УДК 539.3

В. А. Меньшиков

Уравнения метода граничных элементов в динамической пространственной задаче о трещине на поверхности раздела упругих сред

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

The paper is devoted to the boundary integral equations of elasticity theory for an interface crack between two elastic half-spaces under harmonic loading. The direct boundary elements method was used to derive a system of linear algebraic equations.

Практика численного решения динамических задач теории упругости и механики разрушения для однородных тел с трещинами [1–3] показала эффективность метода граничных элементов. Есть все основания полагать, что он может успешно использоваться в аналогичных задачах для неоднородных тел. Граничные интегральные уравнения динамической задачи о трещине на поверхности раздела полупространств с разными механическими характеристиками и входящие в них сингулярные ядра получены в работах [4, 5].

Настоящая работа посвящена сведению граничных интегральных уравнений задачи теории упругости для трещины на поверхности раздела упругих полупространств в условиях гармонического нагружения к системе линейных алгебраических уравнений на основе прямого метода граничных элементов.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечное упругое тело в трехмерном пространстве, состоящее из двух однородных изотропных тел с упругими характеристиками λ^1, μ^1 и λ^2, μ^2 и с плотностями ρ^1 и ρ^2. Регулярные границы подобластей состоят из конечных участков Γ^1 и Γ^2, представляющих собой поверхности берегов трещины-расслоения, и общего бесконечного участка границы Γ^*, на котором разнородные тела имеют плотное сцепление. Фронт трещины неподвижен и представляет собой замкнутую гладкую кривую на поверхности раздела сред. Положим, что составное тело с трещиной подвержено гармоническому нагружению извне. Будем рассматривать напряженно-деформированное состояние каждого из тел в рамках линейной динамической теории упругости. Воспользовавшись принципом суперпозиции, перейдем к задаче с распределенным нагружением противоположных берегов трещины и непрерывностью перемещений и напряжений на общей поверхности.

Построение уравнений метода граничных элементов. Система граничных интегральных уравнений, позволяющая определить поля перемещений и напряжений для составного тела с трещиной на поверхности раздела полупространств при динамическом внешнем воздействии, представлена в [4]. Принимая во внимание, что действующая на составное тело нагрузка является гармонической, запишем уравнения этой системы относительно комплексных амплитуд перемещений и усилий:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g_j^1(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Gamma^1} g_i^1(\mathbf{x})K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int\limits_{\Gamma^1} u_i^1(\mathbf{x})F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - \\
&\qquad - \int\limits_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x})K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x})F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}\in\Gamma^1, \\
&\frac{1}{2}g_j^2(\mathbf{y}) - \int\limits_{\Gamma^2} g_i^2(\mathbf{x})K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int\limits_{\Gamma^2} u_i^2(\mathbf{x})F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + \\
&\qquad + \int\limits_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x})K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x})F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}\in\Gamma^2, \\
&\int\limits_{\Gamma^1} g_i^1(\mathbf{x})K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma^2} g_i^2(\mathbf{x})K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\Gamma^1} u_i^1(\mathbf{x})F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - \\
&\qquad - \int\limits_{\Gamma^2} u_i^2(\mathbf{x})F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x})[K_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) + K_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]\mathrm{d}\mathbf{x} - \\
&\qquad - \int\limits_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x})[F_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) + F_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}\in\Gamma^*, \\
&\int\limits_{\Gamma^1} g_i^1(\mathbf{x})U_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma^2} g_i^2(\mathbf{x})U_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\Gamma^1} u_i^1(\mathbf{x})W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - \\
&\qquad - \int\limits_{\Gamma^2} u_i^2(\mathbf{x})W_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma^*} p_i^*(\mathbf{x})[U_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) + U_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]\mathrm{d}\mathbf{x} - \\
&\qquad - \int\limits_{\Gamma^*} u_i^*(\mathbf{x})[W_{ij}^1(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) + W_{ij}^2(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}\in\Gamma^*,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $g_i(\mathbf{x})$, $p_i(\mathbf{x})$, $u_i(\mathbf{x})$ — компоненты комплексных амплитуд заданных усилий, неизвестных усилий и перемещений, соответственно; $U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$, $W_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$, $K_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$, $F_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$ — компоненты фундаментальных решений теории упругости при гармоническом нагружении из [5]; $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — точки наблюдения и нагружения; верхние индексы 1, 2, $*$ соответствуют полупространствам и участкам границ; нижние индексы $i,j = 1,2,3$.

Представим физические параметры задачи через их комплексные амплитуды

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{p}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\{p(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)\}, \\
&\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\{u(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)\},
\end{aligned}
$$

где i — мнимая единица; $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота; t — время.

Поскольку правые части последних соотношений переписываются как

$$
\begin{aligned}
&p(\mathbf{x})\exp(-i\omega t) = [p_{\mathrm{Re}}(\mathbf{x}) + ip_{\mathrm{Im}}(\mathbf{x})] \times [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)] = \\
&\qquad = p_{\mathrm{Re}}(\mathbf{x})\cos(\omega t) + p_{\mathrm{Im}}(\mathbf{x})\sin(\omega t) + i[p_{\mathrm{Im}}(\mathbf{x})\cos(\omega t) - p_{\mathrm{Re}}(\mathbf{x})\sin(\omega t)],
\end{aligned}
$$

то связь между комплексными амплитудами и физическими параметрами представляется как

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(\mathbf{x},t)&=p_{\mathrm{Re}}(\mathbf{x})\cos(\omega t)+p_{\mathrm{Im}}(\mathbf{x})\sin(\omega t),\\ \mathbf{u}(\mathbf{x},t)&=u_{\mathrm{Re}}(\mathbf{x})\cos(\omega t)+u_{\mathrm{Im}}(\mathbf{x})\sin(\omega t).\end{aligned}\tag{2}$$

Так как в уравнения (1) входят комплекснозначные переменные, запишем их в явной комплексной форме. Тогда, выделив в (1) действительные и мнимые части, получим систему граничных интегральных уравнений относительно составляющих комплексных амплитуд перемещений и усилий при косинусах и синусах в разложениях (2).

Будем искать численное решение преобразованной таким образом системы уравнений (1) на основе прямого метода граничных элементов. Для этого аппроксимируем поверхности трещины и поверхность сцепления плоскими многоугольниками — граничными элементами:

$$\Gamma^1=\bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^1}}\Gamma_l,\qquad \Gamma^2=\bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^2}}\Gamma_l,\qquad \Gamma^*=\bigcup_{l=1}^{N^{\Gamma^*}}\Gamma_l,\qquad \Gamma_i\bigcap\Gamma_j=\varnothing,\qquad i\neq j,$$

где N^{Γ^1}, N^{Γ^2}, N^{Γ^*} — количество граничных элементов на противоположных поверхностях трещины и на поверхности сцепления, соответственно.

Воспользуемся методом коллокаций с постоянной аппроксимацией параметров задачи на каждом граничном элементе. Тогда приведенную выше систему уравнений можно записать в матричной форме

$$\mathbf{B}=\mathbf{AZ}.\tag{3}$$

Здесь $\mathbf{B}$ — вектор заданных нагрузок имеет вид

$$\mathbf{B}=\{\mathbf{B}^1_{\mathrm{Re},1},\mathbf{B}^1_{\mathrm{Im},1},\ldots,\mathbf{B}^1_{\mathrm{Re},3},\mathbf{B}^1_{\mathrm{Im},3},\mathbf{B}^2_{\mathrm{Re},1},\mathbf{B}^2_{\mathrm{Im},1},\ldots,\mathbf{B}^2_{\mathrm{Re},3},\mathbf{B}^2_{\mathrm{Im},3},$$
$$\mathbf{B}^3_{\mathrm{Re},1},\mathbf{B}^3_{\mathrm{Im},1},\ldots,\mathbf{B}^3_{\mathrm{Re},3},\mathbf{B}^3_{\mathrm{Im},3},\mathbf{B}^4_{\mathrm{Re},1},\mathbf{B}^4_{\mathrm{Im},1},\ldots,\mathbf{B}^4_{\mathrm{Re},3},\mathbf{B}^4_{\mathrm{Im},3}\}^{\top},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^1_{\mathrm{Re},j}&=\{b^1_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^1_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^1}})\}, &\quad \mathbf{B}^1_{\mathrm{Im},j}&=\{b^1_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^1_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^1}})\},\\
\mathbf{B}^2_{\mathrm{Re},j}&=\{b^2_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^2_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^2}})\}, &\quad \mathbf{B}^2_{\mathrm{Im},j}&=\{b^2_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^2_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^2}})\},\\
\mathbf{B}^3_{\mathrm{Re},i}&=\{b^3_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^3_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^*}})\}, &\quad \mathbf{B}^3_{\mathrm{Im},i}&=\{b^3_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^3_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^*}})\},\\
\mathbf{B}^4_{\mathrm{Re},j}&=\{b^4_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^4_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^*}})\}, &\quad \mathbf{B}^4_{\mathrm{Im},j}&=\{b^4_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^1),\ldots,b^4_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}^{N^{\Gamma^*}})\},
\end{aligned}$$

в свою очередь

$$b^1_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y})=\frac{1}{2}g^1_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y})-\sum_{l=1}^{N^{\Gamma^1}}\left\{g^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}-g^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^1_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}g^1_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}) - \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 1}}\left\{g^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + g^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^2_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}g^2_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}) - \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 2}}\left\{g^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - g^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^2_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}g^2_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}) - \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 2}}\left\{g^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + g^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^3_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 1}}\left\{g^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - g^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\} -$$

$$- \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 2}}\left\{g^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - g^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^3_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 1}}\left\{g^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + g^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}K^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\} -$$

$$- \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 2}}\left\{g^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + g^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}K^2_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^4_{\mathrm{Re},j}(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 1}}\left\{g^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}U^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - g^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}U^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\} -$$

$$- \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 2}}\left\{g^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}U^2_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} - g^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}U^2_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$$b^4_{\mathrm{Im},j}(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 1}}\left\{g^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}U^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + g^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^1_l}U^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\} -$$

$$- \sum_{l=1}^{N^{\Gamma 2}}\left\{g^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}U^2_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} + g^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^l)\int\limits_{\Gamma^2_l}U^2_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x}\right\},$$

$\mathbf{Z}$ — вектор неизвестных действительных и мнимых составляющих комплексных амплитуд перемещений и усилий, представляется как

$$\mathbf{Z} = \big\{\mathbf{Z}^1_{\mathrm{Re},1}, \mathbf{Z}^1_{\mathrm{Im},1}, \ldots, \mathbf{Z}^1_{\mathrm{Re},3}, \mathbf{Z}^1_{\mathrm{Im},3}, \mathbf{Z}^2_{\mathrm{Re},1}, \mathbf{Z}^2_{\mathrm{Im},1}, \ldots, \mathbf{Z}^2_{\mathrm{Re},3}, \mathbf{Z}^2_{\mathrm{Im},3},$$
$$\mathbf{Z}^3_{\mathrm{Re},1}, \mathbf{Z}^3_{\mathrm{Im},1}, \ldots, \mathbf{Z}^3_{\mathrm{Re},3}, \mathbf{Z}^3_{\mathrm{Im},3}, \mathbf{Z}^4_{\mathrm{Re},1}, \mathbf{Z}^4_{\mathrm{Im},1}, \ldots, \mathbf{Z}^4_{\mathrm{Re},3}, \mathbf{Z}^4_{\mathrm{Im},3}\big\}^\top,$$

где

$$\mathbf{Z}^1_{\mathrm{Re},i} = \{u^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, u^1_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^1}})\}, \qquad \mathbf{Z}^1_{\mathrm{Im},i} = \{u^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, u^1_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^1}})\},$$
$$\mathbf{Z}^2_{\mathrm{Re},i} = \{u^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, u^2_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^2}})\}, \qquad \mathbf{Z}^2_{\mathrm{Im},i} = \{u^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, u^2_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^2}})\},$$
$$\mathbf{Z}^3_{\mathrm{Re},i} = \{u^*{}_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, u^*{}_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^*}})\}, \qquad \mathbf{Z}^3_{\mathrm{Im},i} = \{u^*{}_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, u^*{}_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^*}})\},$$
$$\mathbf{Z}^4_{\mathrm{Re},i} = \{p^*{}_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, p^*{}_{\mathrm{Re},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^*}})\}, \qquad \mathbf{Z}^4_{\mathrm{Im},i} = \{p^*{}_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^1), \ldots, p^*{}_{\mathrm{Im},i}(\mathbf{x}^{N^{\Gamma^*}})\}.$$

Матрицу из (3) запишем в блочном виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

в свою очередь,

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1_{\Gamma^1} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}^2_{\Gamma^2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^1_{\Gamma^*} & -\mathbf{K}^1_{\Gamma^*} \\ \mathbf{F}^2_{\Gamma^*} & \mathbf{K}^2_{\Gamma^*} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^1_{\Gamma^1} & \mathbf{F}^2_{\Gamma^2} \\ \mathbf{W}^1_{\Gamma^1} & -\mathbf{W}^2_{\Gamma^2} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{12}_{\Gamma^*} & \mathbf{K}^{12}_{\Gamma^*} \\ -\mathbf{W}^{12}_{\Gamma^*} & -\mathbf{U}^{12}_{\Gamma^*} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

В [5] получены соотношения для фундаментальных решений теории упругости при условии, что поверхность раздела является плоскостью, и показано, что часть их компонент в рассматриваемом случае будут нулевыми, а именно:

$$\begin{aligned}
&U_{13}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = U_{23}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = U_{31}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = U_{32}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = 0,\\
&F_{13}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = F_{23}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = F_{31}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = F_{32}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = 0,\\
&W_{11}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = W_{12}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = W_{21}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = W_{22}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = W_{33}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = 0,\\
&K_{11}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = K_{12}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = K_{21}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = K_{22}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = K_{33}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда элементы матриц (5) и (6) представим следующим образом:

$$\mathbf{F}^1_{\Gamma^1} = \begin{bmatrix}
-\mathbf{F11}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & \mathbf{F11}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F21}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & \mathbf{F21}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & 0 & 0 \\
-\mathbf{F11}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F11}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & -\mathbf{F21}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F21}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & 0 & 0 \\
-\mathbf{F12}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & \mathbf{F12}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F22}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & \mathbf{F22}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & 0 & 0 \\
-\mathbf{F12}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F12}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & -\mathbf{F22}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F22}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{F33}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & \mathbf{F33}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{F33}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & -\mathbf{F33}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1}
\end{bmatrix}, \tag{7}$$

выражения для $\mathbf{F}^2_{\Gamma^2}$, $\mathbf{F}^1_{\Gamma^*}$, $\mathbf{F}^2_{\Gamma^*}$, $\mathbf{F}^{12}_{\Gamma^*}$, $\mathbf{U}^{12}_{\Gamma^*}$ имеют аналогичную структуру и получаются из (7) заменой соответствующих индексов и ядер;

$$\mathbf{W}^1_{\Gamma^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{W31}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & -\mathbf{W31}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{W31}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & \mathbf{W31}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{W32}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & -\mathbf{W32}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{W32}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & \mathbf{W32}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} \\ \mathbf{W13}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & -\mathbf{W13}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & \mathbf{W23}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & -\mathbf{W23}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & 0 & 0 \\ \mathbf{W13}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & \mathbf{W13}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & \mathbf{W23}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} & \mathbf{W23}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

выражения для $\mathbf{W}^2_{\Gamma^2}$, $\mathbf{K}^1_{\Gamma^*}$, $\mathbf{K}^2_{\Gamma^*}$, $\mathbf{W}^{12}_{\Gamma^*}$, $\mathbf{K}^{12}_{\Gamma^*}$ имеют ту же структуру, что и (8), они получаются заменой соответствующих ядер и индексов.

В свою очередь элементы матрицы (7) представляются как:

$$\begin{gathered} \mathbf{Fij}^1_{\mathrm{Re},\Gamma^1} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\Gamma^1_1} F^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^1,\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} & \dots & \int\limits_{\Gamma^1_{N^{\Gamma_1}}} F^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^1,\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_{\Gamma^1_1} F^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^{N^{\Gamma_1}},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} & \dots & \int\limits_{\Gamma^1_{N^{\Gamma_1}}} F^1_{\mathrm{Re},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^{N^{\Gamma_1}},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Fij}^1_{\mathrm{Im},\Gamma^1} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\Gamma^1_1} F^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^1,\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} & \dots & \int\limits_{\Gamma^1_{N^{\Gamma_1}}} F^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^1,\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int\limits_{\Gamma^1_1} F^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^{N^{\Gamma_1}},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} & \dots & \int\limits_{\Gamma^1_{N^{\Gamma_1}}} F^1_{\mathrm{Im},ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}^{N^{\Gamma_1}},\omega)\mathrm{d}\mathbf{x} \end{bmatrix}. \end{gathered} \quad (9)$$

Идентичный этому вид будут иметь все элементы блоков, составляющих матрицы (5) и (6), что следует вследствие использования метода граничных элементов. При вычислении элементов блоков матриц из (5) потребуется в соотношениях (9) замена компонент ядер $F^m_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$ на $W^m_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$ и $K^m_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$ и интегрирование на соответствующих поверхностях. Для нахождения элементов блоков матриц из (6) необходимо в (9) произвести замену на суммы компонент ядер $[F^1_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)+F^2_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]$, $[U^1_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)+U^2_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]$, $[K^1_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)+K^2_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]$, $[W^1_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)+W^2_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)]$ с интегрированием по соответствующим поверхностям.

Таким образом, анализ вида матрицы системы (3) с учетом (4)–(8) показывает, что она не содержит нулевых членов на главной диагонали, и, следовательно, система линейных алгебраических уравнений может быть решена прямым или итерационным методом в зависимости от размера и плотности матрицы.

1. *Гузь А. Н., Зозуля В. В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках: Неклассические проблемы механики разрушения. В 4 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 4, кн. 2. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с.

2. *Guz A. N., Zozulya V. V., Menshikov A. V.* General spatial dynamic problem for an elliptic crack under the action of a normal shear wave, with consideration for the contact interaction of the crack faces // Intern. Appl. Mechanics. – 2004. – **40**, No 2. – P. 156–159.
3. *Menshikov A. V., Menshikova M. V., Wendland W. L.* On the use of the Galerkin method to solve the fracture mechanics problem for a linear crack under normal loading // Ibid. – 2005. – **41**, No 11. – P. 1324–1329.
4. *Меньшиков В. А., Меньшиков А. В.* Гранично-контактные интегральные уравнения динамической задачи теории упругости о трещине на поверхности раздела полупространств // Доп. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 51–56.
5. *Меньшиков В. А.* Сингулярные ядра интегральных уравнений в задаче о трещине на границе раздела полупространств при гармоническом нагружении // Там же. – № 11. – С. 58–62.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.03.2007

УДК 532.546

В. Л. Поляков

Кризис сопротивления в несвязных средах при внутренней суффозии, обусловленной действием линейных источников (дрен-увлажнителей)

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Я. Олейником)

Based on an axisymmetric model of hydrodynamic deformations, the theoretical study of the abrupt initial fall in resistance to a groundwater flow from the solid component of a porous medium (resistance crisis) due to the internal piping caused by a linear source is performed. The effect of model parameters on the source intensity is analyzed for two typical natural media (mineral and organic suffosive soils).

Регулирование водного режима особенно эффективно в несвязных пористых средах благодаря их обычно высокой проницаемости. На практике оно осуществляется путем чередования циклов осушения и увлажнения. При этом на дренах, как основном управляющем средстве, напор периодически резко меняется. Естественные несвязные среды (грунты) обычно содержат относительно большое количество мелких неструктурных (суффозионных) частиц [1]. В реальных условиях подъем (снижение) напора на дрене способен значительно интенсифицировать фильтрационный процесс по крайней мере вблизи нее. Вследствие ускорения течения поровой воды гидродинамическая сила в этой части фильтрационного потока ощутимо возрастает и при превышении ею некоторого порового значения суффозионные частицы здесь мобилизуются [3]. При работе дрены в качестве увлажнителя указанные частицы оттесняются от нее и сосредоточиваются в узкой зоне. Важно, что эта аккумулирующая зона локализована около водоисточника, где имеют место как раз основные потери напора. Ее внешняя граница остается неподвижной, а положение последней определяется расходом источника [4]. Вместе с тем внутренняя граница, отделяющая аккумулирующую зону от