УДК 621.039.7.001.2

Яцишин А.В.

АНАЛІЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ПЛОЩИННИХ АНАМОРФОЗ

Актуальність

Розвиток багатьох наук про Землю, пов'язаних із просторово-часовим аналізом, припускає не тільки вдосконалення способів відображення географічних явищ, але й показ їх зв'язків з іншими явищами, особливо в тих випадках, коли вони аналізуються як системи. Виникає необхідність досліджувати характеристики, що варіюють у просторі, відразу декількох явищ. Виконати такий аналіз простіше, якщо хоча б одну з змінних у просторі характеристик прийняти рівномірно розподіленою і на її фоні аналізувати всі інші з нею взаємозалежні характеристики. Для цієї мети застосовують трансформації зображення явища, взятого за основу, зі звичної для нас евклідової метрики в умовно тематичний «простір вирівняного явища». Під терміном „трансформація” розуміється перехід від картографічного зображення, в основі якого, як правило, покладена топографічна метрика земної поверхні, до іншого зображення, де основною є метрика явища. Географи проявляють все зростаючий інтерес до подібних трансформованих зображень - анаморфоз. Анаморфози можна визначити, як графічні зображення, похідні від традиційних карт, масштаб яких трансформується й варіює залежно від величини характеристики явищ на вихідній карті.

Серед анаморфоз найбільше поширення одержали їхні площинні різновиди, які дозволяють вирівнювати в просторі густини (наприклад, густина населення, густина територіального розподілу доходів, густина територіального розподілу споживання деякого продукту тощо). Тобто в цьому випадку площі зображуваних територіальних одиниць стають пропорційними відповідним їм величинам показника, що закладено в основу анаморфози. При цьому від анаморфованих зображень вимагається максимально можливе збереження взаємного розташування територіальних одиниць, їхньої форми й ін.

Основною проблемою використання анаморфоз у сучасній науці є відсутність доступних автоматизованих систем побудови анаморфоз. Цією проблемою займається зовсім мало фахівців. Серед них найбільші досягнення на території СНД одержав доктор географічних наук, професор В.С. Тікунов . У ряді його робіт описані різні числові методи побудови анаморфоз, приклади використання анаморфоз [2,3,4,5,6]. З останніх випущених робіт Тікунова особливе значення має «Анаморфози: Що це таке?» [1]. У цій книзі узагальнюється досвід створення й використання анаморфоз у географічних й економічних дослідженнях. Показано методику створення простих лінійних анаморфоз, охарактеризовані ручні способи побудови площинних анаморфоз, способи механічної аналогії, електричного моделювання і фотографічний метод. Основна увага приділена чисельним методам побудови анаморфоз. Показано конкретні приклади використання анаморфоз у географічних й економічних дослідженнях.

Основні напрямки досліджень анаморфоз:

- огляд і дослідження існуючих числових методів побудови площинних анаморфоз;
- модифікація обраних методів з метою автоматизації анаморфування на ЕОМ;
- розробка системи автоматизованого анаморфування карт для використання в ГІС;
- на прикладі розробленої системи показати практичну доцільність і перспективи використання анаморфоз у сучасних ГІС.

Постановка задачі

Для розробки автоматизованої системи побудови анаморфоз з ціллю розв’язання певного кола медико - екологічних задач необхідно в першу чергу:

- розглянути та проаналізувати існуючі методи побудови площинних анаморфоз;
- вибрати алгоритм побудови площинних анаморфоз.

Огляд і аналіз числових методів побудови площинних анаморфоз

Серед числових методів побудови площинних анаморфоз можна виділити такі методи:

1) Алгоритм У. Толбера;
2) Метод поліфокальних проекцій;
3) Спосіб трикутників;
4) Алгоритм лабораторії Лоуренса Берклі;
5) Алгоритм Дж. Доугеніка;

Аналіз алгоритму У. Толбера

Опис. Один з перших числових методів побудови анаморфоз був запропонований У. Тоблером [7]. У цьому алгоритмі передбачається, що територія розбита на чотирикутні частини (на початковому етапі — на прямокутники). Для кожного чотирикутника вибирається таке зміщення вершин, що приводить його до чотирикутника необхідної площі. При цьому вектори зміщення вибираються таким чином, що вони паралельні бісектрисам координатних кутів, тобто мають вигляд *(a,a)* або *(a,-a).* Остання умова служить для визначення векторів зміщення. Можна показати, що якщо вершини одного із чотирикутників (скажемо *Q*) мають координати (x_i, y_i) $(1 \leq$

i ≤ 4), а їх вектори зміщення рівні *(Δ, Δ), (-Δ, Δ), (Δ, Δ), (Δ,-Δ)* для *i = 1,2,3,4* відповідно, те величина *Δ* може бути знайдена з рівняння

$$4\Delta^2 + \Delta(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + A - A' = 0 \qquad (1)$$

де A – площа чотирикутника Q, A' «необхідна» площа цього чотирикутника ($A' = A \cdot {p_Q}/{\overline{p}}$, де p – густина розглянутого показника в чотирикутнику Q, $\overline{p}$ – середня густина показника на всьому картографічному зображенні) Для кожної вершини сітки на кожному ітераційному кроці вектор зміщення визначається як сума чотирьох векторів відповідних пов'язаних з нею комірок (чотирикутників). Відповідно до знайдених векторів здійснюється зміщення всіх вершин. Варто стежити за відсутністю порушень цілісності картографічного зображення (типу накладень сусідніх комірок одна на одну). Після того, як обчислені нові площі комірок, ітераційний крок повторюється. Процес переривається, коли відхилення отриманої густини розподілу розглянутого показника від постійної стає досить малим.

Переваги та недоліки. Переваги цього алгоритму складаються в його простоті й у відсутності переваг одних комірок стосовно інших (наприклад, у порядку їхньої обробки). Однак він має й очевидні недоліки. По-перше, результат істотно залежить від вибору напрямків координатних осей. Це пов'язано з тим фактом, що ми починаємо з розбивки території на прямокутники зі сторонами, паралельними координатним осям (власне кажучи алгоритм допускає будь-яку початкову розбивку території на чотирикутники). Основна причина полягає в тому, що вектора зміщень вершин вибираються паралельними бісектрисам координатних кутів, що робиться для одиничності їхнього визначення. По-друге, на кожному кроці вектор зміщення вершини визначається тільки по чотирьох пов'язаних з ним чотирикутниках. Тому присутність, наприклад, частини території з високою густиною розглянутого показника буде виглядати вершиною (її зсувом) тільки після числа ітераційних кроків, рівного кількості комірок між вершиною й зазначеною частиною території. Тому цей ітераційний процес не може сходитися швидко. Більше того, для ітераційних кроків крім першого (коли чотирикутники перестають бути прямокутниками) рівняння (1) може не мати рішень, якщо «необхідна» площа A' досить мала. Потрібне пояснення того, що варто робити в такому випадку. Нарешті, не очевидно (і не доведено), що алгоритм сходиться для будь-якого початкового розподілу густини (навіть якщо немає проблем з можливістю розв'язання рівняння (1)).

Аналіз методу поліфокальних проекцій

Опис. Метод поліфокальних проекцій був запропонований в роботі [8]. Відповідно до точки зору цієї книги, він може називатися поліфокальними анаморфозами. Як і попередній метод, він не призначений для вирівнювання довільної густини. Ціль методу складається в збільшенні масштабу біля декількох обраних центрів.

Якщо є тільки один такий центр, це може бути зроблено в такий спосіб. Можна взяти полярну систему координат *(r, φ)* із центром у виділеній точці й розглянути перетворення, що переводить точку *(r, φ)* у точку *(r (1+f), φ)*. Тут $f = f(r, t, u, \ldots)$ – функція відстані *r* і додаткових параметрів *t, u,....,* що впливають на співвідношення масштаб/відстань, таких як час і вартість. Для збільшення масштабу біля початку координат автори пропонують використати функцію *f* виду

$$f(r,t,u,\ldots)=\frac{A}{1+Cr^{(d_0+d_1t+d_2t^2+\ldots+e_1u+e_2u^2+\ldots)}} \tag{2}$$

У дійсності вони аналізують тільки випадок $d_0 = 2,\ d_i = 0,\ e_i = 0, \ldots (i=1, 2, \ldots)$, тобто не враховано вплив ніяких додаткових параметрів. Таким чином, функція $f = f(r)$ бралася у вигляді $\frac{A}{1+Cr^2}$. Іншими словами (у декартовій системі координат, де виділений центр має координати (x_1, y_1), використане перетворення може бути задано формулою

$$(x, y) \mapsto (x + \Delta x_1, y + \Delta y_1) \tag{3}$$

де $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, $\Delta x_1 = (x - x_1) f(r)$, $\Delta y_1 = (y - y_1) f(r)$. Таким чином, для кожної точки *(x, y)* площини вектор зміщення дорівнює $(\Delta x_1, \Delta y_1)$.

Якщо є кілька центрів (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), то можна розглянути зміщення точки, рівної (векторній) сумі зміщень, що відповідають всім центрам. Таким чином, поліфокальна проекція визначається перетворенням

$$(x, y) \mapsto (x + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n, y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_n) \tag{4}$$

де $\Delta x_i, \Delta y_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ визначається формулою (1.10) для точки (x_i, y_i). При цьому коефіцієнти *A* и *C* можуть братися різними для різних центрів, тобто

$$\Delta x_i = (x - x_i) \cdot \frac{A_i}{1 + C_i r_i^2}, \quad \Delta y_i = (y - y_i) \cdot \frac{A_i}{1 + C_i r_i^2} \tag{5}$$

Використання різних значень коефіцієнтів A_i і C_i дозволяє одержати різні масштаби біля різних центрів.

Переваги та недоліки. Основний недолік методу це те, що вибір коефіцієнтів A_i і C_i не формалізований і його неможливо автоматизувати. Також метод орієнтований на відображення тільки точкових джерел і потребує візуального аналізу.

Аналіз способу трикутників

Опис. Цей метод був розроблений у Московському державному університеті ім. М. В. Ломоносова на початку вісімдесятих років [9]. Як і метод У. Толбера, він працює не з природним діленням території, а зі штучним. Територія (або її картографічне зображення) передбачається триангульованою, тобто покритою множиною трикутників таким чином, що різні трикутники не перетинають один одного й можуть мати або загальну сторону, або загальну вершину. При цьому бажано, щоб система трикутників була обрана таким чином, що територіальні одиниці були об'єднаннями деяких трикутників. Для кожного із трикутників обчислюється густина P_i розподілу розглянутого показника. Повинен бути обраний показник f, який є справедливим для кожної вершини мережі й характеризує розходження в площині розподілу розглянутого явища для трикутників, що примикають до цієї вершини. Це означає, що величина f_j показника для вершини j завжди визначена, не від'ємна й дорівнює нулю, тоді і тільки тоді, коли всі густини $P_{i_j(1)}, P_{i_j(2)}, \ldots, P_{i_j(m_j)}$ показника в трикутниках, що примикають до цієї вершини, рівні між собою. Тут m_j, — кількість трикутників, що примикають до вершині j, $i_j(l)$, $i_j(2), \ldots, i_j(m_j)$. Роль цього показника може грати один з наступних:

$$f^{(1)} = \sum_{l=1}^{m_j} (P_{i_j(l)} - \bar{P}_j)^2,$$

$$f^{(2)} = \sum_{l=1}^{m_j} | P_{i_j(l)} - \bar{P}_j |, \tag{6}$$

$$f^{(2)} = \max_{1 \le l < k \le m_j} | P_{i_j(l)} - P_{i_j(k)} |,$$

де $\bar{P}_j = \dfrac{\left(\sum_{l=1}^{m_j} S_{i_j(l)} \cdot P_{i_j(l)} \right)}{\sum_{l=1}^{m_j} S_{i_j(l)}}$, S_i – площа i-ого трикутника.

Для числової реалізації методу була використана перша формула. Вибиралася випадкова вершина j мережі трикутників. Визначалася область площини, що містить розглянуту вершину й така, що зміщення вершини в будь-яку її точку не порушує властивості зображення бути взаємно-однозначним, тобто не порушує взаємного розташування прилягаючих трикутників. Для реалізації алгоритму ця область вибиралася у вигляді кола, радіус якого визначався по спеціальній формулі. У межах кола вибирається нове положення вершини, для якого значення показника f буде мінімальним. Пропонується визначати таке положення за допомогою методу Монте-Карло, тобто методу випадкового пошуку. Після переносу вершини в знайдену точку обчислюються нові густини розподілу розглянутого показника для всіх трикутників, що примикають. Ці густини рівні $P_{i_j(l)} \cdot S_{i_j(l)} / \tilde{S}_{i_j(l)}$, де $\tilde{S}_{i_j(l)}$ — нова площа відповідного трикутника. Після цього процедура повторюється для наступної випадковим образом обраної вершини й т.д. доти, поки різниця густин розподілу розглянутого показника не стане менше заздалегідь обраної величини.

Переваги та недоліки. Очевидними достоїнствами методу є: простота, незалежність від вибору системи координат, збереження топологічної подоби з оригіналом. Основний недолік методу складається в істотній залежності результату від випадкових виборів, що мають місце при його реалізації: у порядку обробки вершин, у випадковому пошуку нового положення обраної вершини.

Аналіз алгоритму лабораторії Лоуренса Берклі

Опис. Детальний опис алгоритму побудови анаморфованих зображень знаходиться в роботі [10].

Нехай $\overline{p}$ – середня густина розглянутого показника по всій території. На кожному кроці алгоритму вибирається одна з розглянутих територіальних комірок (скажемо A). Нехай p_A — густина розглянутого показника в комірці A, C_A — центр мас цієї комірки. Цей центр може лежати поза самою коміркою A, якщо ця комірка складної форми (неопукла або неоднозв'язна). Після цього визначається деформація h картографічного зображення, що зберігає центр C_A змінює площу комірки A необхідним чином і не міняє площі інших комірок. Для того, щоб описати цю деформацію, візьмемо систему полярних координат (r, θ) із центром у точці C_A. Нехай $Q_i = (r_i, \theta_i)$ одна із точок цифрового картографічного зображення. Звичайно це одна із точок границь розглянутих комірок (територіальних одиниць), що лежить поза A, але це необов'язково: апріорі це може бути довільна точка площини. Зокрема, це може бути яка-небудь характерна точка площини, наприклад, що відповідає великому місту. Розглянемо пряму, що з'єднує точки C_A й Q_i, і нехай $Q_{i,j} = (r_{i,j}, \theta_i)$ $(j = 1, 2,..., n;\ r_{i,1} < r_{i,2} < ... < r_{i,n})$ — точки перетину цієї прямої з границею комірки A. У найпростішому випадку (комірка A має просту форму, наприклад, опукла, точка Q_i лежить поза A) маємо тільки одну точку перетину $(n = 1)$. Образ $\widetilde{Q}_i$ точки Q_i під дією деформації h визначається як $(\tilde{r}_i, \theta_i)$, де $\tilde{r}_i = f \cdot r_i$, $f^2 = (1 + (M_A - 1) \cdot R_i^2 / r_i^2$, $M_A = p_A / \overline{p}$, визначення R_i (або, точніше, R_i^2) залежить від геометрії області A и розташування точки Q_i. Якщо центр C_A лежить усередині A, а точка Q_i — зовні (і, отже, n непарне), то

$$R_i^2 = r_{i,1}^2 - r_{i,2}^2 + r_{i,3}^2 - ... + r_{i,n}^2; \tag{7}$$

якщо центр C_A, і точка Q_i лежить усередині A (n парне), то

$$R_i^2 = r_{i,1}^2 - r_{i,2}^2 + r_{i,3}^2 - ... + r_{i,n}^2 + r_i^2; \tag{8}$$

якщо центр C_A, і точка Q_i лежить поза A (n парне), то

$$R_i^2 = -r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 - r_{i,3}^2 + ... - r_{i,n}^2 + r_i^2; \tag{9}$$

якщо центр C_A лежить поза A, а точка Q_i – усередині (n непарне), то

$$R_i^2 = -r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 - r_{i,3}^2 + ... - r_{i,n}^2. \tag{10}$$

Ця деформація досить слабко змінює форму обраної комірки (якщо ця комірка опукла, то деформація діє на ній як гомотетія). Форми інших комірок змінюються більш істотно. Ця операція повторюється для другої комірки, для третьої й т.д. аж до останньої. У результаті виходить деформація, яка приблизно має необхідні властивості.

Переваги та недоліки. Описаний метод дозволяє одержати анаморфози досить гарної якості. Реалізація його відносно проста. Складним елементом є обчислення перетинів прямих, що з'єднують центр C_A комірки A с точками Q_i, із границею комірки A.

Основний недолік цього методу полягає в тому факті, що остаточний результат істотно залежатиме від порядку, у якому беруться комірки. Інша проблема виникає, якщо пряма, що з'єднує центр C_A комірки A с точкою Q_i, містить один з відрізків границі A (або якщо такий відрізок дуже близький до зазначеної прямої). Це більш імовірно на першому кроці алгоритму, оскільки точність початкових даних визначається процесом цифрування й зазвичай не дуже висока. У цьому випадку описане перетворення не безперервне, і ми губимо властивість безперервності картографічного зображення. Крім цього результат потребує використання кількості кроків, рівної кількості розглянутих комірок. При цьому на кожному кроці виправляється площа тільки однієї з комірок, тому помилки, допущені на кожному кроці, (наприклад, помилки обчислень, помилки від заміни кривих, у які переходять відрізки, відрізками або ламаними лініями) не виправляються пізніше й накопичуються.

Аналіз алгоритму Дж. Доугеніка

Опис. Принцип побудови анаморфоз заснований на ітераційних процедурах [1]. На кожному кроці ітерації для будь-якої точки $\overline{r} = (x, y)$ території (при реалізації алгоритму – для точок, що утворюють дискретну апроксимацію границь деякого, звичайно – адміністративного, ділення території) визначається вектор зміщення $\overline{d}$, який дорівнює сумі $\sum \overline{d}_i$ векторів зміщення d_i, що відповідають всім одиницям територіального ділення. При цьому якщо одиниця територіального ділення має форму кола радіуса R із центром на початку координат, P — густина розглянутої величини в її межах (загалом кажучи, відмінна від середньої густини $\overline{P}$ по всій території), то відповідний вектор зміщення d_i дорівнює

$$\vec{r} \cdot \left(\left(\tilde{R} / R \right) - 1 \right) \qquad \text{при} \qquad \| \overline{r} \| = \sqrt{x^2 + y^2} \le R, \qquad (11)$$

$$\vec{r} \cdot \left(\sqrt{1 + (\tilde{R}^2 - R^2) / r^2} - 1 \right) \qquad \text{при} \qquad \| \overline{r} \| \ge R, \qquad (12)$$

де $\tilde{R} = R \cdot \sqrt{P / \overline{P}}$ – радіус кола з тією же сумарною величиною розглянутого показника, розподіленого із густиною, рівною середній ($\overline{P}$). Якщо на іншій частині площини густина розподілу показника постійна (і дорівнює $\overline{P}$), то відповідне перетворення робить розподіл показника рівномірним за один крок. Можна описати аналогічне перетворення (або навіть – два) для територіальної одиниці, що має форму еліпса. Ці два перетворення відрізняються образом еліпса. Для одного з них еліпс відображається в гомотетичний йому, для іншого – у софокальний (тобто в інший координатний еліпс відповідної системи еліптичних координат).

Алгоритми (або, вірніше, версії алгоритму) розрізняються по тому, як визначається вектор зміщення, що відповідає територіальній одиниці неправильної форми. У різних варіантах алгоритму територіальна одиниця апроксимується або колом, що має ту ж площу, або еліпсом, що має ту ж площу й ті ж моменти інерції (така заміна при визначенні вектора зміщення майже не позначається на формі розглянутих територіальних одиниць). Оскільки у випадку, якщо територіальні одиниці апроксимуються еліпсами, є дві можливості для визначення вектора зміщення, є три варіанти алгоритму. Ці варіанти розрізняються комп'ютерним часом, необхідним для реалізації одного кроку ітерації, швидкістю збіжності ітераційного процесу, а також стійкістю стосовно небезпеки появи «накладень» – неоднозначностей картографічного зображення.

Переваги та недоліки. У цього алгоритму на кожному кроці на зміщення точок (вершин) впливають всі комірки розбивки, тому він не залежить від порядку, у якому беруться комірки. Описаний метод дозволяє одержати анаморфози досить гарної точності.

Для того щоб гарантувати відсутність «накладань» при наявності більших розходжень у розподілі густини розглянутого показника між територіальними одиницями, треба множити вектор зміщення на коригувальний множник, що обирається між нулем і одиницею. Це істотно сповільнює збіжність алгоритму. Якщо територіальні одиниці мають складні форми, швидкість збіжності алгоритму невисока. Така ж ситуація має місце, якщо є велике розходження між густинами розподілу розглянутого показника в територіальних одиницях, що примикають. У такому випадку після декількох ітераційних кроків територіальні одиниці здобувають складні форми. Всі ці фактори ускладнюють реалізацію алгоритму.

Вибір алгоритму побудови площинних анаморфоз

Для автоматизації анаморфування метод побудови анаморфоз повинен мати наступні властивості:

1) відсутність неформалізованих етапів – для більш повної автоматизації анаморфування;
2) відсутність залежності від випадкових величин – для однозначності результату, можливості порівняння анаморфоз, зворотного анаморфування;

3) незалежність від вибору системи координат – для однозначності результату, можливості порівняння анаморфоз;
4) збереження топологічної подоби з оригіналом – для візуального аналізу результату;
5) висока точність результату – для використання анаморфоз у дослідженнях.

Висновки

Для автоматизації із всіх проаналізованих числових методів найбільше підходять алгоритм лабораторії Лоуренса Берклі й алгоритм Дж. Доугеніка.

Для реалізації був обраний алгоритм лабораторії Лоуренса Берклі через простоту реалізації й неоднозначності алгоритму апроксимації територіальних комірок колами й еліпсами в алгоритмі Дж. Доугеника. Деякі недоліки алгоритму лабораторії Лоуренса Берклі можна зменшити або повністю виключити за допомогою модифікацій.

1. *Гусейн-Заде С. М., Тикунов В.С.*. Анаморфозы: что это такое? М.:Эдиториал УРСС, 1999.- 168с.
2. *Брюханов А. В., Тикунов В. С.* Фотографический способ получения простых анаморфированных изображений // Геодезия, картография и аэрофотосъёмка. Вып. 37. Львов, Вища школа, 1983, с. 117—122.
3. *Гусейн-Заде С. М., Суетова И. А., Тикунов В. С.* Опыт корреляционного анализа явлений с использованием анаморфированных изображений // Геодезия и картография, 1993, № 12, с. 40-45.
4. *Гусейн-Заде С. М., Тикунов В. С.* Численные методы создания анаморфированных картографических изображений // Геодезия и картография, 1990, №1,с. 38-44.
5. *Гусейн-Заде С. М., Тикунов В. С.* Метод построения анаморфированных картографических изображений / Экологическое картографирование на современном этапе. Кн. 1, Л.: 1991, с. 29-31.
6. *Гусейн-Заде С. М., Тикунов В. С.* Опыт создания и использования анаморфоз // Известия высших учебн. заведен., сер. геодезия и аэрофотосъемка, 1991, №4, с. 142-152.
7. *Tolber W. R.* Cartograms and cartosplines// Proceedings of 1986 Workshop on Automated Cartography and Epidemiology. National Center for Helth Statistics. Washington, D.C., 1979, pp. 53-57.
8. *Kadmon N., Shlomi E.* A polifocal projection for statistical surfaces // The Cartographic Journal, 1978, Vol. 15, #1, pp. 36-41.
9. *Петров П. В., Серебнюк С. Н., Тикунов В. С.* Аналитический способ создания анаморфированых картографических изображений // Вестн. Моск. ун-та, сер. геогр., 1983, №2, с. 56-63.
10. *Selven S., Merril D., Sacks S., Wong L., Bedell L., Schulman J.* Transformations of maps to investigate clusters of disease. Lawrence Berkeley Laboratory, Univ. of California, 1984, 33p.