2. *McDowell Z. M., Hunt J. R., Sitar N.* Particle transport through porous media // Wat. Resour. Res. – 1986. – **22**, No 13. – P. 1901. – 1921.
3. *Ojha C. S. P., Singh V. P., Adrian D. D.* Determination of critical head in soil piping // J. of Hydraulic Engineering, ASCE. – 2003. – **129**, No 7. – P. 511–518.
4. *Поляков В. Л.* Интенсивное промачивание суффозионных грунтов // Прикл. гідромеханіка. – 2007. – **9(81)**, № 3. – С. 70–79.
5. *Дмитриев А. Ф., Хлапук Н. Н., Дмитриев Д. А.* Деформационные процессы в несвязных грунтах в придренной зоне и их влияние на работу осушительно-увлажнительных систем. – Ровно: Изд-во РГТУ, 2002. – 145 с.
6. *Поляков В. Л.* Механическая суффозия в дренируемом грунте // Прикл. гідромеханіка. – 2002. – **4(76)**, № 4. – Р. 60–73.
7. *Аэров М. Э., Тодес О. М., Наринский Д. А.* Аппараты со стационарным зернистым слоем. – Ленинград: Химия, 1979. – 176 с.
8. *Романков П. Г., Курочкина М. И.* Гидродинамические процессы химической технологии. – Ленинград: Химия, 1982. – 288 с.
9. *Поляков В. Л.* О фильтрационных деформациях грунта с образованием аккумулирующих зон // Прикл. гідромеханіка. – 2003. – **5(77)**, № 2. – Р. 45–56.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 31.01.2007

УДК 539.3:538.6:534.1

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга, В. В. Левченко**

Про тривимірну задачу лінеаризованої магнітострикції феритів з феромагнітним резонансом

The full system of three-dimensional equations of linearized magnetostriction for ferrites in view of a ferromagnetic resonance is transformed to a system of eight equations of the operational Hamilton type for rather definitely chosen initial variables.

Однією з актуальних задач електромагнітомеханіки, що мають важливе фундаментальне і прикладне значення, є дослідження магнітопружного деформування тіл із феримагнітних магнітострикційних матеріалів з урахуванням феромагнітного резонансу. Цьому питанню присвячені роботи [3–6, 8–15]. У даній роботі пропонується перетворення системи тривимірних диференціальних рівнянь лінеаризованої магнітострикції феритів кубічної системи з урахуванням феромагнітного резонансу фізико-механічних властивостей.

Визначальні рівняння лінеаризованої магнітострикції з урахуванням феромагнітного резонансу в околі статичного поля попереднього підмагнічування $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ для феритів кубічної системи можна записати у вигляді

$$\sigma_{11} = c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \sigma_{22} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{33} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad \sigma_{32} = c_{55}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\beta_2}{M_0}m_2,$$

$$\sigma_{31} = c_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\beta_2}{M_0}m_1, \qquad \sigma_{12} = c_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$
$$b_3 = \mu_{33}h_3, \quad b_2 = h_2 + 4\pi m_2, \quad \frac{\partial m_2}{\partial t} = -\gamma\left(-H_0 m_1 + M_0 h_1 - \beta_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right),$$
$$b_1 = h_1 + 4\pi m_1, \qquad \frac{\partial m_1}{\partial t} = -\gamma\left(H_0 m_2 - M_0 h_2 + \beta_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right). \tag{1}$$

Тривимірна зв'язана задача електромагнітомеханіки для матеріалів з магнітострикцією вимагає спільного розв'язання механічних рівнянь коливань

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \tag{2}$$

відносно механічних переміщень u_i і напружень σ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ та квазістатичного наближення

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0, \qquad h_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{3}$$

лінеаризованих рівнянь Максвелла відносно малих збурень напруженості $\mathbf{h}$ і індукції магнітного поля $\mathbf{b}$, де φ — магнітний потенціал, при визначальних співвідношеннях (1).

У виразах (1)–(3) прийняті загальновживані позначення [1–3, 8, 9]: c_{ik} — модулі пружності; ρ — питома вага; β_2 — магнітопружна стала; μ_{33} — магнітна проникність; γ — гіромагнітне відношення.

Лінеаризовані диференціальні рівняння прецесії компонент m_1, m_2 вектора намагніченості, які входять в систему (1), в загальному випадку можна подати [7] в інтегральній формі. При усталених гармонічних коливаннях з круговою частотою ω, коли

$$a(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}\, a(x_1, x_2, x_3)\exp(-i\omega t) \tag{4}$$

(для амплітудних множників $a(x_1, x_2, x_3)$ залишаємо такі ж позначення, що і для $a(x_1, x_2, x_3, t)$), для амплітудних величин $m_1(x_1, x_2, x_3)$ та $m_2(x_1, x_2, x_3)$, знаходимо

$$m_1 = \frac{\gamma}{\omega_H^2 - \omega^2}\left(i\beta_2\omega\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) - \beta_2\omega_H\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + M_0\omega_H h_1 - iM_0\omega h_2\right),$$
$$m_2 = -\frac{\gamma}{\omega_H^2 - \omega^2}\left(\beta_2\omega_H\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + i\beta_2\omega\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - iM_0\omega h_1 - M_0\omega_H h_2\right), \tag{5}$$

де $\omega_H = \gamma H_0$ — частота феромагнітного резонансу.

Після підстановки (5) в (1) для амплітудних величин $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ і т. д. $(\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}\,\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)\exp(-i\omega t)$ і т. д.) одержимо вирази

$$\sigma_{11} = c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$
$$\sigma_{22} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$
$$\sigma_{33} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{32} = c_{55*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + ic_{54*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + i\beta_{52}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \beta_{51}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{31} = -ic_{54*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + ic_{55*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \beta_{51}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\beta_{52}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \qquad (6)$$

$$\sigma_{12} = c_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad b_3 = -\mu_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

$$b_2 = 4\pi\beta_{51}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + 4\pi i\beta_{52}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + i\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$b_1 = -4\pi i\beta_{52}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + 4\pi\beta_{51}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

У формулах (6) використані позначення

$$c_{55*} = c_{55} + \frac{4\pi\omega_H\gamma^2\beta_2^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)\omega_M}, \qquad c_{54*} = \frac{4\pi\omega\gamma^2\beta_2^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)\omega_M},$$

$$\beta_{51} = \frac{\omega_H\gamma\beta_2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \qquad \beta_{52} = \frac{\omega\gamma\beta_2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \qquad (7)$$

$$\mu = 1 - \frac{\omega_H\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}, \qquad \alpha = \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2},$$

причому $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$.

В дев'ять визначальних рівнянь (6), три рівняння механічних коливань (2) і одне рівняння

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (8)$$

входять амплітудні множники трьох механічних переміщень $u_i(x_1, x_2, x_3)$, шести механічних напружень $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, трьох компонент магнітної індукції $b_i(x_1, x_2, x_3)$ і магнітного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Таким чином, сукупність тринадцяти рівнянь (2), (6), (8) має тринадцять невідомих функцій.

Один шлях спрощення системи рівнянь (2), (6), (8) аналогічний виводу рівнянь Ламе–Нав'є теорії пружності в переміщеннях. Але тепер за незалежні невідомі треба взяти три амплітуди механічних переміщень $u_i(x_1, x_2, x_3)$ та магнітного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. В результаті одержимо систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Ця система досить громіздка і її явного вигляду виписувати не будемо.

Інший шлях спрощення системи тринадцяти рівнянь (2), (6), (8) полягає у спеціальному виборі восьми розв'язувальних функцій і аналогічний перетворенню системи дев'яти рівнянь пружності до шести рівнянь, які формально можна зобразити у вигляді операторної гамільтонової системи. Таке зображення вперше було запропоновано і виконано в роботі [3] і розвинуто в подальших роботах [8, 9 та ін.].

Виберемо за розв'язуючі функції певним чином підібраний вектор-стовпчик невідомих

$$[\sigma_{11}, 4\pi u_2, 4\pi u_3, \varphi, 4\pi u_1, \sigma_{12}, \sigma_{13}, b_1]^{TP}, \qquad (9)$$

які входять в сукупність рівнянь (2), (6), (8). Після досить громіздких цілеспрямованих перетворень рівнянь (2), (6), (8) одержимо таку систему восьми рівнянь:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\\p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\widehat{Q}_{11}&\widehat{Q}_{12}&\widehat{Q}_{13}&0\\0&0&0&0&\widehat{Q}_{21}&\widehat{Q}_{22}&0&0\\0&\widehat{R}_{32}&\widehat{R}_{33}&\widehat{R}_{34}&\widehat{Q}_{31}&0&\widehat{Q}_{33}&\widehat{Q}_{34}\\0&\widehat{R}_{42}&\widehat{R}_{43}&\widehat{R}_{44}&0&0&\widehat{Q}_{43}&\widehat{Q}_{44}\\-\widehat{P}_{11}&-\widehat{P}_{12}&-\widehat{P}_{13}&0&0&0&0&0\\-\widehat{P}_{21}&-\widehat{P}_{22}&-\widehat{P}_{23}&-\widehat{P}_{24}&0&0&-\widehat{R}_{32}&-\widehat{R}_{42}\\-\widehat{P}_{31}&-\widehat{P}_{32}&-\widehat{P}_{33}&-\widehat{P}_{34}&0&0&-\widehat{R}_{33}&-\widehat{R}_{43}\\0&-\widehat{P}_{42}&-\widehat{P}_{43}&-\widehat{P}_{44}&0&0&-\widehat{R}_{34}&-\widehat{R}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\\p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Ненульові операторні елементи симетричних операторних матриць **P**, **Q** та операторної матриці **R** мають такі значення:

$$\begin{aligned}
&\widehat{Q}_{11}=-\frac{\rho\omega^2}{4\pi}, \qquad \widehat{Q}_{12}=-\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \widehat{Q}_{13}=-\frac{\partial}{\partial x_3},\\
&\widehat{Q}_{22}=\frac{1}{4\pi c_{55}}, \qquad \widehat{Q}_{33}=\frac{4\pi\mu}{\Delta_1}, \qquad \widehat{Q}_{34}=\frac{4\pi\beta_{51}}{\Delta_1}, \qquad \widehat{Q}_{44}=-\frac{c_{55*}}{\Delta_1},\\
&-\widehat{P}_{11}=\frac{4\pi}{c_{11}}, \qquad -\widehat{P}_{12}=-\frac{c_{12}}{c_{11}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad -\widehat{P}_{13}=-\frac{c_{12}}{c_{11}}\frac{\partial}{\partial x_3},\\
&-\widehat{P}_{22}=-\frac{1}{4\pi}\left[\rho\omega^2+\left(c_{11}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right],\\
&-\widehat{P}_{23}=-\frac{1}{4\pi}\left[\alpha_{11}-\left(c_{12}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}, \qquad -\widehat{P}_{24}=\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3},\\
&-\widehat{P}_{33}=\frac{1}{4\pi}\left[\rho\omega^2-\alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\left(c_{11}-\frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right], \qquad -\widehat{P}_{34}=\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\\
&\widehat{R}_{33}=-ir_{11}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \widehat{R}_{34}=-ir_{21}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \widehat{R}_{42}=-ir_{12}\frac{\partial}{\partial x_3},\\
&\widehat{R}_{43}=-ir_{12}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \widehat{R}_{44}=-ir_{22}\frac{\partial}{\partial x_2}.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Тут використані позначення

$$\begin{aligned}
&r_{11}r_{00}=-\mu c_{54*}-4\pi\beta_{51}\beta_{52}, \qquad r_{21}r_{00}=-4\pi\alpha\beta_{51}-4\pi\mu\beta_{52},\\
&r_{12}r_{00}=\beta_{52}c_{55*}-\beta_{51}c_{54*}, \qquad r_{22}r_{00}=\alpha c_{55*}-4\pi\beta_{51}\beta_{52},\\
&r_{00}=\mu c_{55*}+4\pi\beta_{51}^2, \qquad -\alpha_{11}=c_{55*}+c_{54*}r_{11}+4\pi\beta_{52}r_{12},\\
&-\alpha_{12}=\beta_{51}+\beta_{52}r_{11}+\alpha r_{12}, \qquad -\alpha_{22}=-\mu+\beta_{52}r_{21}+\alpha r_{22}.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Систему (10) можна записати у вигляді операторної гамільтонової системи

$$\frac{dq_i}{dx_1}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx_1}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (13)$$

при такому значенні операторної функції Гамільтона:

$$H = \frac{1}{2}\widehat{P}_{ik}q_iq_k + \widehat{R}_{ik}p_iq_k + \frac{1}{2}\widehat{Q}_{ik}p_ip_k. \tag{14}$$

Елементи операторних матриць $\widehat{\mathbf{P}}$, $\widehat{\mathbf{Q}}$, $\widehat{\mathbf{R}}$ в (14) і (13) розглядаються як сталі величини і тільки після обчислення частинних похідних в (13) їх треба розглядати як диференціальні оператори, що діють на канонічні змінні q_i, p_i.

Таким чином, в результаті описаних перетворень система тринадцяти рівнянь (2), (6), (8) звелась до восьми рівнянь (10) або (13) відносно функцій (9). Таке зображення особливо буде доцільним при розв'язанні крайових задач з межами $\alpha_1 = \mathrm{const}$, оскільки функції (9) при досконалому механічному і електромагнітному контактах при $\alpha_1 = \mathrm{const}$ будуть неперервними функціями на цих межах.

У випадку антиплоскої задачі для хвиль зсуву рівняння лінеаризованої магнітострикції феритів з дисипативним феромагнітним резонансом розглядалися в роботах [4, 5] і були перетворені до операторної гамільтонової системи.

Робота виконана при частковій фінансовій підтримці в рамках "Комплексного інтеграційного проекту СВ РАН та НАН України".

1. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. – Москва: Мир, 1975. – 453 с.
2. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
3. *Шульга М. О.* Про поширення поперечних хвиль в магнітопружних періодичних середовищах // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 60–63.
4. *Шульга М. О.* До теорії магнітопружних хвиль в періодичних середовищах // Там же. – № 8. – С. 55–59.
5. *Шульга М.* Застосування гамільтонового формалізму в теорії поширення магнітов'язкопружних хвиль зсуву в неоднорідно-періодичних середовищах // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 217–224.
6. *Шульга М. О.* Про визначальні співвідношення лінеаризованої магнітострикції феритів // Доп. НАН України. – 2006. – № 8. – С. 67–71.
7. *Shul'ga N. A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No 7. – P. 763–796.
8. *Shul'ga N. A.* Propagation of coupled waves in layered-periodic continua for interaction with an electromagnetic field // Ibid. – No 10. – P. 1146–1172.
9. *Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Ratushnyak T. V.* Surface magnetoelastic shear waves in periodic-dielectric regularly stratified structures // Ibid. – No 11. – P. 1305–1309.
10. *Shul'ga N. A., Ratushnyak T. V.* Oscillation modes of magnetoelastic Lave-type waves in periodic-dielectric media // Ibid. – 2004. – **40**, No 8. – P. 886–892.
11. *Shul'ga N. A., Ratushnyak T. V.* Spatial shapes of magnetoelastic shear body waves at the transmission edges in a periodically inhomogeneous magnetostrictive medium // Ibid. – 2006. – **42**, No 3. – P. 300–307.
12. *Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Ratushnyak T. V.* Propagation of magnetoelastic shear waves across layers in a periodically layered medium // Ibid. – 2006. – **42**, No 6. – P. 655–660.
13. *Shul'ga N. A., Ratushnyak T. V.* On shapes of body waves in periodically inhomogeneous, magnetostrictive, dielectric materials // Ibid. – No 7. – P. 775–781.
14. *Shul'ga N. A.* Effective magnetoelastic properties of laminated composites // Ibid. – No 8. – P. 879–885.
15. *Shul'ga N. A., Ratushnyak T. V.* Volume magnetoelastic shear waves in periodically inhomogeneous media // Ibid. – No 10. – P. 1090–1101.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 21.12.2006