УДК 519.816 (075.8)

НЕЧІТКІ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ НА ВИРОБНИЦТВО КОЛЕКТИВНОГО ПРОДУКТУ

ВАСИЛЬ ЛАВЕР,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики Ужгородського національного університету

У статті аналізується одна з моделей регульованої монополії - модель розподілу витрат на виробництво колективного продукту. Розглядається чіткий варіант постановки задачі та підходи до її вирішення ("ігровий" підхід, зведення до класичної моделі розподілу витрат). Пропонуються її узагальнення на випадок нечіткості вхідної інформації (зокрема величини колективного продукту та часток витрат агентів). Розглядається алгоритм знаходження оптимальних часток витрат агентів та величини колективного продукту. Як ілюстрація роботи алгоритму наведено числовий приклад.

Ключові слова: *регульована монополія, розподіл витрат, нечіткі моделі, прийняття рішень, нечіткість, математичні моделі, математична економіка, оптимізація, оптимальні розподіли, колективний продукт.*

Постановка проблеми. На основі критики існуючих підходів до визначення місця природних монополій у системі економічних відносин у розвинутих капіталістичних країнах, перш за все в США та Великобританії, були прийняті закони та нормативні акти, спрямовані на організацію конкурентного сектора в області, що раніше розглядалась як складова частина природних монополій, і виділення мереж, портів аеропортів, терміналів та ін. як природно-монопольного сектора. Нові теоретичні підходи на практиці вилились у заходи з дезінтеграції і приватизації природних монополій. Але подібні реформи не завжди дозволяють досягти бажаної ефективності й загалом не є позбавленими недоліків. Це можна простежити, наприклад, на досвіді реформування галузі електроенергетики у Великобританії [7]. З огляду на це не втрачають актуальності існуючі моделі регулювання природних монополій.

Аналіз досліджень і публікацій. Теоретичним підґрунтям при дослідженні регульованих монополій можуть слугувати праці вчених світової економічної науки, зокрема У. Баумоля, Г. Демшеця, Дж. Панзара, Р. Позера, Р. Уілліга, Р. Масгрейва, А. Пікока. Математичні моделі регульованої монополії та застосуваня теорії ігор до вирішення окреслених проблем можна знайти в працях французького математика Е. Мулена [5] та інших учених, зокрема Ш. Вебера, В. Петерса, М. Ямади та ін.

Разом із тим, незважаючи на значний науковий доробок, дослідженнями не охоплено повною мірою питання нечітких узагальнень моделей регульованої економіки, що власне й стало предметом статті.

При написанні статті використовувались економіко-математичні методи та методи нечіткого аналізу.

Ураховуючи актуальність проблеми, у процесі дослідження ставиться **мета** - дослідити модель виробництва колективного продукту й побудувати її узагальнення на випадок нечіткої інформації.

Виклад основного матеріалу. Логіка викладу вимагає розділення матеріалу статті на дві частини. У першій наводиться модель виробництва колективного продукту. Друга частина присвячена побудові нечітких узагальнень досліджуваної моделі. Також наводиться алгоритм пошуку оптимальних розподілів та ілюстративний приклад.

МОДЕЛЬ ВИРОБНИЦТВА КОЛЕКТИВНОГО ПРОДУКТУ

Розглядається модель регульованої монополії, а точніше - задача виробництва колективного продукту [5]:

$$u_i(M_i - x_i, y) \to \max, i \in N = \{\overline{1,n}\}, n \ge 2, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = c(y), \tag{1}$$

де M_i - початковий запас грошей у *i*-го агента, x_i - його внесок у виробництво y одиниць колективного продукту вартістю $c(y)$, u_i - його функція корисності. Нехай кооперація ефективна, тобто $c(y) \le \sum_{i=1}^{n} M_i$. На функції c і u_i накладаються характерні для моделей мікроекономіки обмеження [6]: $c(0) = 0$, c не спадає й ввігнута; u_i зростають по кожній змінній $m_i = M_i - x_i$ та y і квазіввігнуті за їх сукупністю для всіх *i*; функції c та u_i диференційовані.

Розглянемо адитивний згусток критеріїв $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ (що відповідає утилітарній функції корисності [3]). Оптимальні за Парето розподіли в припущеннях задачі

(1) визначаються із такої необхідної та достатньої умови оптимальності (рівняння Самуельсона [5]):

$$\sum_{i=1}^{n} u_{iy} / u_{im_i} = c'(y), \tag{2}$$

де u_{iy} (u_{im_i}) - похідні функцій корисності агентів за колективним продуктом (вільними грошима), $c'(y)$ - похідна виробничої функції за колективним продуктом.

Нехай переваги агентів адитивно сепарабельні за об'ємом колективного продукту й лінійні за витратами: $u_i(M_i - x_i, y) = b_i(y) + (M_i - x_i)$, де $b_i(y)$ - грошовий еквівалент y одиниць колективного продукту.

Тоді рівняння Самуельсона (2) спрощується:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i'(y) = c'(y), \tag{3}$$

тобто сума маргінальних прибутків дорівнює маргінальним витратам на виробництво колективного продукту. Зауважимо, що рівні витрат x_i у цій формулі зникають. Рівняння (3) може бути розв'язане відомими методами. Це дає нам змогу знайти оптимальний рівень випуску колективного продукту y^*.

Один із підходів до розв'язання задачі (1) полягає у зведенні її до кооперативної гри з трансферабельними корисностями [5]: для всіх $S \subseteq \{1,...,n\}$: $v(S) = \max_{y \geq 0} \left\{ \sum_{i \in S} M_i + \sum_{i \in S} b_i(y) - c(y), 0 \right\}$ (відображення v ставить у відповідність кожній коаліції її прибуток). Допустимий розподіл $(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ належить ядру гри тоді й тільки тоді, коли $\sum_{i \in S} (b_i(y) + (M_i - x_i)) \geq v(S)$ для всіх коаліцій. Зазначимо, що ця нерівність при $S = N$ означає ефективність рівня виробництва колективного продукту (оскільки він максимізує загальний прибуток).

Автором пропонується інший підхід до вирішення цієї задачі: зведення до класичної моделі розподілу витрат. Так, знайшовши з рівняння (3) оптимальний рівень розподілу колективного продукту, для визначення часток витрат агентів можемо застосувати відомі механізми розподілу витрат, у тому числі й нечіткі [2].

НЕЧІТКІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ

Розглянемо випадок, коли точний розв'язок рівняння (3) знайти важко, але, базуючись на певних міркуваннях, y можна представити у формі нечіткого числа трикутного вигляду:

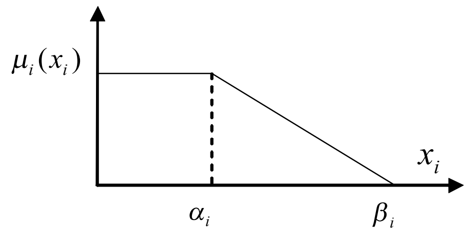
$$\mu_{y^*}(y) = \begin{cases} \dfrac{y - \underline{y}}{\widehat{y} - \underline{y}}, \underline{y} \leq y \leq \widehat{y}; \\ \dfrac{\overline{y} - y}{\overline{y} - \widehat{y}}, \widehat{y} \leq y \leq \overline{y}; \\ 0, \text{в інших випадках}. \end{cases} \tag{4}$$

Функція належності витрат $c(y)$ теж буде нечітким числом, вигляд якого визначатиметься функцією $c(y)$.

У результаті отримуємо задачу розподілу витрат, де значення розподілюваних витрат є нечітким числом. При інших чітких даних пропонується вибрати $y = \widehat{y}$ і застосувати відомі механізми розподілу.

Розглянемо випадок, коли x_i - нечіткі числа з функціями належності $u_i(x_i)$ $(i = \overline{1,n})$.

Для всіх *i* функція належності агента *i* визначається за такою формулою, а графік функції має усічено-трапецеїдальний вигляд:



$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} 1, x_i \leq \alpha_i; \\ \dfrac{\beta_i - x_i}{\beta_i - \alpha_i}, \alpha_i < x_i \leq \beta_i; \\ 0, \beta_i < x_i, \end{cases}$$

Такий вигляд функцій належності часток витрат агентів можна інтерпретувати так: агент *i* готовий виділити до α_i грошових одиниць на виробництво y одиниць суспільного продукту; менш бажаним є випадок, у якому потрібно виділити більше α_i; варіанти, коли необхідно виділити більше β_i грошових одиниць, є категорично неприйнятними.

Нехай агенти поділені на три групи, залежно від рівня b_i - на "бідних" ($i = \overline{1, n_1}$), "середніх" ($i = \overline{n_1 + 1, n_2}$) та "багатих" ($i = \overline{n_2 + 1, n}$), де $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n$.

Тоді

$$\alpha_i = \begin{cases} \gamma_1 b_i, i = \overline{1, n_1} \\ \gamma_2 b_i, i = \overline{n_1 + 1, n_2} \\ \gamma_3 b_i, i = \overline{n_2 + 1, n}, \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} \delta_1 b_i, i = \overline{1, n_1} \\ \delta_2 b_i, i = \overline{n_1 + 1, n_2} \\ \delta_3 b_i, i = \overline{n_2 + 1, n}, \end{cases}$$

де $0 \leq \gamma_i \leq 1 (i = \overline{1,3})$, $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$,

$0 \leq \delta_j \leq 1 (j = \overline{1,3}), \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$ - деякі коефіцієнти.

Уведемо функцію

$$v(x_1, x_2, ..., x_n, y) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = c(y); \\ 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \neq c(y). \end{cases}$$

Функція належності до обмежень шуканого вектора (x_1, x_2,…, x_n, y) матиме вигляд

$$\mu_c(x_1,x_2,...,x_n,y)=\min\{\mu_1(x_1),\mu_2(x_2),...,\mu_n(x_n),\mu_{c(y)}(y),\nu(x_1,x_2,...,x_n,y)\}.$$

Розв'язком цієї задачі будемо вважати вектор, що максимізує $\mu_c(x_1,x_2,...,x_n,y)$. Тобто для знаходження (x_1, x_2,…, x_n, y) потрібно розв'язати таку оптимізаційну задачу:

$$\lambda\to\max$$
$$\mu_c(x_1,x_2,...,x_n,y)\ge\lambda. \quad (5)$$

Ураховуючи вигляд $\mu_c(x_1,x_2,...,x_n,y)$, маємо:

$$\lambda\to\max$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=c(y),$$
$$\mu_i(x_i)\ge\lambda,\forall i=\overline{1,n}, \quad (5')$$
$$\mu_{c(y)}(y)\ge\lambda.$$

Задачу пропонується розв'язувати в декілька етапів:

1) розглядаємо всі можливі комбінації проміжків змін $x_i, c(y)$;

2) на кожному такому наборі за допомогою відомих методів [1] розв'язуємо задачу лінійного програмування

$$\lambda\to\max$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=c(y), \quad (6)$$
$$\mu_i(x_i)\ge\lambda,\forall i=\overline{1,n}.$$

$c(y)$ розглядаємо як незалежну змінну, що змінюється у відповідних межах ($c(\underline{y})\le c(y)\le c(\widehat{y})$ або $c(\widehat{y})\le c(y)\le c(\overline{y})$);

3) підставляємо знайдені значення в нерівність:

$$\mu_{c(y)}(y)\ge\lambda \quad (7)$$

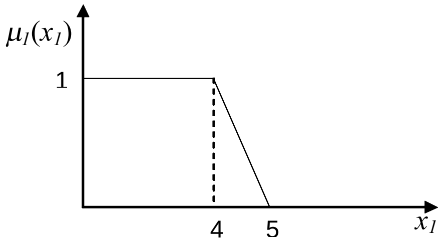
Якщо знайдені значення $c(y)$ та λ задовольняють (7), то зупиняємось. Якщо ні - ставимо λ таким, щоб нерівність (7) виконувалась;

4) порівнюємо всі знайдені набори на всіх проміжках. Оптимальним розподілом вважаємо той набір, для якого λ є максимальним.

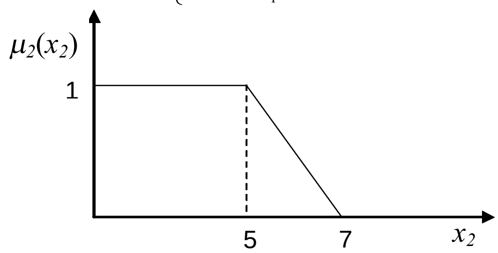
Аналогічним чином будуються нечіткі узагальнення для заданих принципів розподілу й нечіткого рівняння балансу $\sum_{i=1}^{n}x_i=c(y)$ [2].

Розглянемо числовий приклад.

Нехай є два агенти (n = 2). Функція витрат має вигляд $c(y)=\sqrt{y}$. Функції належності витрат агентів задаються в такий спосіб:



$$\mu_1(x_1)=\begin{cases}1, x_1\le 4;\\ -x_1+5, 4<x_1\le 5;\\ 0, x_1>5.\end{cases}$$



$$\mu_2(x_2)=\begin{cases}1, x_2\le 5;\\ \dfrac{-x_2+7}{2}, 5<x_2\le 7;\\ 0, x_2>7.\end{cases}$$

Функція належності y задається формулою:

$$\mu_y(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{19}-\dfrac{81}{19}, 81\le y\le 100;\\ -\dfrac{y}{21}+\dfrac{121}{21}, 100<y\le 121;\\ 0, в\ інших\ випадках.\end{cases}$$

Знайдемо функцію належності $c(y)=\sqrt{y}$. Для цього скористаємось методом, запропонованим у [4].

Для довільного α-перерізу знайдемо нижню й верхню межу - a_1^α та a_2^α.

$$\alpha=\frac{a_1^\alpha}{19}-\frac{81}{19},\quad \alpha=-\frac{a_2^\alpha}{21}+\frac{121}{21}.$$

Звідси $a_1^\alpha=19\alpha+81$, $a_2^\alpha=-21\alpha+121$.

Тоді для квадратного кореня межі будуть $a_1^{\frac{1}{2}\alpha}=\sqrt{19\alpha+81}$, $a_1^{\frac{1}{2}\alpha}=\sqrt{-21\alpha+121}$.

Знайдемо тепер рівняння для лівобічної (ЛБ) та правобічної (ПБ) функції:

$$c(y)=\sqrt{19\alpha+81};\ c(y)=\sqrt{-21\alpha+121}.$$

Отже, ЛБ має вигляд $\alpha=\dfrac{(c(y))^2-81}{19}$, а ПБ відповідно $\alpha=\dfrac{-(c(y))^2+121}{21}$.

Залишилось знайти межі змін ЛБ і ПБ. Для цього прирівняємо відповідні функції до нуля та одиниці й розв'яжемо отримані рівняння.

ЛБ:

$$\frac{(c(y))^2-81}{19}=0$$
$$\frac{(c(y))^2-81}{19}=1.$$

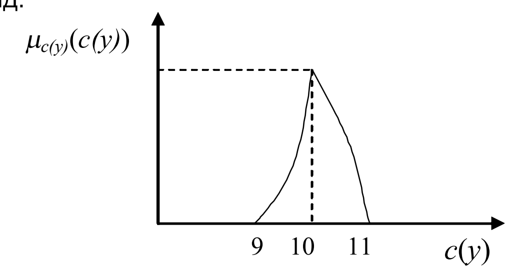
ПБ:

$$\frac{-(c(y))^2+121}{21}=0,$$
$$\frac{-(c(y))^2+121}{21}=1.$$

Маємо для ЛБ $y \in [9,10]$, для ПБ відповідно $y \in [10,11]$.

Отже, функція належності для $c(y) = \sqrt{y}$ матиме вигляд:

$$\mu_{c(y)}(c(y)) = \begin{cases} \frac{(c(y))^2}{19} - \frac{81}{19}, 9 \le c(y) \le 10; \\ -\frac{(c(y))^2}{21} + \frac{121}{21}, 10 < c(y) \le 11; \\ 0, \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$



Підставляємо отримані вирази в (5′). Ураховуючи інтервали значень змінних, отримаємо п'ять задач. Однією з них буде така:

$$\begin{aligned} &\lambda \to max \\ &x_1 + x_2 = c(y), \\ &-\frac{x_2}{2} + \frac{7}{2} \ge \lambda, \\ &\frac{(c(y))^2}{19} - \frac{81}{19} \ge \lambda, \\ &x_1 \le 4,5 \le x_2 \le 7,9 \le c(y) \le 10,0 \le \lambda \le 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Інші задачі матимуть вигляд аналогічний (8), але залежно від проміжків змін x_1, x_2, $c(y)$ будуть змінюватись обмеження.

Знаходимо розв'язки лінійних частин наведених задач (з виключенням умови по $c(y)$). Маємо такі значення наборів $(x_1, x_2, c(y), \lambda)$: (4;5;9;1), (4;6;10; $\frac{1}{2}$), (4;5;9;1); (4;5;9;1) та ($\frac{13}{3}$; $\frac{17}{3}$;10; $\frac{2}{3}$) відповідно. Перший, третій та четвертий набір не задовольняють нелінійної частини, а відповідні значення $x_1, x_2, c(y)$ задовольняють її тільки при λ = 0. Тому залишаються тільки набори, отримані з (7.2) та (7.5). А оскільки на останньому досягається найбільше значення $\lambda = \frac{2}{3}$, то він і буде розв'язком. Отже, оптимальним розподілом із достовірністю $\lambda = \frac{2}{3}$ уважаємо розподіл $x_1 = \frac{13}{3}$, $x_2 = \frac{17}{3}$, а оптимальною кількістю суспільного продукту з такою самою достовірністю вважатимемо y = 100. Вартість виробництва такої кількості суспільного продукту буде $c(y)$ = 10.

Висновки

Нечіткі розширення моделі розподілу витрат на виробництво колективного продукту дозволяють урахувати нечіткість даних, властиву реальним процесам. Недоліком нечітких моделей розподілу витрат можна вважати те, що у випадку великих відмінностей постає необхідність розв'язувати паралельно велику кількість задач. Є потреба в оптимізації алгоритму пошуку оптимальних розподілів витрат при нечітких даних для того, щоб уникнути повного перебору варіантів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Банди Б. Методы оптимизации / Б. Банди. - М. : Радио и связь, 1988. - 128 с.
2. Волошин А. Ф. Нечеткие обобщения модели распределения затрат / А. Ф. Волошин, В. О. Лавер // Information Models of Knowledge, ITHEA Sofia-Kiev. - 2010. - № 19. - 215 с.
3. Волошин О. Ф. Теорія прийняття рішень / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. - К. : ВТЦ "Київський університет", 2006. - 304 с.
4. Згуровский М. З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования / М. З. Згуровский. - К. : Вища школа, 1990. - 350 с.
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений / Э. Мулен. - М. : Мир, 1991. - 464 с.
6. Пономаренко О. І. Мікроекономіка / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. - К. : Вища школа, 2004. - 262 с.
7. Сапожникова Н. Т. Естественная монополия: опыт реформирования электроэнергетики Великобритании / Н. Т. Сапожникова, С. И. Сауткин // Менеджмент в России и за рубежом. - 2001. - № 6.

V. Laver

FUZZY MODELS OF COST SHARING AT PRODUCTION COLLECTIVE PRODUCT

After the global economic crisis issues of state regulation of economy became topical again. This article analyzes one of the models of regulated monopoly, namely the cost sharing at the collective product production. Crisp model of this problem is being observed. Different ways of solution are offered ("gaming" approach, reducing to classical cost sharing problem). Fuzzy generalization is offered (including the fuzziness of the collective product value and the fuzziness of agents' cost shares). Algorithm of finding the optimal cost share and optimal level of collective product production is proposed. A numerical example as illustration of the algorithm is given.

Key words: *regulated monopoly, cost sharing, fuzzy models.*

Надійшла до редакції 12.11.2010