int_\Omega v dx = Q \right\}$ , $Q$ – довільне фіксоване дійсне число, $H_0 = \left\{ v(x) \in \overline{H} : \int_\Omega v dx = 0 \right\}$.

Для цього випадку доведено твердження.

**Теорема 1.** Задача вигляду (3) має єдиний розв'язок $u = u(x) \in H_Q$, який доставляє на $H_Q$ найменше значення функціоналу вигляду (4).

Якщо $u\big|_{\overline{\Omega}_\ell} \in C^1(\overline{\Omega}_\ell) \cap C^2(\Omega_\ell),\ \ell = 1,2,\ \left| D^2 u\big|_{\Omega_\ell} \right| < \infty$ і виконана умова (20), то $u = u(x)$ – єдиний класичний розв'язок вихідної крайової задачі Неймана, що задовольняє умову

$$\int_\Omega u dx = Q \ . \qquad (21)$$

<u>Зауваження 1.</u> Для існування єдиного розв'язку еквівалентних узагальнених задач вигляду (3), (4) виконання умови узгодженості (20) вихідних даних не вимагається.

<u>Зауваження 2.</u> Умова узгодженості вихідних даних (20) отримана для випадку умов спряження тришарового включення з природними та головними умовами спряження. Для інших типів умов спряження вона може мати інший вигляд.

<u>Зауваження 3.</u> Множини $H_Q$, $H_0$ визначені для випадку природних умов спряження (1) з довільно розміщеним у просторі тришаровим тонким включенням $\gamma$. Для випадку наявності неоднорідної головної умови спряження (2) ці множини визначаються таким чином:

$$H_Q = \left\{ v(x) \in \overline{H} : [v]\big|_\gamma = -\delta,\ \int_\Omega v dx = Q \right\},$$

$$H_0 = \left\{ v(x) \in \overline{H} : [v]\big|_\gamma = 0,\ \int_\Omega v dx = 0 \right\}.$$

Розроблено методику [1–3, 7, 8] заміни розглядуваних задач Неймана з єдиними розв'язками $u = u(x)$ в відповідній замкнутій опуклій множині $H_Q$ еквівалентними, що визначені на множинах без обмеження (21). Доведено еквівалентність такої заміни при виконанні умови узгодженості (20). Нова задача в слабкій постановці полягає в пошуку функції $u \in H$, що $\forall w \in H_0$ задовольняє тотожність

$$a_1(u, v) = \ell_1(v) , \qquad (22)$$

де для випадку природних умов спряження (1) $H = \overline{H}$, $H_0 = H$, а для умов спряження (2)

$$H=\left\{v(x)\in \overline{H} : [v]\big|_{\gamma}=-\delta\right\}, H_0=\left\{v(x)\in \overline{H} : [v]\big|_{\gamma}=0\right\};$$

$$a_1(u,v)=a(u,v)+\int_{\Omega} udx\int_{\Omega} vdx, \quad \ell_1(v)=\ell(v)+Q\int_{\Omega} vdx.$$

Доведено існування та єдиність розв'язку задачі (22), що доставляє найменше значення функціоналу

$$\Phi(z) = a_1(z, z) - 2l_1(z) \qquad (23)$$

на множині $H$.

Показана справедливість твердження.

**Теорема 2.** Нехай класичний розв'язок диференціальної задачі Неймана $u\big|_{\Omega_i}\in C^{k+1}(\Omega_i), \left|D^{k+1}u\big|_{\Omega_i}\right|<\infty, i=1,2$. Тоді для наближеного розв'язку $u_k^N(x) \in H_k^N \subset H$ методу скінченних елементів еквівалентних задач (22), (23) має місце оцінка вигляду (10).

Слід зауважити, що розроблена методика дозволяє досить легко будувати обчислювальні схеми підвищеного порядку точності для чисельного розв'язання складних задач Неймана з різноманітними типами умов спряження та з неєдиними розв'язками.

Зауваження 4. Факти існування та єдиності розривних розв'язків $u \in H_Q$ та $u \in H$ еквівалентних задач вигляду (3), (4) та (22), (23) показані на основі доведеної для класів розривних функцій $v \in \overline{H}$ узагальненої нерівності Пуанкаре

$$\int_{\Omega} v^2 dx \le c\left(\int_{\Omega}\nabla v\nabla v dx+\left(\int_{\Omega} vdx\right)^2+\int_{\gamma}[v]^2 d\gamma\right), \text{ де } c = \text{const}.$$

Аналогічні результати отримані стосовно задач Неймана для еліптичних рівнянь другого порядку в ортогональних криволінійних (циліндричній та полярній) системах координат з різноманітними тонкими включеннями [1], а також для рівнянь 4-го порядку про прогини складеної стрижневої системи [12] та складеної тонкої пластини [13].

Зауваження 5. Деякі з умов спряження, наприклад, умови власного зосередженого джерела $[u] = 0$, $x \in \gamma$, $[q_u] = \beta$, $x \in \gamma$, де $\beta = \text{const} > 0$ (стрибок потоку пропорційний шуканому розв'язку) визначають єдиність розв'язку задачі Неймана для еліптичних рівнянь 2-го порядку як в декартовій, так і в ортогональних криволінійних системах координат. В цьому випадку приходимо до пошуку функції $u\in H=\left\{v(x)\in \overline{H} : [v]\big|_{\gamma}=0\right\}$, що задовольняє $\forall w\in H_0=H$ тотожність вигляду (3), або доставляє найменше значення на $H$ функціоналу вигляду (4). Доведена еквівалентність цих задач та існування їх єдиного розв'язку $u \in H$.

За допомогою МСЕ будуємо наближений розв'язок $u_k^N(x) \in H_k^N \subset H$, для якого має місце оцінка вигляду (10).

Зауваження 6. Типи крайових умов, умов спряження визначають як єдині розв'язки, так і неєдині, а для рівнянь 4-го порядку – неєдиність розв'язків з одним та двома ступенями свободи.

Нусталені процеси руху рідини у стисливих багатокомпонентних грунтових середовищах з включеннями та неусталені процеси формування температурних полів в таких тілах описуються лінійними та нелінійними початково-крайовими задачами для параболічних рівнянь з умовами спряження неідеального контакту [4]. Побудовані відповідні класичні узагальнені задачі, що визначені на класах розривних функцій, для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь з умовами спряження. На основі використання відповідних класів розривних функцій МСЕ побудовані обчислювальні алгоритми підвищеного порядку точності знаходження наближених узагальнених розв'язків вихідних початково-крайових задач.

Аналогічні питання досліджені для системи нелінійних параболічних та еліптико-параболічних рівнянь (опису руху рідини в стисливо-нестисливих грунтах) [14], псевдопараболічного рівняння (опису руху рідини в тріщинуватих тілах) [15] з умовами спряження неідеального контакту.

Дослідження нестаціонарних полів та процесів вільних коливань, стійкість складених тіл породжують різноманітні диференціальні спектральні задачі з умовами спряження неідеального контакту для власних функцій розглядуваних задач [1, 10, 16].

Такі спектральні задачі отримані для еліптичних операторів другого порядку в декартовій, циліндричній та полярній системах координат [1], для операторів теорії пружності в декартових та циліндричних системах координат [1], для еліптичних операторів 4-го порядку [16].

Слід зазначити, що розгляд нестаціонарних задач з умовами спряження зосередженої теплоємності та динамічних задач з умовами спряження зосереджених мас призводить до розгляду диференціальних спектральних задач з власними значеннями не тільки в операторі стану, а й в умовах спряження та крайових умовах [1–3, 10].

Для всіх зазначених диференціальних спектральних задач отримані відповідні класичні спектральні задачі в слабких постановках. Отримані класичні функціонали Релея. Для всіх зазначених різноманітних спектральних задач з умовами спряження розроблена методика побудови обчислювальних алгоритмів підвищеного порядку точності їх дискретизації. Запропоновані алгоритми за точністю не гірші аналогічних, що відомі для відповідних класів спектральних задач з гладкими власними функціями.

Аналогічні питання розглянуті для псевдогіперболічних рівнянь з умовами спряження [17].

## 2. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСАМИ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ГРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

З метою збереження грунтових пластів в природному чи близькому до нього стані досить актуальним є проведення попереднього аналізу доцільності застосування певних технологій та їх наслідків при добуванні корисних копалин, забудові схилів, вирубуванні лісів, забудові рівнинних територій висотними будинками, створенні різноманітних підземних комунікацій та ін., від чого суттєво залежить життя сьогоднішнього та майбутніх поколінь населення.

За допомогою певних заходів (дренування, тепловідводу та ін.) можна покращити стан багатокомпонентних грунтів. Питанням оптимального керування основними процесами, що характерні для багатокомпонентних тіл з різноманітними довільно розташованими в просторі тонкими включеннями, присвячені монографії [7, 8].

Як зазначено вище, основними процесами, що є характерними для грунтових масивів природного чи штучного походжень є: рух рідини за різноманітних режимів, формування температурних станів, механічне деформування. Врахування впливу тонких включень на досліджувані процеси породжує принципово нові класи математичних задач, а саме задач з розривними розв'язками, що виступають математичними задачами станів відповідних багатокомпонентних розподілених систем.

Вибір оптимальних режимів функціонування запобіжних засобів в таких системах в математичному плані зводиться до визначення оптимальних збурень крайових умов, умов спряження та ін., щоб забезпечити мінімальне відхилення стану (по всьому тілу, на окремих його ділянках) від бажаного. В значній мірі питання оптимального керування однорідними розподіленими системами досліджені в відомій монографії французького вченого Ж.–Л. Ліонса "Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными" (М.: Мир, 1972. – 414 с.). В монографіях [7, 8] фундаментальні результати Ж.–Л. Ліонса отримали подальше узагальнення та розвиток на нові важливі класи неоднорідних розподілених систем, стани яких описуються крайовими задачами для еліптичних рівнянь (в тому числі умовно коректними – з неєдиними розривними станами), крайовими, початково-крайовими задачами для рівнянь пружної рівноваги багатокомпонентних тіл з умовами спряження та початково-крайовими задачами для параболічних, еліптико-параболічних, гіперболічних, псевдогіперболічних систем з різноманітними типами умов спряження.

Оптимальне керування процесами напірної фільтрації рідини в багатокомпонентних грунтових середовищах та формування усталених температурних полів в таких тілах зводиться до розгляду задач оптимального керування станами, що описуються еліптичними рівняннями з крайовими умовами та умовами спряження. В роботах [7, 8] розглянуті різноманітні можливості оптимального керування такими системами (внутрішніми джерелами, в крайових умовах, в умовах спряження, комплексним керуванням – одночасно на різних складових багатокомпонентних тіл) з різноманітними спостереженнями за станами системи (по всьому багатокомпонентному тілу, на частині та всій його границі, на тонкому включенні, за значеннями стану та потоками, одночасно на різних складових тіла та ін.). В цих розглянутих випадках доведено теореми про існування оптимальних керувань з квадратичними функціями вартості. Розглянуті також випадки коли крайові задачі опису стану вміщують головні неоднорідні крайові умови та неоднорідні головні умови спряження.

У випадку, коли множина допустимих керувань $U_\partial$ співпадає з відповідним повним гільбертовим простором $U$ керувань, показана можливість побудови на основі використання розривних функцій методу скінченних елементів обчислювальних схем підвищеного порядку точності визначення оптимальних керувань.

Дослідження питань оптимального керування усталеними процесами дифузії при заданих потоках на границі багатокомпонентного тіла зводиться до вивчення питання неперервної залежності розривного стану системи (яке може бути неєдиним) від різноманітних збурень (керувань). Показано, що при визначенні стану системи $y = y(x, u) = y(u)$ серед функцій множини $V_Q = \left\{ v \in \overline{H} : \int_\Omega v dx = Q \right\}$, де $x \in \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1$, $\Omega_2$ – складові двохкомпонентного тіла $\overline{\Omega}$ з включенням $\gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \neq 0$, $Q$ – довільне фіксоване дійсне число, $\overline{H} = \{v : v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2\}$, $u \in U_\partial$ – керування, $U_\partial$ – допустима множина керувань, стан $y(u)$ та його сліди на певних складових тіла $\overline{\Omega}$ неперервно залежать від різноманітних керувань, що перераховувались раніше для еліптичних систем з єдиними станами. Це дало змогу довести існування єдиних оптимальних керувань таких умовно-коректних еліптичних систем з розривними станами. Для того, щоб зняти складне для врахування в обчислювальних алгоритмах пошуку оптимальних керувань обмеження $\int_\Omega y dx = Q$, розроблена методика заміни еліптичних задач з різноманітними збуреннями (керуваннями) та таким обмеженням еквівалентними крайовими задачами для еліптичних рівнянь з умовами спряження, де єдиний стан $y = y(u)$ визначається в відповідному класі розривних функцій без цього обмеження. Показана можливість побудови обчислювальних схем підвищеного порядку точності для чисельного визначення наближення єдиного оптимального керування $u \in U_\partial = U$.

Окрім зазначених в роботах [7, 8] досліджені питання оптимального керування станами стрижневої системи з проміжним шарніром з жорсткістю $\alpha > 0$. Розглянуті наступні оптимізаційні задачі:

- керування розподіленим навантаженням зі спостереженням за прогинами складеного стрижня;
- керування жорсткістю підпори шарніру зі спостереженням за прогинами складеного стрижня;
- граничне керування величиною прикладеного моменту зі спостереженням за прогинами системи;
- граничне керування величиною прикладеного моменту зі спостереженням за прогинами системи при пружному закріпленні протилежного кінця складеного стрижня;
- управління жорсткістю пружної внутрішньої опори зі спостереженням за її прогином;
- управління жорсткістю внутрішнього шарніру зі спостереженням за прогином складеного стрижня при наявних неоднорідних головних крайових умовах.

В усіх зазначених випадках доведено існування єдиного оптимального керування конкретної системи. Показана можливість побудови обчислювальних схем підвищеного порядку точності чисельного визначення наближення оптимального керування $u \in U_\partial = U$.

Досліджені питання оптимального керування станами складеної тонкої пластини. Розглянуті наступні оптимізаційні задачі:

- керування розподіленим навантаженням складеної пластини зі спостереженням за її прогинами;
- керування жорсткістю пружної підпори і пружного шарніру, за допомогою якого з'єднані дві тонкі пластини, зі спостереженням за прогинами складеної пластини;
- керування жорсткістю пружної підпори пружного шарніру, за допомогою якого з'єднані дві тонкі пластини, зі спостереженням за його прогинами;
- керування жорсткістю пружної підпори пружного шарніру зі спостереженням за прогинами краю складеної пластини;
- керування величиною перерізуючої сили на частині границі складеної пластини зі спостереженням за прогинами шарніру з'єднання її складових;
- керування величинами зкручуючого моменту на частині границі складеної пластини зі спостереженнями за прогинами шарніру з'єднання її складових;
- керування величинами зкручуючого моменту на частині границі складеної пластини зі спостереженнями за її прогинами;
- керування розподіленим навантаженням складеної пластини при заданих зміщеннях її краю зі спостереженням за прогинами всієї пластини.

В усіх зазначених випадках доведено існування єдиного оптимального керування конкретної системи. Показана можливість побудови обчислювальних схем підвищеного порядку точності чисельного визначення наближення оптимального керування $u \in U_\partial = U$ конкретної системи.

Оптимальне керування неусталеними процесами фільтрації рідини у стисливих багатокомпонентних грунтових середовищах та формування неусталених температурних полів в таких тілах зводиться до розгляду задач оптимального керування станами багатокомпонентних тіл з довільно розташованими у просторі тонкими включеннями, що описуються параболічними рівняннями з крайовими, початковими умовами та умовами спряження неідеального контакту. В роботах [7, 8] розглянуті різноманітні можливості оптимального керування такими системами (внутрішніми джерелами, величинами джерел / витоків на тонких складених включеннях, в крайовій умові) за умов різноманітних спостережень (за формуванням п'єзометричних напорів (температур) по всьому багатокомпонентному тілу, на його границі, на тонкому включенні, в фінальний час функціонування системи).

Оптимальне керування неусталеними процесами фільтрації рідини у стисливих багатокомпонентних грунтових середовищах та формування неусталених температурних полів в таких тілах за умов відкачування рідини та наявних тонких включень з зосередженими теплоємностями породжує принципово інші задачі стану багатокомпонентних тіл – принципово інші початково-крайові задачі для параболічних рівнянь з умовами спряження зосереджених теплоємностей. Досліджені питання різноманітного оптимального керування станами таких систем за умов різноманітних спостережень.

Оптимальне керування неусталеними процесами фільтрації рідини в багатокомпонентних грунтових тілах зі щільними стисливими та нестисливими складовими зводиться до вивчення питань оптимального керування станами багатокомпонентних тіл з довільно розташованими у просторі тонкими включеннями, що описуються початково-крайовими задачами для еліптико-параболічних рівнянь з крайовими, початковими умовами та умовами спряження неідеального контакту. За допомогою використання малого параметру встановлено існування та єдиність стану (розв'язку відповідних початково-крайових задач) багатокомпонентної системи за різноманітних умов збурень вихідних даних (правої частини еліптико-параболічного рівняння, умов спряження, крайових умов, початкової умови) та неперервність стану системи і його слідів на певних поверхнях від відповідних збурень. Це дало змогу дослідити оптимальну керованість (правими частинами еліптико-параболічного рівняння, умовами спряження, крайовими та початковими умовами) багатокомпонентних неоднорідних розподілених систем з різноманітними спостереженнями (по всьому багатокомпонентному тілу, на його границі, на тонкому включенні, за фінальним станом системи).

Оптимальне керування неусталеними процесами фільтрації рідини у тріщинуватих багатокомпонентних тілах зводиться до розгляду задач оптимального керування системами, стан яких описується початково-крайовими задачами для псевдопараболічних рівнянь з умовами спряження неідеального контакту. Досліджені різноманітні можливості оптимального керування такими системами (внутрішніми джерелами, в умовах спряження, крайових умовах) за умов різноманітних спостережень (за формуванням п'єзометричного напору по всьому багатокомпонентному тілу, на його границі, на тонкому включенні, за фінальним станом системи). В усіх розглянутих задачах доведено існування єдиного оптимального керування.

Різноманітні коливні процеси описуються початково-крайовими задачами для рівняння та систем диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу. В роботах [6, 7] досліджені питання оптимального керування системами, стан яких описується початково-крайовими задачами для рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу з умовами спряження неідеального контакту. Розглянуті різноманітні можливості оптимального керування зазначеними системами (рівномірно розподіленими внутрішніми джерелами, в умовах спряження, в крайових умовах) за умов різноманітних спостережень за станом системи (по всій багатокомпонентній області, на її границі, з фінальним спостереженням за станом системи та за швидкістю його зміни).

Питання оптимального керування динамічними процесами багатокомпонентних систем за умов в'язкості в роботах [7, 8] досліджені стосовно систем, стани яких описуються початково-крайовими задачами для псевдогіперболічних рівнянь з умовами спряження неідеального контакту. Розглянуті різноманітні можливості оптимального керування такими системами (внутрішніми джерелами, в умовах спряження, в крайових умовах) за умов різноманітних спостережень (за станом по всьому багатокомпонентному тілу, на його границі, на тонкому включенні, за станом системи в фінальний момент спостережень). В усіх зазначених випадках доведено теореми про існування єдиних оптимальних керувань.

В роботах [7, 8] досліджені питання оптимального керування деформованим станом пружного багатокомпонентного тіла з тонкими слабкотривкими включеннями / тріщинами. Досліджені питання оптимального керування (масовими силами, напругами на частині границі заданого тіла) зі спостереженнями за зміщеннями по всьому багатокомпонентному тілу, на тонкому включенні за стрибком дотичних зміщень, за нормальною складовою зміщень на тонкому слабкотривкому включенні, за зміщеннями на частині границі тіла. В усіх розглянутих випадках доведено теореми про існування єдиного оптимального керування. При співпаданні множини $U_\partial$ допустимих керувань з відповідним повним гільбертовим простором $U$ показана можливість побудови шляхом використання відповідних класів розривних функцій методу скінченних елементів обчислювальних схем підвищеного порядку точності визначення наближення $u_k^N$ оптимального керування $u$.

В роботах [7, 8] стосовно деяких задач екології розглянуті питання комплексних керувань (на різноманітних складових багатокомпонентного тіла) з комплексними спостереженнями. Доведені теореми про існування єдиних оптимальних керувань такими системами.

В разі співпадання множин допустимих керувань з відповідними повними гільбертовими просторами побудовані відповідні крайові чи початково-крайові задачі, що визначають єдині оптимальні керування всіх вище перерахованих складних систем.

Досліджені питання оптимального керування термонапруженим станом [18], квазістатичним напружено-деформованим станом [19], динамічним напружено-деформованим станом багатокомпонентних тіл, а також систем, що описуються гіперболічними, псевдогіперболічними рівняннями з зосередженими масами; конвективно-дифузійними процесами та ін.

## 3. НОВА ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМ ЕКОЛОГІЇ ТА РАЦІОНАЛЬНОГО ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Як зазначено вище реальні природні чи штучні грунтові об'єкти багатокомпонентні, складові яких відрізняються між собою фізичними характеристиками: пористістю, коефіцієнтами теплопровідності, міцнісними властивостями та ін. Крім цього, вони часто вміщують в собі різноманітні тонкі включення (природного чи штучного походжень): прошарки глин, мергелів, протифільтраційні мембрани та завіси, технологічні прошарки, продовгуваті тріщини та ін. Незважаючи на те, що товщини зазначених прошарків значно менші характерних розмірів інших складових багатокомпонентних тіл, такі прошарки значно впливають на розвиток вищезгаданих процесів: по різні сторони слабкопроникливих включень різні тиски рідини, по слабкотривким включенням відбуваються зрушення масивів грунту – дотичні зміщення мають розриви та ін. Властивість слабкопроникливості часто використовують як позитивний фактор – створюються тонкі протифільтраційні елементи з метою запобігання суфозії, обводнення слабкотривких складових, тобто з метою запобігання руйнацій різноманітних об'єктів.

В силу того, що вище зазначена неоднорідність є визначальною в розвитку основних процесів, що характерні для багатокомпонентних грунтових масивів природного чи штучного походжень, нехтуванням цією особливістю є недоцільним. Оскільки традиційні математичні моделі опису згаданих процесів (що базуються на різноманітних засадах заміни багатокомпонентних тіл з включеннями відповідними однорідними тілами) є неприйнятними, в роботах [1–19] побудовані нові математичні моделі – як принципово нові класи математичних задач з розривними розв'язками, де вплив різноманітних довільно зорієнтованих в просторі тонких включень / тріщин враховується певними обмеженнями – умовами спряження неідеального контакту. Останні отримані на основі певних законів збереження. Розроблена в роботах методика використання відповідних класів розривних функцій дозволила для отриманих нових математичних моделей опису різноманітних процесів в багатокомпонентних грунтових тілах з різноманітними тонкими включеннями / тріщинами будувати відповідні класичні узагальнені задачі в слабких постановках та мінімізації функціоналів енергії на відповідних класах розривних функцій (в тому числі і задач з єдиними розв'язками на опуклих підмножинах повних гільбертових просторів) та узагальнених задач на власні значення з розривними власними функціями. Розроблена методика побудови обчислювальних алгоритмів підвищеного порядку визначення наближених розривних розв'язків всіх отриманих авторами нових класів задач, шляхом використання відповідних множин розривних функцій методу скінченних елементів. Зазначимо, що точність розроблених алгоритмів за порядками кроків дискретизації просторових об'єктів та часових проміжків не гірша аналогічних, відомих для відповідних класів задач з гладкими розв'язками.

Побудовані нові класи математичних (диференціальних) моделей з умовами спряження, що описують основні процеси в багатокомпонентних грунтових середовищах з довільно зорієнтованими в просторі тонкими включеннями / тріщинами природного чи штучного походжень; отримані нові класичні узагальнені задачі, що визначені на відповідних класах розривних функцій; розроблена методика визначення відповідних класів допустимих розривних функцій МСЕ; побудова дискретних моделей та обчислювальних алгоритмів **складають нову теоретичну платформу нової інформаційної технології дослідження основних процесів, характерних для багатокомпонентних грунтових об'єктів з різноманітними включеннями.**

Зазначена теоретична платформа програмно реалізована в автоматизованих системах НАДРА, НАДРА-2П, НАДРА-3Д – відповідно розрахунку двовимірних-профільних / площинних процесів усталеного та неусталеного руху рідини в багатокомпонентних тілах з довільно розташованими у просторі тонкими включеннями різноманітного походження, формування температурних полів в таких об'єктах та їх механічного деформування [20, 21]; розрахунку планово-просторової фільтрації в тришаровому тілі з прошарками, що характерне для 30-ти кілометрової зони ЧАЕС – розрахункова область 27 км × 25 км; розрахунку тривимірних процесів в довільних тривимірних багатокомпонентних тілах з довільно розташованими у просторі тонкими включеннями чи тріщинами [22]. Всі автоматизовані системи оснащені потужними підсистемами: опису та корегування складних геометричних двох- та тривимірних об'єктів з довільними розрізами; скінченно-елементного розбиття складних тіл з розрізами; опису та корегування фізичних характеристик складових тіл – макроелементів; опису та корегування умов взаємодії виділених тіл з оточуючим простором та їх параметрів; опису та корегування властивостей впливу тонких включень на досліджувані процеси – умов спряження неідеального контакту та їх параметрів; реалізації проблемно-орієнтованих обчислювальних алгоритмів за відповідними класами фізичних процесів – математичних задач; обробки результатів автоматизованого комп'ютерного дослідження процесів.

Системи неодноразово демонструвались на міжнородних виставках Екологія–2000–2004 рр., Cebit (2001–2005, м. Ганновер, ФРН) і отримали позитивну оцінку фахівців.

Слід зазначити, що для отримання прийнятного шуканого комп'ютерного розв'язку конкретної задачі зі значними геометричними розмірами необхідно використовувати скінченно-елементне розбиття розрахункових областей зі значною кількістю скінченних елементів. Виникає потреба формувати та розв'язувати проміжні системи лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь великих розмірів – понад $5 \cdot 10^5$ невідомих. За таких умов вище зазначені процеси не можуть бути досліджені навіть на сучасних потужних ПЕОМ сім'ї PENTIUM. В зв'язку з цим створені модифікації систем НАДРА та НАДРА-2П – автоматизованого дослідження процесів, характерних для багатокомпонентних грунтових середовищ, та планово-просторового руху рідини в тришарових тілах при використанні необхідної значної кількості скінченних елементів. Зазначені модернізовані комплекси функціонують на обчислювальних комплексах ПЕОМ-СКІТ, де СКІТ (СКІТ-2, СКІТ-3) виступає як потужний суперкомп'ютер для розв'язування проміжних систем алгебраїчних рівнянь з порядками понад $5 \cdot 10^5$ і до $1{,}3 \cdot 10^6$ невідомих. На кластерному суперкомп'ютері СКІТ-2, створеному в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, розв'язуються системи алгебраїчних рівнянь з числами обумовленості менше ніж $10^{14}$, а при більших числах обумовленості відповідні системи алгебраїчних рівнянь розв'язуються на кластерному суперкомп'ютері СКІТ-3, створеному також в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України.

На комплексі ПЕОМ-СКІТ-2 розв'язана задача аналізу впливу створених порожнин на напружено-деформований стан шаруватого грунтового схилу з характерними просторовими розмірами активної зони $700 \times 300$ м. В цьому випадку проміжні системи алгебраїчних рівнянь з симетричними додатно означеними матрицями стрічкової структури містять 532 тисячі невідомих з півшириною 898 елементів стрічки ненульових елементів матриці. Така задача розв'язана за 5 хв 15 с і використано оптимальне число 15 процесорів СКІТ-2.

Зазначимо, що максимально допустимий порядок системи алгебраїчних рівнянь для використання всієї доступної оперативної пам'яті 32 процесорів комплексу СКІТ-2 складає 1 322 544 невідомих з півшириною стрічки матриці 1264. Така система алгебраїчних рівнянь, що отримана при розв'язуванні задачі теорії пружності в багатозв'язній області, на суперкомп'ютері СКІТ-2 розв'язана за 23 хв.

За допомогою модернізованої системи НАДРА-2П на комплексі ПЕОМ-СКІТ-2 розв'язана задача планово-просторової фільтрації рідини в 30-ти кілометровій зоні Чорнобиля – розрахункова область з розподіленою мережею поверхневих водойм складає 27 км $\times$ 25 км. Крок розрахункової сітки становить 62,5 м, число невідомих систем алгебраїчних рівнянь – 230 тисяч. На суперкомп'ютері СКІТ-2 ця задача розв'язана за 70 с і використано 10 процесорів. Така задача на ПЕОМ (PENTIUM-2.4) розв'язується за 5 год.

Слід зазначити, що розглядувані задачі відносяться до класів задач, які потребують обробки в паралельному режимі повнопов'язаних даних значних об'ємів. Організація ефективної паралельної обробки (організації обчислень) таких даних є надзвичайно складною проблемою та потребує розробки принципово нових відмінних від підходів, що розвивалися при створенні програмно-алгоритмічних засобів, реалізація яких орієнтована на однопроцесорні обчислювальні комплекси.

Розроблена інформаційна технологія дослідження процесів в багатокомпонентних тілах з включеннями має загальний характер – в тому числі і для споруд різноманітного призначення, об'єктів машинобудування та ін. Зокрема, під науковим керівництвом одного з авторів даної роботи в Тернопільському державному технічному університеті ім. Івана Пулюя вона розповсюджена на задачі трібології – задачі про тертя складових багатокомпонентних тіл. Вона реалізована у вигляді автоматизованого програмно-алгоритмічного комплексу DIFUS дослідження процесів дифузії в складених тілах з включеннями та тріщинами в декартовій, циліндричній та полярній системах координат. За допомогою цього комплексу розв'язані деякі задачі трібології [23].

## ЛІТЕРАТУРА


1. **Дейнека В. С., Сергиенко И. В.** Модели и методы решения задач в неоднородных средах.–Киев: Наук. думка, 2001.–606 с.
2. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Задачи с условиями сопряжения и вычислительные схемы повышенного порядка точности их дискретизации // Праці Українського математичного конгресу 2001. –Київ: Ін-т математики НАНУ.–2002.–С. 106–120.
3. **Сергієнко І. В., Дейнека В. С.** Задачі трансмісії з неоднорідними головними умовами спряження та високоточні чисельні алгоритми їх дискретизації // Укр. матем. журн.–2002.–**54**.–№ 2.–С. 258–275.
4. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Численное моделирование нелинейных нестационарных процессов с разрывными характеристиками полей // Кибернетика и систем. анализ.–1999.–№ 3.–С. 3–13.
5. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Задачи с условиями сопряжения и высокоточные вычислительные алгоритмы их дискретизации // Кибернетика и систем. анализ.–1999.–№ 6.–С. 100–124.
6. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Модели с условиями сопряжения и высокоточные методы их дискретизации // Кибернетика и систем. анализ.–2000.–№ 1.–С. 110–131.
7. **Дейнека В. С., Сергиенко И. В.** Оптимальное управление неоднородными распределенными системами.–Киев: Наук. думка, 2003.–506 с.
8. **Sergienko Ivan V., Deineka Vasyl S.** Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions.–New York: Kluwer Akademic Publishers.–2005.–400 p.
9. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** О численном решении задачи динамической теории упругости для тел со средоточенными массами // Прикл. механика.–2004.–**т. 40**.–№ 12.–С. 65–75.
10. **Сергієнко І. В., Дейнека В. С.** Високоточні алгоритми розв'язання спектральних задач з власними значеннями в умовах спряження та в крайових умовах // Доп. НАН України.–2001.–№ 2.–С. 74–80.
11. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** О существовании единственного обобщенного решения квазилинейного эллиптического уравнения с условиями сопряжения // Доп. НАН України.–2002.–№ 4. –С. 72–82.
12. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Вычислительные алгоритмы для условно корректной задачи прогибов составной балки // Доп. НАН України.–2002.–№ 4/–С. 77–82.
13. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** О численном исследовании прогибов составной тонкой пластины // Доп. НАН України.–2003.–№ 6.–С. 52–58.
14. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Моделирование процессов, описываемых эллиптико-параболическими системами с условиями сопряжения // Пробл. управления и информатики.–2000.–№ 3.–С. 57–75.
15. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Висоточные вычислительные алгоритмы исследования псевдопараболических распределенных систем с условиями сопряжения // Доп. НАН України.–2003.– № 7.–С. 73–81.
16. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** О численном решении спектральной задачи исследования устойчивости и собственых колебаний составных стержней // Прикл. механика.–2002.–**т. 38**.–№ 11. –С. 124–132.
17. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Численное моделирование динамических процессов, описываемых псевдогиперболическим уравнением с условиями сопряжения // Пробл. управления и информатики.–2004.–№ 1.–С. 61–70.
18. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Комплексное оптимальное управление термонапряженным состоянием составного тела // Кибернетика и систем. анализ.–2004.–№ 3.–С. 43–61.
19. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С.** Оптимальное управление квазистатическим напряженно-деформированным состоянием составного тела //

Пробл. управления и информатики.–2004.–№4.–С. 58–79.

20. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С., Калынюк Н. А. и др.** Автоматизированная диалоговая система НАДРА-Д и исследования процессов в многокомпонентных средах // Пробл. программирования.–2004.–№ 2–3.–С. 520–533.
21. **Сергиенко И. В., Дейнека В. С., Калынюк Н. А. и др.** Автоматизированный комплекс НАДРА для исследования процессов в многокомпонентных средах: В 2 ч.–Киев, 2002.–(Препринт / НАНУ. Ин-т кибернетики).– ч. 1.–36 с. (...; 2002–3); ч. 2.–36 с. (...; 2002–4).
22. **Дейнека В. С., Вєщунов В. В.** Система автоматизованого розрахунку процесів у тривимірних багатокомпонентних середовищах NADRA 3D // Матеріали конференції "Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин", 4–7 жовтня 2004 р., Тернопіль: Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя.– 2004.– С. 138–144.
23. **Дейнека В. С., Баран І. О.** Автоматизована система DIFUS для розрахунку процесів дифузії в неоднорідних середовищах // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.–2002.–№ 2.–С. 111–115.