УДК 517.988

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків**

Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$

In the space of piecewise continuous functions, the Hermite formula with continual knots is constructed on the basis of a Newton-type formula with the use of multiple knots. In this case, the directions of differentiations in interpolation formulas can be arbitrary.

Побудові та дослідженню інтерполяційних поліномів в абстрактних лінійних просторах присвячено ряд робіт [1–12], серед яких операторні інтерполяційні формули типу Ньютона посідають помітне місце. Тут слід відзначити таких авторів, як С. Ю. Ульм, В. В. Полль, П. І. Соболевський, Л. О. Янович [1–4]. У подальшому цими питаннями займалися P. Kergin [14], а за ним C. A. Michelli, P. Milman, M. Andersson, M. Passare, L. Filipsson [10–13] та інші дослідники так званої "Kergin interpolation". З точки зору пріоритету відзначимо, що інтерполянт Кергіна з точністю до заміни змінних інтегрування фігурував ще у статті С. Ю. Ульма, В. В. Полля [1] у 1969 р. У той час як робота P. Kergin [14] з'явилась тільки у 1980 р.

Автори даної роботи запропонували свій підхід щодо побудови інтерполянтів типу Ньютона [6, 9], які відрізняються від цитованих попередніх тим, що мають водночас дві властивості: 1 — інтерполяційні вузли є континуальними, тобто залежать від неперервних параметрів; 2 — інваріантність інтерполяційних формул щодо поліномів відповідного степеня. Перша властивість забезпечується завдяки знайденому правилу підстановки [9], виконання якого для даного функціонала є достатньою умовою континуальності інтерполяційних вузлів у $Q[0,1]$ — просторі кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ зі скінченою кількістю точок розриву першого роду.

Відмітимо в цьому зв'язку ще раз роботи [1–3, 10–12], у яких для побудови операторних інтерполянтів використовується континуальна інформація, за якою будуються відповідні інтеграли в інтерполяційних формулах, але відсутня континуальність інтерполяційних вузлів, що само по собі є неприродним, хоча інтерполянти зберігають поліноми відповідного степеня.

У даній роботі пропонується конструювати функціональні поліноми типу Ерміта на основі інтерполяційних формул Ньютона, використовуючи кратність вузлів за допомогою граничного переходу. При цьому дві вищезазначені властивості інтерполянтів будуть зберігатися.

Постановка задачі. У роботі [9] для функціонала F, визначеного на просторі $Q[0,1]$, побудовано інтерполяційний поліном типу Ньютона n-го степеня $P_n^N(x)$, $x \in Q[0,1]$ з інтерполяційними умовами

$$P_n^N(\overline{x}_n(\cdot,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)) = F(\overline{x}_n(\cdot,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)), \tag{1}$$

де континуальна множина вузлів

$$\overline{x}_n(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} H(t-\xi_i)(x_i(t)-x_{i-1}(t)) \tag{2}$$

для будь-яких ξ_i з області $\Omega_{\vec{\xi}_n} = \{(\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_n) \colon 0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \dots \leqslant \xi_n \leqslant 1\}$, $x_i(t) \in \in Q[0,1]$, $H(t)$ — функція Хевісайда. Зауважимо, що функції $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ належать континуальній множині (2) при відповідному виборі параметрів $\xi_i \colon \overline{x}_n(t) = x_k(t)$, якщо

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_k = 0, \qquad \xi_{k+1} = \xi_{k+2} = \dots = \xi_n = 1.$$

Введемо позначення

$$D_z^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial z_1 \partial z_2 \cdots \partial z_n}. \tag{3}$$

Побудований в [9] поліном n-го степеня вигляду

$$P_n^N(x(\cdot)) = K_0^N + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega_{\vec{\xi}_i}} K_i^N(z_1, z_2, \dots, z_i) \prod_{j=1}^{i} (x(z_j) - x_{j-1}(z_j)) d\vec{z}_i, \qquad z_0 = 0, \tag{4}$$

де

$$K_i^N(z_1, z_2, \dots, z_i) = (-1)^i \prod_{j=1}^{i} (x_j(z_j) - x_{j-1}(z_j))^{-1} D_z^{(j)} F(\overline{x}_j(\cdot, z_1, z_2, \dots, z_j)), \tag{5}$$

є поліномом Ньютона на континуальній множині вузлів (2) у припущенні, що:

а) частинні похідні в правій частині (5) існують як неперервні функції за кожною змінною окремо з $\Omega_{\vec{z}_i}$, $x_j(t) - x_{j-1}(t) \neq 0$;

б) існують інтеграли в (4);

в) виконується правило підстановки [9].

Цей інтерполянт єдиний та інваріантний у класі функціональних поліномів вигляду [9]

$$P_n(x(\cdot)) = K_0 + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 K_i(z_1, z_2, \dots, z_i) \prod_{j=1}^{i} x(z_j) d\vec{z}_i. \tag{6}$$

Надалі поставимо таку задачу: на підставі інтерполяційної формули типу Ньютона (4), (5) побудувати інтерполянт з двократними вузлами та довести, що побудований поліном буде інтерполянтом типу Ерміта, тобто в континуальних вузлах він набуває заданих континуальних значень та в кожному вузлі має перші похідні Гато за відповідними напрямками.

3. Розв'язок задачі. Сформульовану вище задачу розв'язуватимемо таким чином. Розглянемо інтерполянт (4), (5) непарного степеня $2n+1$, послідовність функцій $x_0(t)$, $x_1(t)$, $\dots$, $x_{2n+1}(t)$ та подамо її у вигляді

$$x_1(t) = x_0(t) + \alpha_1 v_1(t), \quad x_3(t) = x_2(t) + \alpha_2 v_2(t), \quad \dots, \quad x_{2n+1}(t) = x_{2n}(t) + \alpha_{n+1} v_{n+1}(t), \tag{7}$$

де $\alpha_i \in R$, $v_i(t) \in Q[0,1]$.

Підставимо вирази (7) у формули (4), (5) у випадку непарного степеня $2n+1$ та перейдемо в них до границі, коли $\alpha_i \to 0$. У припущенні, що існують відповідні похідні Гато, інтеграли, виконується правило підстановки [9], проводячи певні обчислення та перетворення, одержуємо граничний поліном $P_{2n+1}^E(x(\cdot))$ вигляду

$$P_{2n+1}^E(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k q_k^E(x(\cdot)), \tag{8}$$

де

$$q^E_{2k}(x(\cdot)) = \int\limits_{\Omega_{\vec{z}_{2k}}} D^{(2k)}_z F^{(k+1)}(x_0(\cdot) + (x_2(\cdot) - x_0(\cdot))H(\cdot - z_2) + (x_4(\cdot) - x_2(\cdot)) \times$$

$$\times H(\cdot - z_4) + \cdots + (x_{2k}(\cdot) - x_{2k-2}(\cdot))H(\cdot - z_{2k}))v_1(\cdot)H(\cdot - z_1)v_2(\cdot)H(\cdot - z_3)\cdots$$

$$\cdots v_k(\cdot)H(\cdot - z_{2k-1}) \prod_{j=1}^{k} \frac{x(z_{2j-1}) - x_{2j-2}(z_{2j-1})}{v(z_{2j-1})} \frac{x(z_{2j}) - x_{2j-2}(z_{2j})}{x_{2j}(z_{2j}) - x_{2j-2}(z_{2j})} d\vec{z}_{2k}, \qquad (9)$$

$$q^E_{2k+1}(x(\cdot)) = \int\limits_{\Omega_{\vec{z}_{2k+1}}} D^{(2k+1)}_z F^{(k+1)}(x_0(\cdot) + (x_2(\cdot) - x_0(\cdot))H(\cdot - z_2) +$$

$$+ (x_4(\cdot) - x_2(\cdot))H(\cdot - z_4) + \cdots + (x_{2k}(\cdot) - x_{2k-2}(\cdot))H(\cdot - z_{2k})) \times$$

$$\times v_1(\cdot)H(\cdot - z_1)v_2(\cdot)H(\cdot - z_3)\cdots v_{k+1}(\cdot)H(\cdot - z_{2k+1}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{k} \frac{x(z_{2j-1}) - x_{2j-2}(z_{2j-1})}{v(z_{2j-1})} \frac{x(z_{2j}) - x_{2j-2}(z_{2j})}{x_{2j}(z_{2j}) - x_{2j-2}(z_{2j})} \frac{x(z_{2k+1}) - x(z_{2k+1})}{v(z_{2k+1})} d\vec{z}_{2k+1}. \qquad (10)$$

Записавши залишковий член для полінома Ньютона [9] степеня $2n+1$, подаючи $x_1(t)$, $x_3(t)$, …, $x_{2n+1}(t)$ у вигляді (7) та переходячи до границі, коли $\alpha_i \to 0$, отримуємо залишковий член формули (8) у вигляді

$$R^E_{2n+1}(x(\cdot)) = \int\limits_{\Omega_{\vec{z}_{2n+2}}} D^{(2n+2)}_z F^{(n+1)}(x_0(\cdot) + (x_2(\cdot) - x_0(\cdot))H(\cdot - z_2) + (x_4(\cdot) - x_2(\cdot)) \times$$

$$\times H(\cdot - z_4) + \cdots + (x(\cdot) - x_{2n}(\cdot))H(\cdot - z_{2n+2})) \times$$

$$\times v_1(\cdot)H(\cdot - z_1)v_2(\cdot)H(\cdot - z_3)\cdots v_{n+1}(\cdot)H(\cdot - z_{2n+1}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \frac{x(z_{2j-1}) - x_{2j-2}(z_{2j-1})}{v(z_{2j-1})} \frac{x(z_{2j}) - x_{2j-2}(z_{2j})}{x_{2j}(z_{2j}) - x_{2j-2}(z_{2j})} \frac{x(z_{2n+1}) - x(z_{2n+1})}{v(z_{2n+1})} d\vec{z}_{2n+2}. \qquad (11)$$

У роботі [9] доведено, що при виконанні правила підстановки та відповідній гладкості функціонала $F(x(\cdot))$ останній можна подати у вигляді суми інтерполянта типу Ньютона та його залишкового члена, тобто

$$F(x(\cdot)) = P^N_{2n+1}(x(\cdot)) + R^N_{2n+1}(x(\cdot)). \qquad (12)$$

Якщо зробити заміну (7) у формулі (12) та перейти до границі, коли $\alpha_i \to 0$, то неважко бачити, що результатом цього граничного переходу буде

$$F(x(\cdot)) = P^E_{2n+1}(x(\cdot)) + R^E_{2n+1}(x(\cdot)), \qquad (13)$$

де інтерполянт $P^E_{2n+1}(x(\cdot))$ визначений формулами (8)–(10), а залишковий член $R^E_{2n+1}(x(\cdot))$ — формулою (11). На підставі зображення функціонала (13) можна зробити такі висновки. По-перше, оскільки інтерполянт типу Ньютона $P^N_{2n+1}(x(\cdot))$ має континуальні інтерполяційні вузли (2), то вузлами інтерполянта типу Ерміта будуть також континуальні вузли

$$\overline{x}_{2n+1}(t,\xi_2,\xi_4,\ldots,\xi_{2n}) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{n}(x_{2k}(t) - x_{2k-2}(t))H(t-\xi_{2k}). \tag{14}$$

По-друге, на підставі вигляду залишкового члена формули Ерміта маємо

$$R^{E'}_{2n+1}(x_k(\cdot))\overline{v}_k(\cdot) = \left[\frac{d}{d\alpha}R^{E}_{2n+1}(x_k(\cdot)+\alpha\overline{v}_k(\cdot))\right]_{\alpha=0} \equiv 0, \tag{15}$$

для всіх таких $\overline{v}_k(t)$ з $Q[0,1]$, для яких існують інтеграли у формулах (9)–(11). Це означає, що $\overline{v}_k(t)$ можуть не збігатися з $v_k(t)$, тобто інтерполянт типу Ерміта не залежить від напрямків диференціювання $v_k(t)$.

Приклад. Розглянемо функціонал вигляду

$$F(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 x(t)dt\right)^3, \qquad x(t) \in Q[0,1]. \tag{16}$$

Побудуємо $P^E_2(x(\cdot))$ з двократним вузлом $x_0(t)$ та однократним $x_2(t)$. Маємо

$$P^E_2(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 x_0(t)dt\right)^3 + 3\left(\int_0^1 x_0(t)dt\right)^2 \int_0^1 (x(z_1)-x_0(z_1))dz_1 +$$

$$+ 6\int_0^1\int_{z_1}^1\left\{\int_0^1 x_0(t)dt + \int_{z_2}^1 (x_2(t)-x_0(t))dt\right\}(x(z_1)-x_0(z_1))(x(z_2)-x_0(z_2))dz_2dz_1.$$

Це інтерполяційний поліном типу Ерміта, що задовольняє континуальні інтерполяційні умови

$$P^E_2(\overline{x}_2(\cdot,\xi_2)) = F(\overline{x}_2(\cdot,\xi_2)),$$

$$P^{E'}_2(\overline{x}_2(\cdot,\xi_2))v(\cdot) = F'(\overline{x}_2(\cdot,\xi_2))v(\cdot).$$

Сформулюємо одержаний вище результат у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується правило підстановки з [9] та існують інтеграли* (9)–(11) *на відповідній підмножині з* $Q[0,1]$. *Тоді інтерполянт типу Ерміта* $P^E_{2n+1}(x(\cdot))$ *задовольняє континуальні інтерполяційні умови*

$$P^E_{2n+1}(\overline{x}_{2n+1}(\cdot,\xi_2,\xi_4,\ldots,\xi_{2n})) = F(\overline{x}_{2n+1}(\cdot,\xi_2,\xi_4,\ldots,\xi_{2n})), \tag{17}$$

$$P^{E'}_{2n+1}(\overline{x}_{2n+1}(\cdot,\xi_2,\xi_4,\ldots,\xi_{2n}))v_1(\cdot)\cdots v_n(\cdot) =$$

$$= F'(\overline{x}_{2n+1}(\cdot,\xi_2,\xi_4,\ldots,\xi_{2n}))v_1(\cdot)\cdots v_n(\cdot), \tag{18}$$

та не залежить від напрямків диференціювання.

Зауваження 1. У роботі [9] було показано, що інтерполянт типу Ньютона, побудований на континуальній множині вузлів $\overline{x}_n(t,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, єдиний та має властивість збереження поліномів відповідного степеня. Оскільки формула Ерміта отримана з формули Ньютона граничним переходом, то на континуальній множині вузлів (14) інтерполянт типу Ерміта $P^E_{2n+1}(x(\cdot))$ також єдиний та інваріантний щодо поліномів того ж самого степеня вигляду (6).

1. *Ульм С. Ю., Поль В. В.* О построении обобщенных разделенных разностей // Изв. АН ЭССР. – 1969. – **18**, № 1. – С. 100–102.
2. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Approx. Theory. – 1971. – **4**. – P. 419–432.
3. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 2. – С. 5–12.
4. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
5. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic systems // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 3. – С. 534–537.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования / Ин-т математики НАН Украины. – Киев, 1998. – 278 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.
9. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф., Михальчук Б. Р.* Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 779–790.
10. *Micchelli C. A.* A constructive approach to Kergin interpolation in $\Re^k$ // Rocky Mountain J. Math. – 1980. – **10**. – P. 485–497.
11. *Micchelli C. A., Milman P.* A formula for Kergin interpolation in $\Re^n$ // J. Approxim. Theory. – 1980. – **29**. – P. 294–296.
12. *Andersson M., Passare M.* Complex Kergin Interpolation // Ibid. – 1991. – **64**. – P. 214–225.
13. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // Ibid. – 2004. – **127**. – P. 108–123.
14. *Kergin P.* A natural interpolation of C^k function // Ibid. – 1980. – **29**. – P. 278–293.

Інститут математики НАН України, Київ
Національний університет "Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 31.01.2007

УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Операция порождения корневых функционалов и корневые полиномы

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

For a system of $(n-1)$ polynomials in n variables, we consider the connection of the operation of generation for the root functionals with root polynomials.

Здесь мы будем использовать определения, обозначения и соглашения, данные в [1–3].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $y \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*, положим* $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \deg(f_i) - n$*. Пусть функционалы* $L_1(x_*)$ *и* $L_2(x_*)$ *аннулируют* $(f(x))_x$*.*

Положим $L(x_*) = L_1(x_*) \overset{+}{*} L_2(x_*)$*, заметим, что* $L(x_*) = L_2(x_*) \overset{+}{*} L_1(x_*)$*. Тогда:*

1) функционал $L(x_*)$ *аннулирует* $(f(x))_x$*;*