УДК 517.96



**В. В. Городецький, О. М. Ленюк**

# Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)*

*We consider a new class of evolutionary equations with operators constructed by non-smooth homogeneous symbols. The theory of the Cauchy problem with initial conditions which are generalized functions of the distribution type is developed. The properties of the Fourier–Bessel transformation of basic and generalized functions, convolutions, convolvers, and multiplicators are studied.*

Останні десятиліття інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО), які формально можна подати у вигляді $F^{-1}[aF]$, де $a$ — функція (символ), що задовольняє певні умови, $F$, $F^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Фур'є. Імпульсом для такого розвитку став той факт, що ПДО тісно пов'язані з важливими задачами аналізу і сучасної математичної фізики. Серед нових розділів цієї теорії на особливу увагу заслуговує теорія рівнянь з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язана також із сучасною теорією фракталів.

До псевдодиференціальних рівнянь формально можна віднести і сингулярні еволюційні рівняння з оператором Бесселя ($B$-параболічні рівняння), який вироджується за певною просторовою змінною, а саме рівняння при цьому вироджується на межі області, оскільки оператор Бесселя

$$B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}, \qquad \nu > -\frac{1}{2},$$

можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu \varphi = -F_B^{-1}[\xi^2 F_B[\varphi]]$, де $F_B$ — перетворення Фур'є–Бесселя, $\varphi$ — елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для сингулярних параболічних рівнянь побудована у працях І. А. Кіпріянова, В. В. Катрахова, М. І. Матійчука, В. В. Крехівського, С. Д. Івасишена, В. П. Лавренчука, І. І. Веренич та ін. (огляд праць, які стосуються цього питання, див. у [1]). Задача Коші для B-параболічних рівнянь у класах розподілів та у класах узагальнених функцій типу $S'$ та типу $W'$ вивчалась Я. І. Житомирським, В. В. Городецьким, І. В. Житарюком, В. П. Лавренчуком, О. В. Мартинюк (див. [2]).

Природним узагальненням B-параболічних рівнянь є еволюційні рівняння з оператором $A = F_B^{-1}[aF_B]$, де $a$ — однорідний символ ($A$ надалі називатимемо псевдобесселевим оператором). Задача Коші для таких рівнянь не вивчена.

У цьому повідомленні розвивається теорія задачі Коші для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0,$$

де $A$ — псевдобесселевий оператор. Одним із основних методів дослідження задачі Коші для вказаного рівняння є метод перетворення Фур'є–Бесселя, тому тут досліджуються властивості такого перетворення у відповідних просторах основних та узагальнених функцій.

**1. Простори основних та узагальнених функцій.** Нехай $x = (x', x_{n+1})$, $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x_{n+1} \in \mathbf{R}_+$, $\Omega_+ = (0, T] \times \mathbf{R}_+^{n+1}$, $T$ — фіксоване додатне число, $\mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$, $k = (k', k_{n+1}) \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$, $k' = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, $|k| = |k'| + k_{n+1}$, $|k'| = k_1 + \ldots + k_n$, $D_x^k = D_{x'}^{k'} D_{x_{n+1}}^{k_{n+1}}$, $D_{x'}^{k'} = D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}$, $\gamma$ — фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, $\gamma_0' = n + [\gamma]$, $\gamma_0 = 1 + [\gamma] + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1 \in \mathbf{N}$, $\nu > 0$, $M(x') = (1 + \|x'\|)$, $\widetilde{M}(x_{n+1}) = (1 + |x_{n+1}|)$.

Символом $\Phi$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, парних за змінною $x_{n+1}$, які задовольняють нерівності

$$|D_x^k \varphi(x)| \equiv \left| \frac{\partial^{|k|} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_{n+1}^{k_{n+1}}} \right| \leqslant \frac{C_k}{M(x')^{\gamma_0' + |k'|} \widetilde{M}(x_{n+1})^{\gamma_0 + k_{n+1}}},$$

$$k \in \mathbf{Z}_+^{n+1}, \qquad x \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

Введемо в $\Phi$ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbf{R}^{n+1}} \left\{ \sum_{m=0}^{p} \sum_{|k|=m} M(x')^{\gamma_0' + |k'|} \widetilde{M}(x_{n+1})^{\gamma_0 + k_{n+1}} |D_x^k \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, \qquad p \in \mathbf{Z}_+.$$

Збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\} \subset \Phi$ у просторі $\Phi$ до функції $\varphi \in \Phi$ можна охарактеризувати так: $\{\varphi_\nu, \nu \geqslant 1\} \subset \Phi$ збігається за топологією простору $\Phi$ до $\varphi \in \Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в $\Phi$, тобто

$$\forall p \in \mathbf{Z}_+ \quad \exists c = c(p) > 0 \quad \forall\, \nu \geqslant 1 \colon \|\varphi_\nu\|_p \leqslant c;$$

2) правильно збігається в $\Phi$, а саме для довільного $k \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$ послідовність $\{D_x^k(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geqslant 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

У просторі $\Phi$ визначена і неперервна операція зсуву аргументу $T_{\xi'}$ за змінними $x_1, \ldots, x_n$, тобто

$$T_{\xi'} \colon \varphi(x) \to \varphi(x' + \xi', x_{n+1}), \qquad \varphi \in \Phi, \qquad \xi' \in \mathbf{R}^n,$$

а також операція $T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}}$ узагальненого зсуву аргументу за змінною $x_{n+1}$:

$$T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}} \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi\Big(x', \sqrt{x_{n+1}^2 + \xi_{n+1}^2 - 2 x_{n+1} \xi_{n+1} \cos\omega}\Big) \sin^{2\nu}\omega \, d\omega,$$

$$b_\nu = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2)}.$$

На елементах простору $\Phi$ визначена також операція перетворення Фур'є–Бесселя, яку надалі позначатимемо символом $F_{D,B}$:

$$F_{D,B}[\varphi](\sigma) := \int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} \varphi(x', x_{n+1}) e^{-i(x', \sigma')} j_\nu(\sigma_{n+1} x_{n+1}) x_{n+1}^{2\nu+1} dx' dx_{n+1}, \qquad \varphi \in \Phi,$$

де $j_\nu$ — нормована функція Бесселя.

Символом $\Psi$ позначимо Фур'є-образ простору $\Phi$: $\Psi = F_{D,B}[\Phi]$. Елементами простору $\Psi$ є нескінченно диференційовні на $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ функції, парні за змінною $x_{n+1}$; функції з простору $\Psi$ задовольняють умову

$$\forall\, k \in \mathbf{Z}_+^{n+1} \quad \exists\, c_k > 0\colon \sup_{\xi \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}} |{\xi'}^{k'} \xi_{n+1}^{2k_{n+1}} D_{\xi'}^{k'} D_{\xi_{n+1}}^{2k_{n+1}} F_{D,B}[\varphi](\xi)| \leqslant c_k, \qquad \varphi \in \Phi;$$

при цьому у функцій $\dfrac{\partial^{k_i} F_{D,B}[\varphi]}{\partial \xi_l^{k_i}}$, $\xi_l \neq 0$, $1 \leqslant l \leqslant n+1$, існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{\xi_l \to +0} \frac{\partial^{k_i} F_{D,B}[\varphi]}{\partial \xi_l^{k_i}}, \qquad \lim_{\xi_l \to -0} \frac{\partial^{k_i} F_{D,B}[\varphi]}{\partial \xi_l^{k_i}}, \qquad \varphi \in \Phi.$$

У зв'язку з цим у просторі $\Psi$ вводиться структура зліченно нормованого простору за допомогою системи норм:

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} |{\xi'}^{k'} \xi_{n+1}^{2k_{n+1}} D_{\xi'}^{k'} D_{\xi_{n+1}}^{2k_{n+1}} \varphi(\xi)| \right\}, \qquad \varphi \in \Psi, \qquad p \in \mathbf{Z}_+.$$

Перетворення $F_{D,B}$ взаємно однозначно і взаємно неперервно відображає $\Phi$ на $\Psi$.

Символом $\Phi'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Дія регулярної узагальненої функції $f$ на основну функцію $\varphi \in \Phi$ у цьому випадку визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_+^{n+1}} f(x) \varphi(x) x_{n+1}^{2\nu+1} dx.$$

Оскільки в просторі $\Phi$ визначена операція зсуву аргументу та операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in \Phi'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{\xi'} T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}} \breve{\varphi}(-x', x_{n+1}) \rangle = \langle f_\xi, T_{x_{n+1}}^{\xi_{n+1}} \varphi(x' - \xi', x_{n+1}) \rangle, \qquad \varphi \in \Phi,$$

де $\breve{\varphi}(x', x_{n+1}) = \varphi(-x', x_{n+1})$, $f_\xi$ позначає дію функціонала $f$ за змінною $\xi$; при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною функцією.

Перетворення Фур'є-Фур'є–Бесселя узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{D,B}[f], \varphi \rangle = \langle f, F_{D,B}^{-1}[\varphi] \rangle, \qquad \forall \varphi \in \Psi.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціонала $f$ та перетворення Фур'є-Фур'є–Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціонала над простором $\overset{o}{\Psi}$.

Отже, перетворення Фур'є-Фур'є–Бесселя узагальненої функції $f \in \Phi'$ є узагальненою функцією над простором $\Psi = F_{D,B}[\Phi]$.

Узагальнена функція $f \in \Phi'$ називається згортувачем у просторі $\Phi$, якщо $f * \varphi \in \Phi$ для довільної функції $\varphi \in \Phi$. Для перетворення Фур'є-Фур'є–Бесселя узагальнених функцій з простору $\Phi'$ правильним є таке твердження.

**Теорема 1.** *Якщо узагальнена функція $f \in \Phi'$ — згортувач у просторі $\Phi$, то для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ справджується формула*

$$F_{D,B}[f * \varphi] = F_{D,B}[f] \cdot F_{D,B}[\varphi].$$

*Якщо узагальнена функція $f \in \Phi'$ — мультиплікатор у просторі $\Phi$, то її перетворення Фур'є-Фур'є–Бесселя — згортувач у просторі $\Psi$.*

**2. Основні результати.** Нехай $a\colon \mathbf{R}^{n+1} \to [0;+\infty)$ — неперервна, парна за змінною $x_{n+1}$ функція, однорідна порядку $\gamma \in (1;+\infty) \setminus \{2,3,4,\ldots\}$ (тобто $a(\lambda\xi) = \lambda^{\gamma} a(\xi)$, $\lambda > 0$), яка:

1) нескінченно диференційовна при $\xi \neq 0$;

2) похідні функції $a$ задовольняють умову

$$\forall\, k \in \mathbf{Z}_{+}^{n+1} \quad \exists\, C_k > 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}\colon |D_{\xi}^{k} a(\xi)| \leqslant C_k \|\xi\|^{\gamma - k};$$

3) $\exists\, \delta > 0\ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^{n+1}\colon a(\xi) \geqslant \delta \|\xi\|^{\gamma}$.

Зазначимо, що функція $a$ є мультиплікатором у просторі $\Psi$. У зв'язку з цим розглянемо оператор $A\colon \Phi \to \Phi$, який визначимо за допомогою співвідношення

$$A\varphi = F_{D,B}^{-1}[a F_{D,B}[\varphi]], \quad \forall\, \varphi \in \Phi.$$

Із властивостей перетворення Фур'є-Фур'є–Бесселя (прямого і оберненого) випливає, що $A$ — лінійний і неперервний оператор у просторі $\Phi$.

Розглянемо тепер рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \qquad (t,x) \in \Omega_{+}, \tag{1}$$

де $A$ — оператор, побудований за символом $a$. Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію $u \in C^1((0,T],\Phi)$, яка задовольняє рівняння (1).

Фундаментальним розв'язком задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1) є функція

$$G(t,x) = F_{D,B}^{-1}[e^{-ta(\xi)}](x) = (2\pi)^{-n} c_{\nu} \int\limits_{\mathbf{R}_{+}^{n+1}} e^{-ta(\xi',\xi_{n+1}) + i(x',\xi')} j_{\nu}(x_{n+1}\xi_{n+1}) \xi_{n+1}^{2\nu+1} d\xi' d\xi_{n+1},$$

де $c_{\nu} = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$. Властивості функції $G$ характеризуються такими твердженнями.

**Теорема 2.** *1. При кожному $t \in (0;T]$ функція $G(t,x)$, як функція аргументу $x$, є елементом простору $\Phi$. Для функції $G$ та її похідних правильними є оцінки:*

$$|D_x^k G(t,x)| \leqslant \alpha_k t^{1+[\gamma]/\gamma} (t^{1/\gamma} + \|x'\|)^{-(|k'|+\gamma_0')} (t^{1/\gamma} + |x_{n+1}|)^{-(k_{n+1}+\gamma_0)},$$

$$t \in (0;T], \qquad x = (x', x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n+1}}, \qquad k \in \mathbf{Z}^{n+1},$$

*стала $\alpha_k$ залежить від $\nu$, $\gamma$ і не залежить від $t$.*

*2. $G(t,\cdot) \to \delta$ при $t \to +0$ у просторі $\Phi'$ ($\delta$ — дельта-функція Дірака).*

*3. Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0;T]$, як абстрактна функція параметра $t$ із значеннями у просторі $\Phi$, диференційовна за $t$.*

Для (1) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \tag{2}$$

де $f \in \Phi'_*$ (символом $\Phi'_*$ позначається сукупність усіх узагальнених функцій з простору $\Phi'$, які є згортувачами у просторі $\Phi$).

**Теорема 3.** *Задача Коші* (1), (2) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій* $\Phi'_*$. *Розв'язок має вигляд*

$$u(t,x) = (f * G)(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_+,$$

*де $G$ — ФРЗК для рівняння* (1).

*Зауваження.* Аналогічні результати мають місце у випадку, коли в рівнянні (1) оператор $A$ будується за символом $a$, який задовольняє умови *1–3*, сформульовані раніше, але функція $a$ є парною за змінними $x_{k+1},\ldots,x_{n+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. При цьому здійснюються відповідні зміни в означенні топологічного простору $\Phi$, в означенні перетворення $F_{D,B}$, у формулюванні відповідних теорем. Наприклад, перетворення $F_{D,B}$ у цьому випадку визначається так:

$$F_{D,B}[\varphi](\sigma) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n+1}_{k,+}} \varphi(x',x'') e^{-i(x',\sigma')} j_{\nu_{k+1}}(\sigma_{k+1}x_{k+1}) \cdots$$
$$\cdots j_{\nu_{n+1}}(\sigma_{n+1}x_{n+1}) x_{k+1}^{2\nu_{k+1}+1} \cdots x_{n+1}^{2\nu_{n+1}+1} dx' dx'',$$

де $x' = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbf{R}^k$, $\sigma' \in \mathbf{R}^k$, $x'' = (x_{k+1},\ldots,x_{n+1})$, $x_{k+1} > 0, \ldots, x_{n+1} > 0$, $\mathbf{R}^{n+1}_{k,+} = \{x = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{k+1} > 0,\ldots,x_{n+1} > 0\}$, $j_{\nu_s}$, $s \in \{k+1,\ldots,n+1\}$ — нормована функція Бесселя $\nu_s$-го порядку, $\nu_s > -1/2$ — фіксовані параметри.

Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T^{\xi''}_{x''}\varphi$ визначається співвідношенням

$$T^{\xi''}_{x''}\varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \varphi\Big(x', \sqrt{x_{k+1}^2 + \xi_{k+1}^2 - 2x_{k+1}\xi_{k+1}\cos\omega_{k+1}}, \ldots$$
$$\ldots, \sqrt{x_{n+1}^2 + \xi_{n+1}^2 - 2x_{n+1}\xi_{n+1}\cos\omega_{n+1}}\Big) \sin^{2\nu_{k+1}}\omega_{k+1} \cdots \sin^{2\nu_{n+1}}\omega_{n+1} d\omega'',$$

де $b_\nu = b_{\nu_{k+1}} \ldots b_{\nu_{n+1}}$, $b_{\nu_s} = \Gamma(\nu_s+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu_s+1/2))$, $\nu_s > -1/2$, $s \in \{k+1,\ldots,n+1\}$.

Вказані операції мають такі ж властивості, що і відповідні операції у просторі $\Phi$.

1. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
2. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

*Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича*

*Надійшло до редакції 12.03.2007*