

УДК 681.51

А.Е. ЛИТВИНЕНКО, О.В. ЗУРЬЯН

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫХ РАБОТ**

Abstract: The criterion functions focusing the decision of a problem on performance of a maximum quantity of exploration works for minimal time are formalized. The system of restrictions reflecting the requirements to technical and financial maintenance of exploration process is formulated. It is proved, that in the resulted mathematical statement the problem concerns to a class of extreme combinatory problems with linear structure that allows to apply a method of the directed enumeration of possibilities to its decision.

Key words: geological survey, the system of restrictions, extreme combinatory problems, a method of the directed enumeration possibilities.

Аноація: Формалізовані цільові функції, які орієнтують рішення задачі на виконання максимальної кількості геологорозвідувальних робіт за мінімальний час. Сформульована система обмежень, які відображають вимоги до технічного і фінансового забезпечення геологорозвідувального процесу. Доведено, що у наведеній математичній постановці задача відноситься до класу екстремальних комбінаторних задач з лінійною структурою, що дозволяє застосувати до її рішення метод спрямованого перебору варіантів.

Ключові слова: геологічна розвідка, система обмежень, екстремальні комбінаторні задачі, метод направленої перебору варіантів.

Аноація: Формализованы целевые функции, ориентирующие решение задачи на выполнение максимального количества геологоразведочных работ за минимальное время. Сформулирована система ограничений, отражающих требования к техническому и финансовому обеспечению геологоразведочного процесса. Доказано, что в приведенной математической постановке задача относится к классу экстремальных комбинаторных задач с линейной структурой, что позволяет применить к ее решению метод направленного перебора вариантов.

Ключевые слова: геологическая разведка, система ограничений, экстремальные комбинаторные задачи, метод направленного перебора вариантов.

1. Введение

Задача планирования геологоразведочных работ (геологических исследований) занимает центральное место в комплексе задач принятия решений, регламентирующих производственный процесс поиска и разведки месторождений полезных ископаемых [1]. Необходимость автоматизации ее решения объясняется тем, что геологоразведочные работы выполняются одновременно на нескольких поисковых площадях и месторождениях, имеют разную продолжительность и требуют различного рода материальных и финансовых ресурсов, наличие которых ограничено, а потребность динамически изменяется. Это, в свою очередь, обуславливает многовариантный характер данной задачи и требует применения для ее решения эффективных математических методов и современных компьютерных технологий.

Целью данной статьи является описание математической модели задачи планирования геологоразведочных работ, которая может быть положена в основу метода выработки оптимальных (по заданным критериям) решений, регламентирующих основную производственную деятельность геологоразведочных предприятий.

2. Постановка задачи

Предполагается, что каждая геологоразведочная работа характеризуется тремя группами параметров:

- а) продолжительностью и допустимым диапазоном времени начала ее выполнения;

б) перечнем типов и количеством оборудования (буровых станков, каротажных станций и пр.) каждого типа, необходимых на каждой ее технологической стадии;

в) объемом требуемых финансовых вложений на каждом ее этапе.

Задача заключается в распределении геологоразведочных работ, запланированных на некоторый плановый период, во времени с учетом существующих ограничений на материальные и финансовые ресурсы и динамически изменяющейся потребности в них. При этом предполагается, что геологоразведочные работы, начатые, но не завершённые до рассматриваемого момента принятия решений, продолжаются до полного их окончания в установленные сроки и обеспечиваются необходимым финансированием и требуемыми материально-техническими ресурсами.

Как видно, задача планирования геологоразведочных работ носит явно выраженный оптимизационный и комбинаторный характер. Ее формализация в рамках дискретного программирования требует разбиения планового периода времени, в течение которого должны быть выполнены рассматриваемые геологоразведочные работы, на некоторое количество равных полуоткрытых интервалов (отрезков), играющих роль условных единиц времени. Их продолжительность должна быть такой, чтобы на один интервал не приходилось более одной операции финансовых вложений или изменения состава используемого технологического оборудования по каждому геологическому исследованию, каждой геологоразведочной работе.

Для построения математической модели необходимо перенумеровать все геологоразведочные работы (геологические исследования), типы оборудования и интервалы времени числами натурального ряда, начиная с единицы. Пусть i – номер геологоразведочной работы, m – их количество (включая начатые, но не завершённые до момента принятия решения), j – номер типа оборудования, l – количество таких типов, k – номер интервала времени, n – количество интервалов, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, n}$.

Исходные данные, необходимые для решения задачи планирования геологоразведочных работ, формально задаются в виде следующего набора величин и множеств, удовлетворяющего требованию минимальности объема вводимой в вычислительную систему информации:

I^0 – множество номеров работ, начатых, но не завершённых до момента принятия решения, $I^0 \subseteq \{1, \dots, m\}$;

I^1 – множество номеров работ, выполнение которых начинается и заканчивается в рассматриваемом плановом периоде, $I^1 = \{1, \dots, m\} \setminus I^0$;

τ_i – продолжительность выполнения i -го геологического исследования, измеряемая в количестве выделенных полуоткрытых интервалов времени, $i = \overline{1, m}$;

K_i^H – множество номеров отрезков времени, в которые может быть начато i -е геологическое исследование, $K_i^H \subseteq \{1, \dots, n\}$, $i \in I^1$;

J_{ik} – множество типов оборудования, необходимого для выполнения i -го геологического исследования на k -м по счету отрезке времени, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, \tau_i}$;

a_{ijk} – количество единиц оборудования j -го типа, необходимых для выполнения i -го геологического исследования на k -м по счету отрезке времени, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, \tau_i}$, $j \in J_{ik}$;

b_{jk} – количество единиц оборудования j -го типа, которые могут эксплуатироваться на k -м отрезке времени (с учетом регламентных работ, технического обслуживания, транспортировки к месту эксплуатации, демонтажа-монтажа, наладки и т.п.), $j = \overline{1, l}$, $k = \overline{1, n}$;

r_{ik} – финансовые затраты на выполнение i -го геологического исследования на k -м по счету отрезке времени, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, \tau_i}$;

K^S – множество отрезков времени, в которые предполагаются финансовые поступления для выполнения запланированных геологоразведочных работ, $K^S \subseteq \{1, \dots, n\}$;

s_k – объем финансовых поступлений на k -м отрезке времени, $k \in K^S$;

s_0 – объем финансовых ресурсов на начало рассматриваемого планового периода времени.

Постановка задачи предусматривает возможность выполнения всех запланированных работ. Поэтому число n должно быть таким, чтобы наиболее поздняя геологоразведочная работа могла быть завершена до окончания планового периода времени:

$$n = \max \{k_i^H \mid i \in I^1\},$$

где k_i^H – номер наиболее позднего отрезка времени, в который может быть начато выполнение i -го геологического исследования; $k_i^H = \max \{k \in K_i^H\}$, $i \in I^1$.

Для построения математической модели задачи планирования геологоразведочных работ на основе приведенных исходных данных последовательно формируются следующие множества:

K_i – множество номеров отрезков времени, в которые может выполняться i -е геологическое исследование:

$$K_i = \bigcup_{k \in K_i^H} \{k, \dots, k + \tau_i - 1\}, \quad i \in I^1;$$

K^0 – множество номеров отрезков времени, в которые будут выполняться геологоразведочные работы, начатые до рассматриваемого планового периода:

$$K^0 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } I^0 = \emptyset; \\ \{1, \dots, \tau_{\max}^0\} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где τ_{\max}^0 – количество отрезков времени, в которые будет выполняться наиболее продолжительная работа, начатая до рассматриваемого планового периода:

$$\tau_{\max}^0 = \max\{\tau_i \mid i \in I^0\};$$

K^1 – множество номеров отрезков времени, в которые могут выполняться геологоразведочные работы, начатые в рассматриваемом плановом периоде:

$$K^1 = \bigcup_{i \in I^1} K_i.$$

План геологоразведочных работ на рассматриваемый период определяется вектором $x = (x_{ik} \mid i = \overline{1, m}; k \in K_i^H)$ значений булевых переменных $x_{ik} \in \{0, 1\}$, компоненты которого несут следующий смысл: если в результате решения задачи оказывается, что $x_{ik} = 1$, это означает, что выполнение i -й работы начинается в k -м интервале времени; при $x_{ik} = 0$ данное утверждение неверно.

3. Критерии оптимальности

Постановка задачи планирования геологоразведочных работ может предусматривать достижение следующих альтернативных целей:

- а) выполнить все работы за минимальное время;
- б) выполнить максимальное количество геологических исследований в течение заданного периода времени;
- в) выполнить определенную часть множества запланированных работ за минимальное время при максимальном количестве работ другой части, которые предполагается выполнить до окончания рассматриваемого периода времени.

В первом случае целевая функция, характеризующая степень оптимальности искомого решения задачи, имеет следующее выражение:

$$f_1(x) = \sum_{i \in I^1} v_i \sum_{k \in K_i^H} (k - k_i^P) x_{ik} \rightarrow \min, \quad (1)$$

где v_i – весовой коэффициент, характеризующий степень важности наискорейшего завершения i -й работы, $v_i > 0$, $i \in I^1$;

k_i^P – номер наиболее раннего отрезка времени, в который может быть начато выполнение i -го геологического исследования, $k_i^P = \min\{k \in K_i^H\}$, $i \in I^1$.

Во втором случае целевая функция приобретает следующий вид:

$$f_2(x) = \sum_{i \in I^1} w_i \sum_{k \in K_i^H} x_{ik} \rightarrow \max, \quad (2)$$

где w_i – весовой коэффициент, характеризующий степень важности выполнения i -го геологического исследования в рассматриваемый плановый период, $w_i > 0$, $i \in I^1$.

Третий вариант предусматривает предварительное выделение на множестве I^1 номеров работ, подлежащих обязательному выполнению в течение рассматриваемого планового периода

(I_1^1), и остальных работ (I_2^1), выполнение которых желательно, но не является непременным условием: $I_1^1 \subseteq I^1$; $I_2^1 = I^1 \setminus I_1^1$.

Очевидно, в этом случае целевая функция $f_3(x)$ должна представлять собой линейную композицию введенных ранее функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, спроецированных на множества I_1^1 и I_2^1 соответственно. Для этого необходимо привести функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ к единой шкале измерения, нормализовав, например, первую из них путем деления каждого коэффициента при независимых переменных ($k - k_i^P$) на мощность соответствующего подмножества K_i^H , $i \in I_1^1$. В итоге целевая функция $f_3(x)$ примет следующее выражение:

$$f_3(x) = f_{11}(x) - f_{22}(x) \rightarrow \min, \quad (3)$$

где

$$f_{11}(x) = \sum_{i \in I_1^1} v_i \sum_{k \in K_i^H} \frac{k - k_i^P}{|K_i^H|} x_{ik},$$

$$f_{22}(x) = \sum_{i \in I_2^1} w_i \sum_{k \in K_i^H} x_{ik}.$$

Значения весовых коэффициентов v_i и w_i ; $i \in I^1$ подбираются, исходя из реальных требований к срокам выполнения той или иной геологоразведочной работы в каждой конкретной ситуации.

4. Система ограничений

Систему ограничений данной задачи образуют четыре группы математических выражений.

Первая из них состоит из уравнений, отражающих требование включения в искомый план тех геологоразведочных работ, которые подлежат обязательному выполнению:

$$\sum_{k \in K_i^H} x_{ik} = 1, \quad i \in I_1^1. \quad (4)$$

Вторую группу ограничений составляют неравенства типичного комбинаторного характера, отражающие условие, что каждая из остальных работ может быть включена в искомый план не более одного раза:

$$\sum_{k \in K_i^H} x_{ik} \leq 1, \quad i \in I_2^1. \quad (5)$$

Ограничения третьей группы выражают требование, чтобы на каждом интервале времени количество единиц оборудования каждого типа, необходимых для выполнения планируемых работ, не превышало числа имеющихся в наличии. При этом предполагается, что геологоразведочные работы, начатые до рассматриваемого планового периода, полностью обеспечены необходимым оборудованием.

Для отрезков времени, в течение которых одновременно с работами, начатыми до рассматриваемого планового периода, могут выполняться работы, время начала которых находится в его пределах, ограничения данной группы представляются в следующем виде:

$$\sum_{i \in I^1(k)} \sum_{k' \in K_i^H(k)} a_{i,j,k-k'+1} x_{i,k'} \leq b_{jk} - \sum_{i \in I^0(k)} a_{ijk}, \quad k \in (K^0 \cap K^1), \quad j \in J(k), \quad (6)$$

где $I^0(k)$ – множество номеров геологоразведочных работ, начатых до рассматриваемого планового периода, но продолжающихся на k -м отрезке времени:

$$I^0(k) = \{i \in I^0 : k \leq \tau_i\}, \quad k \in K^0;$$

$I^1(k)$ – множество номеров геологоразведочных работ, начатых в рассматриваемом плановом периоде и продолжающихся на k -м отрезке времени:

$$I^1(k) = \{i \in I^1 : k \in K_i\}, \quad k \in K^1;$$

$K_i^H(k)$ – множество номеров отрезков времени, в которые должно начинаться i -е геологическое исследование, чтобы его выполнение продолжалось на k -м отрезке:

$$K_i^H(k) = \{k' \in K_i^H : k' \leq k < k' + \tau_i\}, \quad k \in K^1;$$

$J(k)$ – множество типов оборудования, которое может потребоваться для выполнения геологоразведочных работ на k -м отрезке времени рассматриваемого планового периода:

$$J(k) = J^0(k) \cup J^1(k), \quad k \in (K^0 \cap K^1);$$

$J^0(k)$ – множество типов оборудования, необходимого на k -м отрезке времени для выполнения геологоразведочных работ, начатых до рассматриваемого планового периода:

$$J^0(k) = \bigcup_{i \in I^0(k)} J_{ik}, \quad k \in K^0;$$

$J^1(k)$ – множество типов оборудования, которое может потребоваться на k -м отрезке времени для выполнения геологоразведочных работ, начатых в рассматриваемом плановом периоде:

$$J^1(k) = \bigcup_{i \in I^1(k)} \bigcup_{k' \in K_i^H(k)} J_{i,k-k'+1}, \quad k \in K^1.$$

Для отрезков времени, когда могут выполняться только те работы, которые начаты в рассматриваемом плановом периоде, ограничения третьей группы приобретают более простое выражение:

$$\sum_{i \in I^1(k)} \sum_{k' \in K_i^H(k)} a_{i,j,k-k'+1} x_{i,k'} \leq b_{jk}, \quad k \in (K^1 \setminus K^0), \quad j \in J(k). \quad (7)$$

Четвертую группу ограничений образуют неравенства, отражающие требование достаточного финансирования геологоразведочных работ. Очевидно, величина затрат на каждом отрезке времени не должна превышать суммы финансовых поступлений с начала планового периода до рассматриваемого отрезка включительно за вычетом всех предшествующих расходов.

При этом предполагается, что геологоразведочные работы, начатые до рассматриваемого планового периода, полностью обеспечены необходимым финансированием.

Ограничения данной группы формулируются только для тех отрезков времени, когда могут выполняться работы, начатые в рассматриваемом плановом периоде:

$$R^1(x, k) \leq S(k) - R^0(k), \quad k \in K^1, \quad (8)$$

где $S(k)$ – сумма начального ресурса и финансовых поступлений с начала рассматриваемого планового периода до k -го отрезка времени включительно:

$$S(k) = s_0 + \sum_{k' \in K^S(k)} s_{k'}, \quad k \in K^1;$$

$K^S(k)$ – множество номеров отрезков времени от начала рассматриваемого планового периода до k -го отрезка включительно, в которые предполагаются финансовые поступления:

$$K^S(k) = K^S \cap \{1, \dots, k\}, \quad k \in K^1;$$

$R^0(k)$ – расходы на выполнение геологоразведочных работ, начатых до рассматриваемого планового периода, с момента его начала по k -й отрезок времени включительно:

$$R^0(k) = \sum_{i \in I^0} \sum_{k'=1}^{\tau_i(k)} r_{ik'},$$

$$\tau_i(k) = \min\{\tau_i, k\}, \quad k \in K^0;$$

$R^1(x, k)$ – расходы на выполнение геологоразведочных работ, начатых в рассматриваемом плановом периоде, с момента его начала по k -й отрезок времени включительно:

$$R^1(x, k) = R^{10}(x, k) + R^{11}(x, k), \quad k \in K^1;$$

$R^{10}(x, k)$ – расходы на выполнение геологоразведочных работ, начатых в рассматриваемом плановом периоде и завершенных до k -го отрезка времени:

$$R^{10}(x, k) = \sum_{i \in I^{10}(k)} \left(\sum_{k' \in K_i^H} x_{ik'} \right) \left(\sum_{k''=1}^{\tau_i} r_{ik''} \right), \quad k \in K^1;$$

$I^{10}(k)$ – множество номеров работ, начатых в рассматриваемом плановом периоде и завершенных до k -го отрезка времени:

$$I^{10}(k) = \{i \in I^1 : k_i^H + \tau_i - 1 < k\}, \quad k \in K^1;$$

$R^{11}(x, k)$ – расходы на выполнение геологоразведочных работ, начатых в рассматриваемом плановом периоде, но продолжающихся в k -м отрезке времени:

$$R^{11}(x, k) = \sum_{i \in I^1(k)} \sum_{k' \in K_i^H(k)} x_{ik'} \sum_{k''=1}^{\tau_i(k, k')} r_{ik''},$$

$$\tau_i(k, k') = \begin{cases} \tau_i, & \text{если } k' + \tau_i - 1 \leq k \\ k - k' + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В формальной постановке задача планирования геологоразведочных работ заключается в отыскании вектора значений независимых булевых переменных $x = (x_{ik} \mid i = \overline{1, m}; k \in K_i^H)$, обращающего в оптимум:

а) целевую функцию (1) при соблюдении ограничений (4), (6)–(8) (в случае, когда $(I_1^1 = I^1) \& (I_2^1 = \emptyset)$);

б) целевую функцию (2) при соблюдении ограничений (5), (6)–(8) (в случае, когда $(I_1^1 = \emptyset) \& (I_2^1 = I^1)$);

в) целевую функцию (3) при соблюдении ограничений (4)–(8) (в случае, когда $(I_1^1 \neq \emptyset) \& (I_2^1 \neq \emptyset)$).

5. Выводы

Рассмотренные разновидности задачи оптимального планирования геологоразведочных работ относятся к классу экстремальных комбинаторных задач с линейной структурой. После приведения указанных моделей к каноническому виду для их решения используется алгоритм направленного перебора вариантов [2].

Несмотря на полноту данного алгоритма, решения, вырабатываемые на основе приведенных моделей, носят приближенный характер из-за искусственного перехода от непрерывного времени к дискретному. Однако с этим приходится мириться, поскольку конструктивная формализация рассматриваемой задачи в непрерывном времени, которая могла бы позволить находить точное оптимальное ее решение с учетом всех реальных ограничений, не представляется возможной из-за ее сложности и нелинейности функциональных зависимостей.

Дальнейшим развитием описанного подхода к планированию геологоразведочных работ может служить переход к стохастическим моделям, в которых все финансовые и временные показатели работ рассматриваются как случайные величины с заданными законами распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назарова З.М. Управление, организация и планирование геологоразведочных работ / З.М. Назарова, Е.Л. Гольдман, В.И. Комащенко. – М.: Высшая школа, 2004. – 508 с.
2. Литвиненко А.Е. Метод направленного перебора в системах управления и диагностирования. – К.: Научно-издательский центр НБУВ, 2007. – 328 с.

Стаття надійшла до редакції 21.03.2008