

Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину

Іван Шацький¹, Микола Маковічук²

¹ к. ф.-м. н., с. н. с., Івано-Франківський сектор ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, Івано-Франківськ, 76000, e-mail: orm@iung.edu.ua

² к. ф.-м. н., Івано-Франківський сектор ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, Івано-Франківськ, 76000, e-mail: makoviy@ua.fm

У двовимірній постановці розглянуто задачу про контактну взаємодію берегів колінеарних меридіональних тріщин під час згину пологої сферичної оболонки. Закриття тріщини описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в одній із лицьових поверхонь оболонки. Розв'язок задачі побудовано за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та числового методу квадратур. Вивчено вплив контактної взаємодії берегів на залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів і граничного навантаження від параметрів кривини поверхні та взаємного розміщення колінеарних дефектів. Досліджено розподіл контактної реакції на лінії тріщин. Встановлено, що урахування контакту берегів тріщин під час згину сферичної оболонки у більшості випадків розширює область допустимих навантажень, проте зі зростанням параметра кривини закриття тріщин у внутрішній лицьовій поверхні призводить до зменшення несучої здатності оболонки.

Ключові слова: сферична оболонка, згин, колінеарні тріщини, закриття тріщин, міцність.

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану оболонок із системами тріщин, зазвичай, проводилися за умови, що поверхні дефектів не взаємодіють між собою [1-3]. Під час розв'язування задач про закриття тріщин в оболонках унаслідок їх згину використовують модель контакту вздовж лінії [4, 5], що дозволяє уникнути фізичних суперечностей, пов'язаних із перекриттям берегів-розрізів, і отримати якісну оцінку явища в рамках двовимірних теорій. Для задач згину сферичної панелі з меридіональним розрізом такий підхід реалізовано у роботі [6] на основі класичної теорії Кірхгофа, а у праці [7] — з урахуванням трансверсального зсуву. Мета цього дослідження — оцінити вплив контакту берегів колінеарних тріщин на напружений і граничний стан пологої сферичної оболонки під час її згину.

1. Формулювання задачі

Розглядаємо ізотропну сферичну оболонку завтовшки $2h$ із двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж меридіана на відстані $2d$ між їхніми центрами. До країв дефектів прикладено самозрівноважене рівномірно розподілене згинне навантаження $m = const$. Поверхні оболонки вільні від напружень.

Дослідимо вплив місцезнаходження тріщин і контакту їх берегів унаслідок згину оболонки на її напружено-деформований стан і граничну рівновагу.

Приймаємо, що оболонка в зоні збурення напруженого стану є полога. Систему декартових координат $Oxyz$ виберемо з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Напружено-деформований стан оболонки опишемо рівняннями теорії пологих оболонок

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2/L.$$

Тут φ — функція напружень, w — прогин оболонки; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/[3(1-\nu^2)]$, E і ν — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу; Δ — оператор Лапласа; $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ — сукупність розрізів.

Зважаючи на симетрію задачі відносно осі абсцис, запишемо крайові умови контакту на розрізах [4, 5]

$$[u_y] = h[\theta_y] \geq 0, \quad M_y = -m + hN_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L. \quad (1)$$

На безмежності напружень немає

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0; \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (2)$$

У формулах (1), (2) $[u_y]$ — розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки, $[\theta_y]$ — розрив кута повороту нормалі; N_x, N_{xy}, N_y — мембранні зусилля, M_x, M_{xy}, M_y — моменти, Q_x^*, Q_y^* — узагальнені поперечні сили.

2. Інтегральні рівняння задачі

Розв'язок сформульованої задачі будемо методом сингулярних інтегральних рівнянь. Враховуючи, що тріщини перебувають в однакових умовах, запишемо інтегральні подання сил і моментів на правому розрізі через похідні від стрибків переміщення та кута повороту нормалі [2, 3]

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x)[u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x)a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi, \\ M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x)[u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x)a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi, \quad (3)$$

де $\tilde{K}_{ij}(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d)$, $a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$. Ядра $K_{ij}(\zeta)$ виражаються через функції Кельвіна [1, 2]

$$\begin{aligned}
 K_{11}(\zeta) &= \frac{2}{\zeta} \left[\ker(\gamma|\zeta) - \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta) - \frac{2}{\gamma|\zeta|} \operatorname{kei}'(\gamma|\zeta) \right], \\
 K_{13}(\zeta) &= K_{31}(\zeta) = -\frac{2}{\zeta} \left\{ (1-\nu) \left[\frac{2}{\gamma^2 \zeta^2} + \frac{2}{\gamma|\zeta|} \ker'(\gamma|\zeta) + \operatorname{kei}(\gamma|\zeta) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \gamma|\zeta| \operatorname{kei}'(\gamma|\zeta) \right\}, \\
 K_{33}(\zeta) &= \frac{2}{\zeta} \left\{ (1-\nu)^2 \left[\frac{2}{\gamma|\zeta|} \operatorname{kei}'(\gamma|\zeta) - \ker(\gamma|\zeta) \right] - (1-\nu^2) \gamma|\zeta| \ker'(\gamma|\zeta) \right\} - \\
 &\quad - 2\gamma^2 \int_0^\zeta \operatorname{kei}(\gamma|\zeta) d\zeta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{Ra}} = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{\sqrt{Rh}}.
 \end{aligned}$$

Підставляючи вирази (3) у крайові умови (1) і виключаючи стрибок $[u_y]$, приходимо до сингулярного інтегрального рівняння на визначення знакосталого за припущенням стрибка повороту нормалі [8]

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4\pi} \int_l^l \left[3(1-\nu^2) \tilde{K}_{11}(\xi, x) + 2 \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1-\nu^2)} \tilde{K}_{13}(\xi, x) + \right. \\
 \left. + \tilde{K}_{33}(\xi, x) \right] [\theta_y]'(\xi) d\xi = m, \quad x \in (-l, l).
 \end{aligned} \quad (4)$$

Тут враховано, що $\operatorname{sgn}[\theta_y] = -\operatorname{sgn} m$ [4].

Розв'язок рівняння (4) слід підпорядкувати ще додатковій умові неперервності переміщень на кінцях розрізу

$$[\theta_y](\pm l) = 0. \quad (5)$$

Якщо у задачі, що розглядається, не враховувати контакт берегів, то, підставивши інтегральні подання (3) у класичні умови $N_y = 0$, $M_y = -m$, $x \in (-l, l)$, одержимо систему інтегральних рівнянь [1-3, 9]

$$\begin{aligned}
 \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \right\} d\xi = 0, \\
 \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x) a [\bar{\theta}_y]'(\xi) \right\} d\xi = -m, \quad x \in (-l, l),
 \end{aligned} \quad (6)$$

з додатковими умовами

$$[\bar{u}_y](\pm l) = 0, \quad [\bar{\theta}_y](\pm l) = 0. \quad (7)$$

3. Аналіз результатів

Числові розв'язки сформульованих задач (4), (5) і (6), (7) отримано методом квадратур для $\nu = 0,3$.

Для задачі з контактом за знайденим розв'язком і першою з формул (1) визначали розкриття тріщин, відтак за регулярним виразом

$$N_y(x, 0) = -\frac{|m|}{h} \frac{\kappa}{1+\kappa} \left\{ 1 - \frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l \left[\tilde{K}_{33}(\xi, x) - (3-2\nu-\nu^2) \tilde{K}_{11}(\xi, x) + \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right) \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1-\nu^2)} \tilde{K}_{13}(\xi, x) \right] \frac{[\theta_y]'(\xi)}{m} d\xi \right\}, \quad \kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu),$$

обчислювали контактну реакцію у довільній точці правого розрізу.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів у внутрішніх і зовнішніх вершинах тріщин обчислювали за формулами

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x),$$

$$K_M^\pm = \pm (3-2\nu-\nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x).$$

На основі енергетичного критерію руйнування за умов комбінованого розтягу та згину [2]

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*$$

знайшли граничне навантаження m^* , за якого починається поширення тріщини. Тут γ_* — густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, а також руйнівного навантаження від параметра взаємного розташування дефектів $\rho = l/d$ будували для фіксованих значень параметра кривини $\lambda = \gamma l = [3(1-\nu^2)]^{1/4} l / \sqrt{Rh}$ (рис. 1). Для $m > 0$ береги змикаються у внутрішній, а для $m < 0$ — у зовнішній лицьовій поверхні оболонки. За нехтування контактом берегів тріщини результати узгоджуються з даними, наведеними у роботі [3]. У цьому випадку $\tilde{K}_N = hK_N / (m\sqrt{l})$.

Бачимо, що контакт берегів тріщин зумовлює збільшення коефіцієнтів інтенсивності зусиль, зменшення коефіцієнтів інтенсивності моментів, а також призводить до їх немонотонної залежності від параметра відносної віддалі між тріщинами ρ . Урахування контакту берегів тріщин під час згину сферичної оболонки у більшості випадків розширює область безпечних навантажень, проте зі зростанням λ для $m > 0$ закриття тріщин призводить до зменшення несучої здатності оболонки.

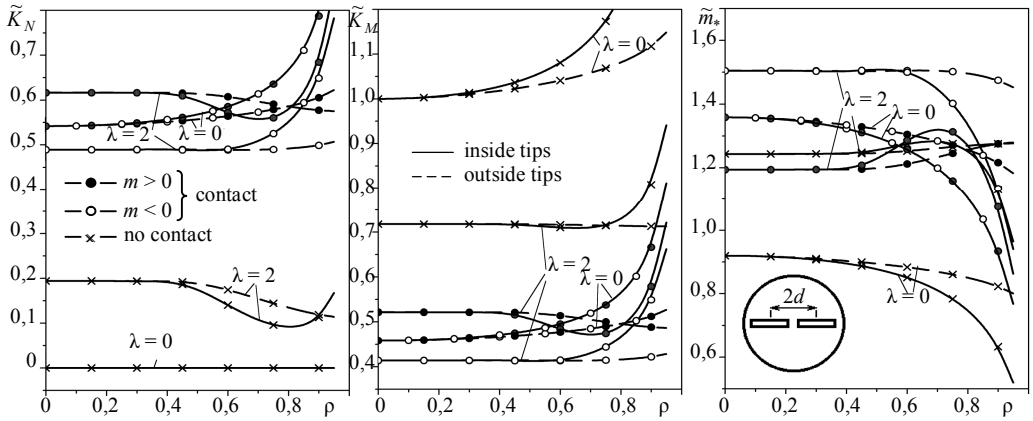


Рис. 1. Коефіцієнти інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N = hK_N/m|\sqrt{l}|$, моментів $\tilde{K}_M = K_M/m\sqrt{l}$ і руйнівне навантаження $\tilde{m}_* = |m_*|/m^0$ ($m^0 = 2h^2\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$) для сферичної оболонки з колінеарними тріщинами

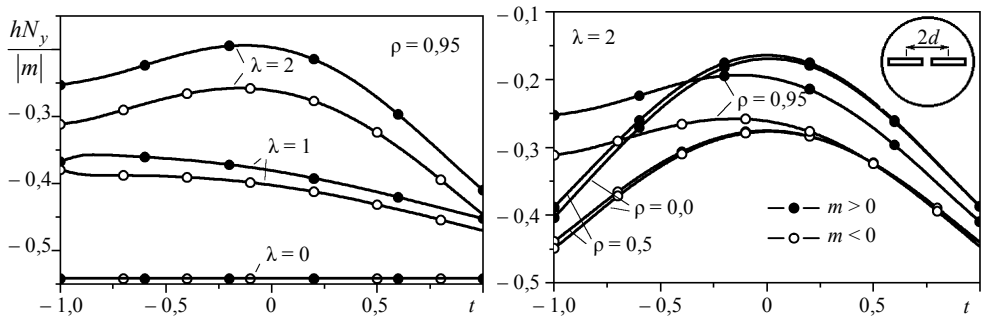


Рис. 2. Розподіл контактної реакції вздовж правої тріщини:
 $m > 0$ — контакт по внутрішній поверхні, $m < 0$ — контакт по зовнішній поверхні

Окрім того, контакт берегів дає стрімкіше зменшення руйнівного моменту під час зближення дефектів.

Порівняно з аналогічними результатами, одержаними без урахування контакту берегів тріщини [3], немонотонна залежність коефіцієнтів інтенсивності та руйнівного навантаження від параметра взаємного розташування ρ посилюється, якщо береги змикаються у внутрішній лицьовій поверхні оболонки ($m > 0$) і послаблюється, якщо береги змикаються у зовнішній ($m < 0$). Під час зближення тріщин проявляється діапазон значень параметра ρ , де небезпечнішими стають віддалені вершини.

Результати обчислення контактної реакції для правої тріщини подані на рис. 2. Графіки зліва показують залежність від кривини, а праворуч — від відносної віддалі між тріщинами. Зі зростанням параметра λ контактна взаємодія берегів тріщин послаблюється. Найсуттєвіше ця тенденція проявляється посередині та поблизу внутрішніх вершин дефектів. У випадку контакту берегів у внутрішній поверхні ($m > 0$) залежність контактної реакції від ρ є немонотонна.

Отримані тут результати у граничних випадках збігаються з одержаними раніше. Зокрема, якщо $\rho = 0$, то отримаємо результати, що описують закриття ізольованої прямолінійної тріщини у сферичному куполі [6], а якщо $\lambda = 0$ — розв'язок задачі для колінеарних тріщин із контактуючими берегами у пластині [10].

Висновки. 1. Урахування контакту берегів тріщин у сферичній оболонці загалом призводить до збільшення руйнівного навантаження, однак за збільшення кривини, залежно від знаку навантаження, дає як більші, так і менші значення, порівняно з класичним результатом.

2. Зі зростанням параметра кривини контактна взаємодія берегів тріщин послаблюється. Залежність контактної реакції від взаємного розташування тріщин є немонотонна.

3. Під час зближення тріщин виявлено такий діапазон їх взаємного розташування, де небезпечними стають віддалені вершини, а руйнівний момент є немонотонна функція від параметра $\rho = l/d$. Цей ефект посилюється, якщо береги контактують у внутрішній поверхні та послаблюється, якщо береги тріщин зникають у зовнішній лицьовій поверхні оболонки.

Література

- [1] Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. — Киев: Наук. думка, 1976. — 444 с.
- [2] Осадчук, В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.
- [3] Механика композитов. В 12 т.; под общей ред. А. Н. Гузя. — Киев: Наук. думка, 1993. — Т. 7. Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. — Киев: А. С. К., 1998. — 387 с.
- [4] Шацький, І. П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1991. — № 2. — С. 26-29.
- [5] Шацький, І. П. Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке / І. П. Шацький // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1998. — № 5. — С. 164-173.
- [6] Шацький, І. П. Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе / І. П. Шацький, Н. В. Маковійчук // Теорет. и прикл. механика. — 2005. — Вып. 41. — С. 146-150.
- [7] Liu, Rong. Crack closure in spherical shells / Rong Liu, C. H. Wang, R. G. Bathgate // Intern. J. Fract. — 1999. — Vol. 99, No 4. — P. 307-323.
- [8] Маковійчук, М. В. Інтегральні рівняння задачі про закриття колінеарних тріщин в пологій оболонці при згині / М. В. Маковійчук // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача. Тези доп. — Львів, 2005. — С. 80-81.
- [9] Хижняк, В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. — Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. — 126 с.
- [10] Шацький, І. П. Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине / І. П. Шацький // Физ.-хим. механика материалов. — 1990. — Т. 26, № 3. — С. 70-75.

Equilibrium of a slope spherical shell with account of collinear cracks closure under banding

Ivan Shatsky, Mykola Makoviychuk

The problem of contact interaction of the edges of collinear meridional cracks in a spherical shell under bending loading in a two-dimensional statement has been considered. Crack closure has been described using the model of contact along a line in one of the facial surfaces of a shell. The problem solution is based on the method of singular integral equations and the numerical method of quadratures. The influence of the crack edges contact on the dependence of forces and moments intensity factors and also limit loading on the parameters of surface curvature and mutual location of collinear defects has been studied. The distribution of contact reaction on the contact line has been investigated. It has been established that the account of crack edges contact under a spherical shell bending in most cases extends the area of the permissible loadings, however with the curvature parameter growth the cracks closure in internal facial surface causes the decrease of bear capacity of a shell.

Равновесие сферической пологой оболочки с учетом закрытия коллинеарных трещин при изгибе

Иван Шацкий, Николай Маковийчук

В двумерной постановке рассмотрена задача о контактном взаимодействии берегов коллинеарных меридиональных трещин при изгибе пологой сферической оболочки. Закрытие трещины описано с использованием модели контакта вдоль линии в одной из лицевых поверхностей оболочки. Решение задачи построено с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и численного метода квадратур. Изучено влияние контактного взаимодействия берегов на зависимости коэффициентов интенсивности усилий и моментов и предельной нагрузки от параметров кривизны поверхности и взаимного размещения коллинеарных дефектов. Исследовано распределение контактной реакции на линии трещин. Установлено, что учет контакта берегов трещин при изгибе сферической оболочки в большинстве случаев расширяет область допустимых нагрузок, однако с ростом параметра кривизны закрытия трещин во внутренней лицевой поверхности приводит к уменьшению несущей способности оболочки.

Представлено професором М. Сухорольським

Отримано 22.12.09