1. *Ульм С. Ю., Поль В. В.* О построении обобщенных разделенных разностей // Изв. АН ЭССР. – 1969. – **18**, № 1. – С. 100–102.
2. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Approx. Theory. – 1971. – **4**. – P. 419–432.
3. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 2. – С. 5–12.
4. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
5. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic systems // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 3. – С. 534–537.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования / Ин-т математики НАН Украины. – Киев, 1998. – 278 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.
9. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф., Михальчук Б. Р.* Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 779–790.
10. *Micchelli C. A.* A constructive approach to Kergin interpolation in $\Re^k$ // Rocky Mountain J. Math. – 1980. – **10**. – P. 485–497.
11. *Micchelli C. A., Milman P.* A formula for Kergin interpolation in $\Re^n$ // J. Approxim. Theory. – 1980. – **29**. – P. 294–296.
12. *Andersson M., Passare M.* Complex Kergin Interpolation // Ibid. – 1991. – **64**. – P. 214–225.
13. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // Ibid. – 2004. – **127**. – P. 108–123.
14. *Kergin P.* A natural interpolation of C^k function // Ibid. – 1980. – **29**. – P. 278–293.

Інститут математики НАН України, Київ
Національний університет "Львівська політехніка"
Надійшло до редакції 31.01.2007

УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Операция порождения корневых функционалов и корневые полиномы

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

For a system of $(n-1)$ polynomials in n variables, we consider the connection of the operation of generation for the root functionals with root polynomials.

Здесь мы будем использовать определения, обозначения и соглашения, данные в [1–3].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*, положим* $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$*. Пусть функционалы* $L_1(x_*)$ *и* $L_2(x_*)$ *аннулируют* $(f(x))_x$*.*

Положим $L(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*)$*, заметим, что* $L(x_*) = L_2(x_*) \overset{+}{*} L_1(x_*)$*. Тогда:*

1) функционал $L(x_*)$ *аннулирует* $(f(x))_x$*;*

2) если функционал $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_1(x))_x$, где $h_1(x) \in \mathbf{R}[x]$, то имеет место

$$L(x_*) \cdot h_1(x) = L_2(x_*) \cdot (L_1(y_*).\det \|\nabla f(x,y) \quad \nabla h_1(x,y)\|);$$

3) если функционал $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_2(x))_x$, где $h_2(x) \in \mathbf{R}[x]$, то имеет место

$$L(x_*) \cdot h_2(x) = L_1(x_*) \cdot (L_2(y_*).\det \|\nabla f(x,y) \quad \nabla h_2(x,y)\|).$$

Доказательство. В силу *1* теоремы 4 из [3] область значений разности отображений $T_x^+(x,y) - T_x^+(y,x)$ лежит в $(f(x), f(y))_{x,y}$; $L_1(x_*).L_2(y_*).(f(x), f(y))_{x,y} = \{0\}$, поскольку $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$, $L_2(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$. Тогда имеет место

$$L_2(x_*) \overset{+}{*} L_1(x_*) = L_2(x_*).L_1(y_*).T_x^+(x,y) =$$

$$= L_2(x_*).L_1(y_*).T_x^+(y,x) = L_1(x_*).L_2(y_*).T_x^+(x,y) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*) = L(x_*).$$

Доказательство 1. $L(x_*) = L_1(x_*).L_2(y_*).T_x(x,y) + L_2(x_*) \cdot (L_1(y_*).\Omega(y,x))$, где $\Omega(x,y)$ — коммутаторный полином для $(\nabla f, \nabla)$. Второе слагаемое аннулирует $(f(x))_x$, так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$; первое слагаемое аннулирует $(f(x))_x$ в силу *1* теоремы 3 из [3], так как $L_1(x_*)$ и $L_2(x_*)$ аннулируют $(f(x))_x$. Следовательно, $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$.

Доказательство 3. Пусть $g(x) \in \mathbf{R}[x]$, применяя *4* теоремы 1 из [3] во втором равенстве к $T_{x'}(x,y).h_2(x') \cdot g(x')$ имеем

$$(L_1(x_*).L_2(y_*).T_{x'}(x,y)) \cdot h_2(x').g(x') = L_1(x_*).L_2(y_*).(T_{x'}(x,y).h_2(x') \cdot g(x')) =$$

$$= L_1(x_*).L_2(y_*).((T_{x'}(x,y).h_2(x')) \cdot g(x) + h_2(y) \cdot (T_{x'}(x,y).g(x'))) =$$

$$= L_1(x_*) \cdot (L_2(y_*).T_{x'}(x,y).h_2(x')).g(x) + 0_*.$$

Третье равенство имеет место, так как $L_2(y_*) \cdot h_2(y) = 0_*$. Следовательно, в силу произвольности $g(x) \in \mathbf{R}[x]$ имеет место $(L_1(x_*).L_2(y_*).T_x(x,y)) \cdot h_2(x) = L_1(x_*) \cdot (L_2(y_*).T_{x'}(x,y).h_2(x'))$. Далее, $(L_2(x_*) \cdot (L_1(y_*).\Omega(y,x))) \cdot h_2(x) = 0$, так как $L_2(x_*) \cdot h_2(x) = 0_*$. Тогда $L(x_*) \cdot h_2(x) = (L_1(x_*).L_2(y_*).T_x(x,y) + L_2(x_*) \cdot (L_1(y_*).\Omega(y,x))) \cdot h_2(x) = L_1(x_*) \cdot (L_2(y_*).T_{x'}(x,y).h_2(x'))$.

Доказательство 2. С учетом того, что $L(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*) = L_2(x_*) \overset{+}{*} L_1(x_*)$ из *3* теоремы следует *2* теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $z \simeq y \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$.*

Пусть $h_p(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_p}$, функционал $L_p(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_p(x))_x$ и аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle_p - 1}$, где $\triangle_p \geqslant 0$, положим $H_p(x) = L_p(y_*).\det \|\nabla f(x,y) \quad \nabla h_p(x,y)\|$, здесь $p = 1, 2$.

Положим $L(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*)$, $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$. Тогда:

1) $L(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x$;

2) $L(y_*).\det \|\nabla f(x,y) \quad \nabla h(x,y)\| - (H_1(x) \cdot H_2(x) + h(x) \cdot \Gamma(x)) \in (f(x))_x^{\leqslant 2\delta_f + d_1 + d_2 - \triangle_1 - \triangle_2}$, где $\Gamma(x) = -L_1(y_*).L_2(z_*).W(x,y,z)$, $W(x,y,z) \in \mathbf{R}[x,y,z]^{\leqslant 2\delta_f}$;

если $\triangle_1 \geqslant \delta_f + 1$ и $\triangle_2 \geqslant \delta_f + 1$, то $\Gamma(x) = 0$.

Доказательство 1. $L(x_*) \cdot h(x) = L(x_*) \cdot (h_1(x) \cdot h_2(x)) = (L(x_*) \cdot h_2(x)) \cdot h_1(x) = L_1(x_*) \cdot (L_2(y_*).T_{x'}(x,y).h_2(x')) \cdot h_1(x) = 0_*$; третье равенство имеет место в силу *3* теоремы 1, так как $L_2(x)$ аннулирует $(f(x), h_2(x))_x$, $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$; четвертое равенство имеет место, так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_1(x))_x$. В силу *1* теоремы 1 функционал $L(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$. Следовательно, $L(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x$.

Доказательство 2. В силу третьего равенства *1* теоремы 5 из [3]

$$T^{+}_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x') = T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z) - W(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x) - \mathbf{1}_{x''}(z)) + Q_{x''}(x,y,z),$$

где $W(x,y,z) \in \mathbf{R}[x,y,z]^{\leqslant 2\delta_f}$, отображение $Q_{x''}(x,y,z) \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x''],\mathbf{R}[x,y,z])$ такое, что имеет место $Q_{x''}(x,y,z).\mathbf{R}[x'']^{\leqslant d} \subseteq (f(x),f(y),f(z))^{\leqslant 2\delta_f+d}_{x,y,z}$ для любого $d \in \mathbb{Z}$. Тогда $L_1(y_*).L_2(z_*).T^{+}_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x').h_1(x'')\cdot h_2(x'')$ равно сумме $V_1(x)+V_2(x)+V_3(x)$, где

$$\begin{aligned}V_2(x) &= -L_1(y_*).L_2(z_*).(W(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x)-\mathbf{1}_{x''}(z))).h_1(x'')\cdot h_2(x'') =\\ &= -L_1(y_*).L_2(z_*).W(x,y,z)\cdot h_1(x)\cdot h_2(x) + L_1(y_*).L_2(z_*).W(x,y,z)\cdot h_1(z)\cdot h_2(z) =\\ &= -h(x)\cdot(L_1(y_*).L_2(z_*).W(x,y,z)) + 0\end{aligned}$$

(второе слагаемое в третьей части равенства нулевое, так как $L_2(z_*)\cdot h_2(z) = 0_*$);

$$V_3(x) = L_1(y_*).L_2(z_*).Q_{x''}(x,y,z).h_1(x'')\cdot h_2(x'') \in (f(x))_x^{\leqslant 2\delta_f+d_1+d_2-\triangle_1-\triangle_2};$$

$$\begin{aligned}V_1(x) &= L_1(y_*).L_2(z_*).T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z).h_1(x'')\cdot h_2(x'') =\\ &= L_1(y_*).L_2(z_*).T_{x'}(x,y).(T_{x''}(x',z).h_1(x''))\cdot h_2(z) +\\ &\qquad + L_1(y_*).L_2(z_*).T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot(T_{x''}(x',z).h_2(x'')) + S_1(x) =\\ &= 0 + L_1(y_*).L_2(z_*).(T_{x'}(x,y).h_1(x'))\cdot(T_{x''}(x,z).h_2(x'')) +\\ &\qquad + L_1(y_*).L_2(z_*).h_1(y)\cdot(T_{x'}(x,y).(T_{x''}(x',z).h_2(x''))) + S_2(x) + S_1(x) =\\ &= (L_1(y_*).T_{x'}(x,y).h_1(x'))\cdot(L_2(z_*).T_{x''}(x,z).h_2(x'')) + 0 + S_1(x) + S_2(x) =\\ &= H_1(x)\cdot H_2(x) + S_1(x) + S_2(x)\end{aligned}$$

(во второй части равенства для $T_{x''}(x',z)$ применяется *4* теоремы 1 из [3]; первое слагаемое в третьей части равенства нулевое, так как $L_2(z_*)\cdot h_2(z) = 0_*$; во втором слагаемом в третьей части равенства для $T_{x'}(x,y)$ применяется *4* теоремы 1 из [3]; третье слагаемое в четвертой части равенства нулевое, так как $L_1(y_*)\cdot h_1(y) = 0_*$);

$$S_1(x) = L_1(y_*).L_2(z_*).T_{x'}(x,y).U_1(x',z), \qquad U_1(x',z) \in (f(x'),f(z))^{\leqslant \delta_f+d_1+d_2}_{x',z},$$

$$S_2(x) = L_1(y_*).L_2(z_*).U_2(x,y,z), \qquad U_2(x,y,z) \in (f(x),f(y))^{\leqslant 2\delta_f+d_1+d_2}_{x,y,z}.$$

В силу *1* и *3* теоремы 1 из [3] $T_{x'}(x,y).U_1(x',z) \in (f(x),f(y),f(z))^{\leqslant 2\delta_f+d_1+d_2}_{x,y,z}$, тогда $S_1(x)$ и $S_2(x) \in (f(x))_x^{\leqslant 2\delta_f+d_1+d_2-\triangle_1-\triangle_2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}L(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla h(x,y)\| &= L(x'_*).\det\|\nabla f(x,x') \quad \nabla h(x,x')\| =\\ &= L_1(y_*).L_2(z_*).T^{+}_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x').h(x'') =\\ &= H_1(x)\cdot H_2(x) - h(x)\cdot(L_1(y_*).L_2(z_*).W(x,y,z)) + (S_1(x)+S_2(x)+V_3(x)),\end{aligned}$$

и $S_1(x)+S_2(x)+V_3(x) \in (f(x))_x^{\leqslant 2\delta_f+d_1+d_2-\triangle_1-\triangle_2}$.

Теорема 3. *Пусть имеют место условия и обозначения теоремы 2. Пусть разность* $L_p(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla h_p(x,y)\| - H'_p(x) - h_p(x)\cdot g^p(x) \in (f(x))_x$, *где* $H'_p(x)$, $g^p(x) \in \mathbf{R}[x]$, *для* $p = 1,2$. *Положим* $L'(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*) - L_1(x_*)\cdot g^2(x) - L_2(x_*)\cdot g^1(x)$. *Тогда:*

1) $L'(x_*)$ *аннулирует* $(f(x), h(x))_x$*;*

2) $L'(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla h(x,y)\| - H_1'(x)\cdot H_2'(x) - h(x)\cdot\Gamma'(x) \in (f(x))_x$*, где* $\Gamma'(x) = -L_1(y_*).L_2(z_*).W(x,y,z) + L_1(y_*).T_{x'}(x,y).g^2(x') + L_2(y_*).T_{x'}(x,y).g^1(x') - g^1(x)\cdot g^2(x)$*;*

3) $L'(x_*)\cdot h_1(x) = L_2(x_*)\cdot H_1'(x)$*,* $L'(x_*)\cdot h_2(x) = L_1(x_*)\cdot H_2'(x)$*.*

Доказательство 1. В силу *1* теоремы 1 $L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x$; $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_1(x))_x \supseteq (f(x), h(x))_x$, также $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_2(x))_x \supseteq (f(x), h(x))_x$; следовательно, $L'(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*) - L_1(x_*)\cdot g^2(x) - L_2(x_*)\cdot g^1(x)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x$. Здесь $h(x) = h_1(x)\cdot h_2(x)$.

Доказательство 2. Под $a(x) \equiv b(x)$ будем понимать $a(x) - b(x) \in (f(x))_x$. Имеет место

$$
\begin{aligned}
&L_1(y_*)\cdot g^2(y).T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') = L_1(y_*).g^2(y)\cdot T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') \equiv\\
&\qquad \equiv L_1(y_*).g^2(x)\cdot T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') -\\
&\qquad\qquad - L_1(y_*).(h_1(x)\cdot h_2(x) - h_1(y)\cdot h_2(y))\cdot T_{x'}(x,y).g^2(x') \equiv\\
&\qquad \equiv L_1(y_*).g^2(x)\cdot (T_{x'}(x,y).h_1(x'))\cdot h_2(x) + L_1(y_*).g^2(x)\cdot h_1(y)\cdot (T_{x'}(x,y).h_2(x')) -\\
&\qquad\qquad - (h_1(x)\cdot h_2(x))\cdot (L_1(y_*).T_{x'}(x,y).g^2(x')) =\\
&\qquad = (L_1(y_*).T_{x'}(x,y).h_1(x'))\cdot (h_2(x)\cdot g^2(x)) + 0_* - h(x)\cdot (L_1(y_*).T_{x'}(x,y).g^2(x')) =\\
&\qquad = H_1(x)\cdot (h_2(x)\cdot g^2(x)) - h(x)\cdot (L_1(y_*).T_{x'}(x,y).g^2(x'));\\
&L_2(y_*)\cdot g^1(y).T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') \equiv\\
&\qquad \equiv (h_1(x)\cdot g^1(x))\cdot H_2(x) - h(x)\cdot (L_2(y_*).T_{x'}(x,y).g^1(x'));\\
&L(y_*).T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') \equiv H_1(x)\cdot H_2(x) + h(x)\cdot\Gamma(x).
\end{aligned}
$$

Докажем первое равенство. Во второй части равенства применяется *5* теоремы 1 из [3]: $(g^2(x) - g^2(y))\cdot (T_{x'}(x,y).h(x')) = (h(x) - h(y))\cdot (T_{x'}(x,y).g^2(x')) \in (f(x), f(y))_{x,y}$; в третьей части равенства в первом слагаемом применяется *4* теоремы 1 из [3]: $T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') - (T_{x'}(x,y).h_1(x'))\cdot h_2(x) - h_1(y)\cdot (T_{x'}(x,y).h_2(x')) \in (f(x), f(y))_{x,y}$; в обоих случаях используется то, что $L_1(y_*).(f(x), f(y))_{x,y} \subseteq (f(x))_x$, которое имеет место, так как $L_1(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$. Второе слагаемое третьей части равенства равно третьему слагаемому четвертой части равенства и второе слагаемое четвертой части равенства равно 0_*, поскольку $L_1(y_*)\cdot h_1(y) = 0_*$. Второе равенство доказывается аналогично первому равенству. Третье равенство есть *2* теоремы 2. Тогда

$$
\begin{aligned}
&L'(y_*).T_{x'}(x,y).h(x) = (L(y_*) - L_1(y_*)\cdot g^2(y) - L_2(y_*)\cdot g^1(y)).T_{x'}(x,y).h_1(x')\cdot h_2(x') \equiv\\
&\qquad \equiv (H_1(x)\cdot H_2(x) + h(x)\cdot\Gamma(x)) -\\
&\qquad\qquad - (H_1(x)\cdot (h_2(x)\cdot g^2(x)) - h(x)\cdot (L_1(y_*).T_{x'}(x,y).g^2(x'))) -\\
&\qquad\qquad - ((h_1(x)\cdot g^1(x))\cdot H_2(x) - h(x)\cdot (L_2(y_*).T_{x'}(x,y).g^1(x'))) =\\
&\qquad = (H_1(x) - h_1(x)\cdot g^1(x))\cdot (H_2(x) - h_2(x)\cdot g^2(x)) + h(x)\cdot\Gamma'(x) =\\
&\qquad = H_1'(x)\cdot H_2'(x) + h(x)\cdot\Gamma'(x),
\end{aligned}
$$

где $\Gamma'(x) = \Gamma(x) + L_1(y_*).T_{x'}(x,y).g^2(x') + L_2(y_*).T_{x'}(x,y).g^1(x') - g^1(x)\cdot g^2(x)$.

Доказательство 3. Имеет место

$$\begin{aligned}L'(x_*)\cdot h_1(x) &= (L(x_*) - L_1(x_*)\cdot g^2(x) - L_2(x_*)\cdot g^1(x))\cdot h_1(x) =\\ &= L(x_*)\cdot h_1(x) - L_1(x_*)\cdot h_1(x)\cdot g^2(x) - L_2(x_*)\cdot h_1(x)\cdot g^1(x) =\\ &= L_2(x_*)\cdot H_1(x) - 0_* - L_2(x_*)\cdot h_1(x)\cdot g^1(x) = L_2(x_*)\cdot (H_1(x) - h_1(x)\cdot g^1(x)) =\\ &= L_2(x_*)\cdot H_1'(x).\end{aligned}$$

Во второй части равенства $L(x_*)\cdot h_1(x) = L_2(x_*)\cdot (L_1(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla h_1(x,y)\|) = = L_2(x_*)\cdot H_1(x)$ в силу *3* теоремы 1, поскольку $L_1(x)$ аннулирует $(f(x), h_1(x))_x$, $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$. Кроме того, во второй части равенства второе слагаемое равно 0_*, поскольку $L_1(x_*)\cdot h_1(x) = 0_*$. Аналогично доказывается, что $L'(x_*)\cdot h_2(x) = L_2(x_*)\cdot H_2'(x)$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1,\ldots,x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))$*,* $F(x)$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*,* $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\deg(f_i) - n$*. Пусть функционал* $\lambda(x_*)$ *аннулирует* $(f(x), F(x))_x$ *и*

$$\lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y)\| - F(x)\cdot G(x) \in (f(x))_x,$$

пусть функционал $l(x_*)$ *аннулирует* $(f(x))_x$*.*

Пусть $\Lambda(x_*) = l(x_*) \overset{+}{*} \lambda(x_*) - l(x_*)\cdot G(x)$*. Тогда:*

1) $\Lambda(x_*)$ *аннулирует* $(f(x), F(x))_x$*;*

2) $\Lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y)\| - F(x)\cdot\Gamma(x) \in (f(x))_x$*, где*

$$\Gamma(x) = -l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z) + l(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla G(x,y)\|,$$

$$W(x,y,z) \in \mathbf{R}[x,y,z]^{\leqslant 2\delta_f}.$$

Доказательство 1. $(l(x_*) \overset{+}{*} \lambda(x_*))\cdot F(x) = l(x_*)\cdot(\lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y)\|) = = l(x_*)\cdot F(x)\cdot G(x) = (l(x_*)\cdot G(x))\cdot F(x)$; первое равенство имеет место в силу *3* теоремы 1, поскольку $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$, $\lambda(x_*)$ аннулирует $(f(x), F(x))_x$; второе равенство имеет место, так как $\lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y)\| - F(x)\cdot G(x) \in (f(x))_x$ и $l(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$. Следовательно, $\Lambda(x_*)\cdot F(x) = (l(x_*) \overset{+}{*} \lambda(x_*) - l(x_*)\cdot G(x))\cdot F(x) = 0_*$. В силу *1* теоремы 1 $l(x_*) \overset{+}{*} \lambda(x_*)$ аннулирирует $(f(x))_x$; и так как $l(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$, то функционал $\Lambda(x_*) = l(x_*) \overset{+}{*} \lambda(x_*) - l(x_*)\cdot G(x)$ аннулирует $(f(x))_x$. Таким образом, $\Lambda(x_*)$ аннулирует $(f(x), F(x))_x$.

Доказательство 2. Используя третье равенство *1* теоремы 5 из [3] имеем

$$\begin{aligned}l(y_*).\lambda(z_*).T^{+}_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x').F(x'') &= l(y_*).\lambda(z_*).T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z).F(x'') -\\ &- l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z)\cdot(\mathbf{1}_{x''}(x) - \mathbf{1}_{x''}(z)).F(x'') + l(y_*).\lambda(z_*).Q_{x''}(x,y,z).F(x''),\end{aligned}$$

где $W(x,y,z) \in \mathbf{R}[x,y,z]^{\leqslant 2\delta_f}$, отображение $Q_{x''}(x,y,z) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x''], \mathbf{R}[x,y,z])$ такое, что $Q_{x''}(x,y,z).\mathbf{R}[x'']^{\leqslant d} \subseteq (f(x), f(y), f(z))^{\leqslant 2\delta_f + d}_{x,y,z}$ для любого $d \in \mathbb{Z}$. Положим

$$C(x) = l(y_*).\lambda(z_*).Q_{x''}(x,y,z).F(x''),$$

тогда $C(x) \in (f(x))_x$, так как $l(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$ и $\lambda(z_*)$ аннулирует $(f(z))_z$. Второе слагаемое равно

$$-l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z) \cdot F(x) + l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z) \cdot F(z) =$$
$$= -F(x) \cdot (l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z)),$$

здесь $l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z) \cdot F(z) = 0$, так как $\lambda(z_*) \cdot F(z) = 0_*$. Далее,

$$l(y_*).\lambda(z_*).T_{x'}(x,y).T_{x''}(x',z).F(x'') = l(y_*).T_{x'}(x,y).(\lambda(z_*).T_{x''}(x',z).F(x'')) =$$
$$= l(y_*).T_{x'}(x,y).(F(x') \cdot G(x') + A(x')) =$$
$$= l(y_*).(T_{x'}(x,y).F(x')) \cdot G(y) + l(y_*).F(x) \cdot (T_{x'}(x,y).G(x')) + l(y_*).U(x,y) + B(x) =$$
$$= l(x'_*) \cdot G(x').T_{x''}(x,x').F(x'') + F(x) \cdot (l(y_*).T_{x'}(x,y).G(x')) + (S(x) + B(x)).$$

Второе равенство имеет место, так как $\lambda(z_*).T_{x''}(x',z).F(x'') = F(x') \cdot G(x') + A(x')$, где $A(x') \in (f(x'))_{x'}$. В третьем равенстве положим $B(x) = l(y_*).T_{x'}(x,y).A(x')$, тогда в силу *1* теоремы 2 из [3] $B(x) \in (f(x))_x$, так как $l(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x$. Также в третьем равенстве к $T_{x'}(x,y).(F(x') \cdot G(x'))$ применяется *4* теоремы 1 из [3], при этом $U(x,y) \in (f(x), f(y))_{x,y}$. Положим $S(x) = l(y_*).U(x,y)$, тогда $S(x) \in (f(x))_x$, так как $l(y_*)$ аннулирует $(f(y))_y$. Таким образом,

$$\Lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y) \quad \nabla F(x,y)\| = \Lambda(x'_*).\det\|\nabla f(x,x') \quad \nabla F(x,x')\| =$$
$$= (l(y_*).\lambda(z_*).T^+_{x'}(y,z) - l(x'_*) \cdot G(x')).T_{x''}(x,x').F(x'') =$$
$$= l(y_*).\lambda(z_*).T^+_{x'}(y,z).T_{x''}(x,x').F(x'') - l(x'_*) \cdot G(x').T_{x''}(x,x').F(x'') =$$
$$= F(x) \cdot (l(y_*).T_{x'}(x,y).G(x')) - F(x) \cdot (l(y_*).\lambda(z_*).W(x,y,z)) +$$
$$+ (S(x) + B(x) + C(x)) = F(x) \cdot \Gamma(x) + (S(x) + B(x) + C(x)),$$

и $(S(x) + B(x) + C(x)) \in (f(x))_x$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum_{i=1}^{n} \deg(f_i) - n$. *Пусть функционал* $\lambda(x_*)$ *аннулирует* $(f(x))_x$ *и* $\lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\| \in (f(x))_x$, *такой функционал* ***назовем*** *вырожденным корневым функционалом. Тогда:*

1) для любого $H(x) \in \mathbf{R}[x]$ *функционал* $\Lambda(x_*) = \lambda(x_*) \cdot H(x)$ *аннулирует* $(f(x))_x$ *и* $\Lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\| \in (f(x))_x$;

2) если $\mathbf{R}[x]/(f(x))_x$ *является конечно порожденным как модуль над* $\mathbf{R}$, *то* $\lambda(x_*) = 0_*$.

Доказательство 1. В силу первого свойства 2) из [1, с. 6] разность полиномов

$$\lambda(y_*) \cdot H(y).\det\|\nabla f(x,y)\| - H(x) \cdot (\lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\|) \in (f(x))_x.$$

Поскольку имеет место $\lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\| \in (f(x))_x$, то

$$\Lambda(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\| = \lambda(y_*) \cdot H(y).\det\|\nabla f(x,y)\| \in (f(x))_x.$$

Доказательство 2. В силу следствия из [1, с. 8] если $\mathbf{R}[x]/(f(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$, то существует единичный корневой функционал. В силу свойства 5) из [1, с. 6] если существует единичный корневой функционал, то любой функционал $L(x_*)$, аннулирующий $(f(x))_x$ и такой, что $L(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\| \in (f(x))_x$, равен нулю. Следовательно, $\lambda(x_*) = 0_*$.

Замечание 1 (к теореме 5). $\mathbf{R}$ является алгебраически замкнутым полем. В этом случае условие $\mathbf{R}[x]/(f(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$ эквивалентно условию 0-мерности многообразия корней. Тогда *2* теоремы 5 означает, что в случае 0-мерного многообразия корней нет ненулевых вырожденных корневых функционалов.

1. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 5–8.
2. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там же. – 2002. – № 7. – С. 35–42.
3. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы на 1-мерном многообразии // Там же. – 2007. – № 7. – С. 18–23.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.02.2007

УДК 517.5

Член-кореспондент НАН України **О. І. Степанець, А. Л. Шидліч**

Про один критерій для опуклих функцій

We obtain some new facts for the convex downwards functions vanishing at infinity.

У роботі встановлено низку нових фактів для опуклих донизу функцій, які зникають на нескінченності. Інтерес до таких функцій в останні десятиліття обумовлений введенням поняття узагальнених похідних і вивченням апроксимативних властивостей класів періодичних функцій, що визначаються на їх основі (див., напр., [1, 2]). Властивості таких функцій досліджувались у роботах [1, гл. III; 2, гл. III; 3; 4] та ін. Зокрема, в [1] було запропоновано класифікувати опуклі донизу функції таким чином.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина всіх додатних при $t \geqslant 1$ опуклих донизу спадних до нуля функцій:

$$\mathfrak{M} = \left\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0,\, \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \geqslant 0,\, \forall t_1, t_2 \in [1,\infty),\, \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\right\}.$$

Нехай, далі, $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначають функцію, яка пов'язана із ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \qquad t \geqslant 1. \tag{1}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, $\eta(t)$ при всіх $t \geqslant 1$ визначається однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right). \tag{2}$$