Брэгман Л.М., Брэгман Т.Т., Фокин И. Н.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРАТЕГИЙ В ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Теоретико-игровые задачи распределения ресурсов уже долгое время привлекают внимание исследователей (см., например, статью [1] и ссылки в ней). Особенностью таких игр является комбинаторный характер множества чистых стратегий: все возможные распределения ограниченных ресурсов между несколькими участками.

В данной работе рассматриваются модели, являющиеся обобщением классической игры распределения ресурсов. Стратегии игроков в таких играх имеют специальную комбинаторную природу. Рассматриваются задачи, в которых каждый игрок представляет собой команду, состоящую из нескольких участников, членов команды, которые не вполне сотрудничают друг с другом. Каждый член команды имеет свою часть общей стратегии и делает свой выбор независимо от других. При этом вводится следующая процедура принятия-отбрасывания: если в результате независимого выбора членов команды общая стратегия этого игрока оказывается допустимой, то она принимается, если она оказывается недопустимой, то она отбрасывается, и члены команды повторяют свой выбор до тех пор, пока полученная общая стратегия не станет допустимой.

Исследуются вопросы, связанные с существованием у игроков оптимальных и эквивалентных стратегий, обладающих специальными свойствами, в частности, определяемых лишь относительно небольшим числом параметров. Приводятся необходимые и достаточные условия существования в таких играх оптимальных и эквивалентных стратегий игроков, допускающих представление в мультипликативной форме. Показано, как представление в мультипликативной форме может быть использовано для моделирования оптимальных смешанных стратегий, когда члены команды делают свой выбор независимо и действует процедура принятия-отбрасывания. Более подробно исследуются конкретные классы комбинаторных матричных игр и, в частности, теоретико-игровые задачи оптимального распределения ресурсов.

Будем рассматривать игру Γ, в которой множество $\overline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ $(X_i \in R^k)$ есть множество чистых стратегий первого игрока, а множество $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_q)$ $(Y_j \in R^l)$ есть множество чистых стратегий второго игрока. Пусть H является $k \times l$-матрицей. Определим выигрыш первого игрока как $X_i H Y_j$, если игроки используют свои чистые стратегии X_i и Y_j соответственно. Предполагается, что векторы X_i (Y_j) являются неотрицательными и для всех $1 \le j \le k$ $(1 \le j \le l)$ существует X_i (Y_i), у которого $X_i[j] > 0$ $(Y_i[j] > 0)$. Игра Γ является матричной игрой с матрицей выигрышей A, которая может быть представлена в виде произведения:

$$A = XHY$$

где X есть $p \times k$-матрица, у которой векторы X_i являются строками, а Y есть $l \times q$-матрица, у которой векторы Y_j являются столбцами.

Такой подход удобен для игр, в которых множество стратегий имеет комбинаторную структуру, поэтому будем называть такие игры комбинаторными матричными играми. В таких играх числа p и q гораздо больше, чем числа k и l. Далее мы рассмотрим конкретные примеры игр, стратегии игроков в которых имеют комбинаторную природу.

Будем предполагать, что игроки представляют собой команды, состоящие из нескольких участников - членов команды. Члены команды не полностью кооперируются друг с другом. Каждый член команды обладает своей собственной частью общей стратегии игрока, то есть он выбирает свою часть компонент вектора X_i, предназначенную для этого члена команды. Однако целый вектор X_i, полученный в результате независимого выбора всех членов команды, может не принадлежать множеству чистых стратегий $\overline{X}$, то есть может не быть допустимой стратегией первого игрока. В этом случае полученный вектор отбрасывается, и члены команды повторяют свой выбор до тех пор, пока не будет получена допустимая стратегия.

Цель данной работы заключается в том, чтобы установить условия, при которых оптимальная стратегия первого (второго) игрока может быть получена как результат случайного независимого выбора членами команды при наличии процедуры принятия-отбрасывания. Другими словами, мы должны найти вероятностное распределение для каждого члена команды таким образом, чтобы выбор каждого члена команды в соответствии с этим распределением вместе с процедурой принятия-отбрасывания приводил к оптимальной смешанной стратегии в игре Γ.

Далее мы рассмотрим более подробно некоторые конкретные примеры комбинаторных матричных игр.

Пример 1. Игра с перестановками

Пусть два игрока имеют множество из n предметов. Стратегия каждого игрока заключается в том, чтобы разместить его предметы в n отделений: один предмет в каждое отделение. Если первый игрок размещает предмет i в отделение v, а другой игрок размещает предмет j в отделение v, то выигрыш первого игрока в отделении v равен $H_v(i,j)$, а полный выигрыш первого игрока равен сумме таких значений. Множество чистых стратегий каждого игрока в этой игре есть множество всех перестановок из n предметов.

Таким образом, если $i=(i_1,i_2,\dots,i_n)$ и $j=(j_1,j_2,\dots,j_n)$ есть перестановки из n чисел, выбранные первым и вторым игроками соответственно, то выигрыш первого игрока равен $H(i,j)=\sum_{v=1}^{n} H_v(i_v,j_v)$. Эта игра есть частный случай комбинаторной матричной игры, в которой X_i и Y_j являются матрицами перестановок, соответствующими перестановкам i и j соответственно. Матрица H является блочно-диагональной матрицей с блоками H_v. В этом случае числа p и q равны $n!$, а числа k и l равны n^2.

Предположим, что игроки представляют собой команды из n участников, являющихся членами команды. Член команды v решает, какой предмет необходимо положить в отделение v, то есть он выбирает числа $i_v \in \{1,2,\dots,n\}$. Стратегия является допустимой, если числа i_v являются различными, в противном случае стратегия отбрасывается.

Пусть α является смешанной стратегией первого игрока (в частности, α может быть оптимальной стратегией), то есть α является вероятностным распределением на множестве всех перестановок чисел $1,2,\dots,n$. Представляет интерес вопрос о том, возможно ли моделировать смешанную стратегию α с помощью независимых действий членов команды при наличии процедуры принятия-отбрасывания.

Таким образом, мы ищем вероятностные распределения на $1,2,\dots,n$ для членов команды, обладающие следующим свойством: если члены команды осуществляют свои решения в соответствии с этими распределениями, то вероятность каждой перестановки является той же самой, как и в смешанной стратегии α. Результаты данной работы дают возможность утверждать, что такие распределения в игре с перестановками существуют.

Пример 2. Теоретико-игровая задача оптимального распределения ресурсов (игра Блотто).

Будем рассматривать более подробно следующую теоретико-игровую задачу, связанную с распределением ресурсов. Пусть имеются два игрока, распределяющие имеющиеся у них заданные количества единиц неделимых ресурсов между t участками или между t моментами времени. Игроки имеют, соответственно, K_1 и K_2 единиц ресурсов. Стратегией первого игрока является t-мерный вектор $i=(i_1,\dots,i_t)$, у которого $\sum_{v=1}^{t} i_v = K_1$. Чистой стратегией второго игрока является t-мерный вектор $j=(j_1,\dots,j_t)$, у которого $\sum_{v=1}^{t} j_v = K_2$. Здесь i_v и j_v означают количество ресурсов, направляемых на участок v первым и вторым игроками соответственно. Выигрыш первого игрока на участке v определяется как $H_v(i_v,j_v)$, а полный выигрыш первого игрока в игре в целом равен сумме его выигрышей на всех участках. Чистая стратегия $i=(i_1,\dots,i_t)$ первого игрока может быть представлена с помощью $t(K_1+1)$- вектора X_i, компонентами которого являются нули и единицы. Вектор X_i

разбивается на t блоков с одной единицей в каждом блоке. Блок v имеет единицу в столбце с номером i_v, остальные нули (столбцы в блоке нумеруются от 0 до K_1). Таким же образом чистые стратегии $j=(j_1,\dots,j_t)$ второго игрока могут быть представлены с помощью $t(K_2+1)$- вектора, состоящего из нулей и единиц.

Пусть H есть матрица, состоящая из блоков H_v, где H_v определяет выигрыш первого игрока на участке v. Очевидно, что описанная игра является частным случаем комбинаторной матричной игры, у которой $k=t(K_1+1)$, $l=t(K_2+1)$, $p=\binom{K_1+t-1}{t-1}$, $q=\binom{K_2+t-1}{t-1}$.

Предположим, что игроки представляют собой команды, состоящие из t участников – членов команды. Член команды v решает, сколько единиц ресурсов он направляет на участок v Все члены команды принимают свои решения независимо. Стратегия для первого игрока является допустимой, если сумма единиц ресурсов, выбранных членами его команды, равна K_1, в противном случае она отклоняется.

Пусть α является смешанной стратегией первого игрока, то есть α есть вероятностное распределение на множестве целых неотрицательных t-векторов, таких что сумма их компонент равна K_1, Вопрос заключается в следующем: можем ли мы моделировать α с помощью независимых решений членов команды при наличии процедуры принятия-отклонения. Другими словами, существуют ли вероятностные распределения на $\{0,1,\dots,K_1\}$ для членов команды первого игрока такие, что выбор назначений количества ресурсов согласно этим распределениям при наличии процедуры принятия-отклонения приводит к той же самой вероятности чистой стратегии, что и смешанная стратегия α .

Ситуация в игре Блотто несколько отличается от той, которая имеет место в случае игры с перестановками: в общем случае таких вероятностных распределений для членов команды первого игрока не существует. Однако результаты данной работы показывают, что для каждой смешанной стратегии α существует близкая к ней смешанная стратегия α', которая может быть смоделирована с помощью вероятностных распределений членов команды первого игрока.

В общем случае число чистых стратегий у игроков очень велико, но существуют оптимальные смешанные стратегии, которые описываются относительно малым числом параметров. В работе [2] доказано существование таких стратегий и предложен метод их нахождения для сепарабельных игр с нулевой суммой.

Представляет интерес найти оптимальную смешанную стратегию, которая описывается малым числом параметров. Особый интерес представляет нахождение такой стратегии первого игрока, которая имеет следующее мультипликативное представление:

$$\alpha_i=\gamma\prod_{\mu=1}^{k}\beta_\mu^{X_i[\mu]}. \tag{1}$$

Эта стратегия описывается $k+1$ параметрами. Мультипликативная форма в некоторых случаях является более удобной, в частности, для моделирования стратегий игроков.

Две смешанные стратегии первого игрока будем называть эквивалентными, если они дают этому игроку один и тот же выигрыш при любых стратегиях второго игрока и при любой матрице H .

Важной является следующая теорема, дающая необходимые и достаточные условия существования эквивалентных смешанных стратегий в мультипликативной форме.

Теорема. Пусть $X_i\in R^k$, $i=1,\dots,p$ неотрицательные векторы и для каждого $j=1,2,\dots,k$ существует X_i, у которого $X_i[j]>0$. Тогда для каждой смешанной стратегии первого игрока существует эквивалентная стратегия, имеющая мультипликативное представление, тогда и только тогда, когда $\operatorname{aff}(\{X_1,X_2,\dots,X_p\})\cap R_+^k=\operatorname{conv}\{X_1,X_2,\dots,X_p\})$. Здесь aff и conv есть аффинная и выпуклая оболочки множеств.

Покажем теперь, как мы можем применить представление стратегий в мультипликативной форме для моделирования смешанной стратегии с помощью независимого выбора членов команды при наличии процедуры принятия-отбрасывания.

Рассмотрим игру с перестановками (Пример 1). В этой игре X_i являются матрицами перестановок. Пусть i перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Тогда $X_i[r, i_r] = 1$ и $X_i[r, s] = 0$ для $s \neq i_r$. Тогда мы можем формулу (1) записать в таком виде:

$$\alpha_i = \gamma \prod_{r=1}^{n} \beta_{ri_r} . \tag{2}$$

Так как $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, $\gamma = 1/\operatorname{Per}(\beta)$ ($\operatorname{Per}(\beta)$ есть перманент матрицы β). Отметим, что $\operatorname{Per}(\beta) > 0$, и матрица β не имеет нулевой строки. Мы можем предположить, что $\sum_{s=1}^{n} \beta_{rs} = 1$, для всех r, так как в противном случае мы можем осуществить балансировку каждой строки матрицы β таким образом, чтобы сумма ее элементов равнялась единице. Соответственно значение γ изменяется, так что формула (2) остается верной.

Мы можем теперь интерпретировать строки матрицы β как вероятности решений членов команды игрока: член команды r выбирает предмет s с вероятностью β_{rs}, и члены команды делают это независимо. Вероятность получить допустимую стратегию равна $\operatorname{Per}(\beta)$, и вероятность получить перестановку $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ при наличии процесса принятия-отбрасывания равна условной вероятности получения перестановки i при условии, что получена допустимая стратегия.

Рассмотрим теоретико-игровую задачу оптимального распределения ресурсов (Пример 2). В этой игре стратегия i есть целочисленный вектор $i = (i_1, i_2, \ldots, i_t)$, удовлетворяющий условиям $0 \le i_v \le K_1$, $\sum_{v=1}^{t} i_v = K_1$. Стратегия X_i может быть представлена как $t \times (K_1 + 1)$-матрица из нулей и единиц с одной единицей в каждой строке: $X_i[r, i_r] = 1$ и $X_i[r, s] = 0$ для $s \neq i_r$. Следовательно, мы можем переписать формулу (1) в такой форме: $\alpha_i = \gamma \prod_{r=1}^{t} \beta_{ri_r}$. Подобно тому, как это было в игре с перестановками, мы можем предполагать, что $\sum_{s=0}^{K_1} \beta_{rs} = 1$ для всех $r = 1, \ldots, t$.

Теперь мы можем интерпретировать β_{rs} как вероятность для решений членов команды первого игрока: член команды r направляет s единиц ресурса на участок r (или на момент времени r) с вероятностью β_{rs}. Допустимая стратегия получается, если суммарное количество направленных ресурсов равно K_1. Стратегии, которые не являются допустимыми, отбрасываются. Легко видеть, что вероятность получения распределения ресурсов i в этом процессе равна α_i.

Условия теоремы удовлетворяются для игры с перестановками (Пример 1). Действительно, X_i являются матрицами перестановок, $\operatorname{aff}(\{X_i\})$ есть множество матриц, у которых суммы элементов по строкам и столбцам равны единице. Поэтому множество A из теоремы является множеством бистохастических матриц, которое совпадает с выпуклой оболчкой $\{X_i\}$.

Условия теоремы не выполняются для теоретико-игровых задач, связанных с распределением ресурсов (Пример 2), но каждая смешанная стратегия в таких играх может быть аппроксимирована стратегией в мультипликативной форме.

Источники и литература

1. Roberson B. Colonel Blotto game.– Economic Theory, 2006, 29. – С. 1–24.
2. Bregman L.M., Fokin I.N. On separable non-cooperative zero-sum games.–Optimization, 1998, 44. – С.69-84.

Гордієнко І.В., Щербань О.А.

МОДЕЛІ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ ЕФЕКТИВНІСТЮ БІЗНЕСУ

Постановка проблеми. Системи керування ефективністю бізнесу (Business Performance Management, BPM), що останнім часом набули широкого розповсюдження, забезпечують стратегічне керування підприємством (організацією) на основі аналізу і моніторингу ключових показників ефективності (Key Performance Indicators, KPI). Системи BPM допомагають керівникам організації планувати стратегію розвитку бізнесу, розробляти стратегічні цілі, а також оцінювати ефективність діяльності відповідно до цих цілей та керувати процесом їх досягнення. Для підтримки реалізації стратегії організації системи BPM реалізують функції фінансового та операційного планування, консолідації і звітності, моделювання, аналізу і моніторингу ключових показників ефективності.

Серед інших методологій стратегічного планування системи BPM найчастіше підтримують методологію системи збалансованих показників (Balanced Scorecard, BSC), вперше запропоновану професором Гарвардської школи бізнесу Р. Капланом і консультантом з управління Д. Нортоном у 1992 р. [3]. Модулі BSC входять до складу переважної більшості систем BPM (Hyperion BPM, «Инталев: Навигатор» та ін.) та інтегрованих інформаційних систем рівня ERP. Популярність концепції BSC пояснюється суттєвими перевагами, які вона надає порівняно з іншими методиками розробки системи ключових показників ефективності. В той же час залишаються не розв'язаними деякі методологічні проблеми використання систем BSC [6].

Система BSC контролює такі суттєві аспекти господарської діяльності, як взаємовідношення з клієнтами, внутрішні бізнес-процеси, навчання і розвиток персоналу. Усі показники поділяються на відповідні блоки, причому між показниками існує певна взаємозалежність. Система збалансованих показників доповнює систему параметрів минулої діяльності компанії системою оцінок її перспектив, тобто включає і фактичні, і прогнозовані показники. Цілі і показники BSC формуються в залежності від місії і стратегії конкретної компанії.

Ієрархічна побудова Balanced Scorecard дає змогу забезпечувати контроль на всіх рівнях і у всіх ділянках бізнесу. Окремий набір контрольованих показників може бути розроблений навіть для одного робочого місця. Спеціалісти підкреслюють, що цей набір не обов'язково має бути великим і відтворювати всю структуру BSC, навпаки, він може містити малу кількість найбільш суттєвих для даного працівника показників.

Суттєвою рисою BSC є і те, що вона припускає використання не лише кількісних показників, а враховує і якісні фактори, оцінювані за допомогою шкал найменувань і порядку.

Окреслимо актуальні методологічні проблеми використання BSC.

По-перше, універсальність Balanced Scorecard, її придатність для підприємств різного профілю під час реалізації породжує питання: які саме показники мають бути обрані для даного конкретного підприємства в цілому і для окремих його підрозділів, як вони мають сполучатися між собою, через які періоди часу мають вимірюватися і т. ін. В першу чергу на вибір показників впливають критерії, що відповідають принципам побудови Balanced Scorecard, а саме: зв'язок показників зі стратегією організації; кількісне вираження показників; доступність показників; їх зрозумілість для працівників; збалансованість; релевантність; наявність загального визначення. За своєю суттю дана проблема являє собою багатокритеріальну задачу прийняття рішень. У попередній роботі нами був запропонований можливий підхід до розв'язання даної проблеми [2].

По-друге, досить часто проблематичним є одержання точних значень вимірюваних параметрів. На практиці іноді вдається лише одержати інформацію про приналежність показника до деякого діапазону значень. Ще більше це стосується майбутньої інформації. Крім цього, якісні дані, що мають бути переведені у кількісну форму, так само можуть бути квантифіковані лише приблизно, з деяким ступенем точності.

По-третє, використання BSC передбачає встановлення взаємозв'язку між показниками, але автори концепції не конкретизують, яким чином це має виконуватись. У кожному конкретному випадку можуть бути розроблені деякі моделі, які відображають ці взаємозалежності. Між показниками можуть підтримуватись також ієрархічні зв'язки, що відповідають рівням управління.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Основними проблемами при створенні систем Balanced Scorecard є вибір відповідних показників та економіко-математичних методів і моделей для відображення причинно-наслідкових зв'язків між ними. Враховуючи вищеназвані особливості даної проблемної області, реалізація BSC потребує створення гібридних моделей з використанням як традиційних кількісних методів,