

## Вибір формальної моделі оберненої задачі деформівної тонкостінної системи за результатами спостережень

Наталія Ободан<sup>1</sup>, Наталія Гук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. т. н., професор, Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, 49044, e-mail: vobodan@mail.ru

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., доцент, Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, пр. Гагаріна, 72, Дніпропетровськ, 49033, e-mail: nguk@farlep.dp.ua

*У роботі розглядається питання вибору формальної моделі з множини параметризованих моделей для реальної деформівної тонкостінної системи з використанням метрики. Для визначення вектора параметрів оберненої задачі деформування розроблено декомпозиційний підхід. Запропонована процедура вибору моделі та параметрів, що характеризують її, дозволяє оцінити адекватність моделі реальній системі та не вимагає додаткових обчислень порівняно з відомими процедурами.*

**Ключові слова:** формальна модельна структура, реальна модель системи, множина моделей-кандидатів, метрика, параметризація, пряма задача, обернена задача, декомпозиція вектора параметрів.

**Вступ.** Під час розв'язування обернених задач деформування тонкостінних систем на основі інформації про спостереження реальна система, що досліджується, ніколи повністю не відома, відома лише кінцева множина ситуацій, що спостерігалися. Тому для довільної системи неможливо сказати, як співвідносяться між собою дійсність і безліч спостережуваних ситуацій, що допускаються прийнятими моделями. Належний вибір модельної структури з множини моделей-кандидатів ґрунтується на змістовній і формалізованій інформації про об'єкт дослідження та гарантує успіх під час вирішення прикладних задач.

Відомим способом порівняння різних моделей між собою є оцінка їх функціонування на множині даних, які не використовувалися для налаштування жодної з них. Критерієм для порівняння може бути сума квадратів відхилень між фактичними вихідними сигналами та змодельованими. Такі процедури називають процедурами взаємного підтвердження. Вони не використовують у процесі порівняння ймовірнісної аргументації та припущень про реальну систему [1]. Окрім того, вибір між модельними структурами може здійснюватися з використанням критерію перевірки статистичних гіпотез [2], різновидів інформаційного критерію та критерію фінальної помилки прогнозу Акаїке [3], методом групового обліку аргументів [4].

У цій роботі пропонується для визначення ступеня адекватності тієї чи іншої моделі ввести метрику, що дозволяє оцінювати близькість двох ситуацій — реальної й отриманої на основі використання моделі.

## 1. Постановка задачі

Нехай  $MD(I, M)$  — модель, що описує реальний стан системи, де  $I$  — інформація про спостереження за системою,  $M$  — можливі моделі-кандидати, що описують стан системи. Ці моделі співпадають із множиною моделей реальних ситуацій, тобто, якщо  $S$  — будь-яка ситуація для реальної системи, то  $S \in MD(I, M)$ . При цьому вважаємо, що  $M_1$  еквівалентна  $M_2$ , якщо  $MD(I, M_1) \cong MD(I, M_2)$ . Таке припущення обґрунтовує існування різних моделей деформівної системи, які відповідають одним і тим же ж спостережуваним ситуаціям. Нехай  $R$  — безліч можливих спостережуваних ситуацій, тоді модель  $MD(I, M)$  адекватна за метрикою  $\rho$  заданої ситуації  $S$ , якщо

$$\forall S \in R, \exists S_m \in MD(I, M): \rho(S, S_m) = 0,$$

$$\neg S_m \in MD(I, M): \forall S \in R, \rho(S, S_m) \neq 0.$$

Адекватність моделі  $M$  визначимо таким чином

$$\rho = \inf \{ \rho(S, S_m), S_m \in MD(I, M) \}.$$

Тоді для побудови моделі, адекватної реальній системі, необхідно ввести метрику  $\rho$  та систему моделей  $M$ , відповідних  $MD(I, M)$ , а також створити метод визначення ситуацій  $S_m$ , які відповідають цим моделям.

## 2. Математична модель

Розглядаємо задачу деформування тонкостінної системи в обмеженій просторовій області  $\Omega = \{X : X \in S_0 \subset R^N\}$ , де  $X$  — вектор просторових координат. Система співвідношень, яка описує пружно-деформований стан системи у переміщеннях, має вигляд

$$L(H, u(X)) = F(X), \quad (1)$$

$$L_p^T(\bar{u}(H, X)) \Big|_{X=X^T \in \Gamma} = u_p^T(X^T), \quad p = \overline{1, R_\Gamma}, \quad (2)$$

де  $\Gamma$  — контур області  $\Omega$ ;  $L(\cdot), L_p^T(\cdot)$  — задані диференціальні оператори;  $u(X)$  — вектор переміщень;  $F(X)$  — функція, що описує зовнішню дію;  $H$  — вектор-функція, що описує геометричні й (або) фізичні параметри деформівної системи.

Відомі сліди розв'язків  $u_i(X)$  у точках  $X_i, i = \overline{1, N}$

$$u_i(X_i) = u_i^*(X_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Передбачаємо, що для сформульованих умов (1)-(3) можна, наприклад, поставити такі задачі:

1. знайти невідому вектор-функцію  $H$ ;
2. знайти функцію, що описує навантаження  $F(X)$ ;
3. знайти опис форми границі  $\Gamma$  області  $\Omega$  (можливо й багатозв'язної) у вигляді  $H_\Gamma(X)$ ;
4. знайти опис операторів  $L_p, p = \overline{1, R_\Gamma}$ .

Таким чином, у якості інформації  $I$  про стан системи виступає вектор вимірних переміщень  $u_i^*(X_i)$ , а у якості моделей  $M_j$  — задачі 1-4. Для введення метрики  $\rho$  будемо використовувати інформацію про властивості розв'язків, отриманих за допомогою моделей  $M_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , кожний розв'язок відповідає ситуації  $S_m$ , кожна спостережувана ситуація  $u^*(X)$  відповідає реальній ситуації  $S$ . При цьому передбачаємо, що тип задачі, що спостерігається, априорі невідомий.

### 3. Метод розв'язування задачі

Розв'язки сформульованих задач будемо шукати параметричним способом. Будемо використовувати такі параметризації моделі, які є коректними [5]. За такої параметризації обчислювальні похибки округлення й інші неточності у визначенні одного з параметрів моделі мало впливають на вихідні характеристики заданої системи.

Вектор-функції  $\bar{u}(X), H(X), L_p(X), F(X)$  подамо у вигляді скінченно-елементної апроксимації [6]

$$\bar{u}(X) = \sum_{i=1}^N u_i \Phi_i; \quad H(X) = \sum_{i=1}^N H_i \Phi_i; \quad F(X) = \sum_{i=1}^N F_i \Phi_i; \quad L_p(u) = \sum_{i=1}^N L_{p_i}(u_\Gamma) \Phi_i,$$

де  $u_i$  — значення переміщень у вузлах сітки;  $u_\Gamma$  — значення переміщень у вузлах сітки на границі  $\Gamma$ ;  $\Phi_i$  — функції форми;  $F_i$  — значення функції зовнішнього навантаження у вузлах сітки. Вектор-функція  $H_\Gamma(X)$  подається у вигляді вектора, компонентами якого є координати вузлів ламаної лінії, що описує межу області пошкодження. Після застосування методу скінченних елементів (МСЕ) отримаємо набір дискретних моделей

$$K(H)u = R; \quad Ku = R(F_i); \quad K(u_\Gamma) = R; \quad K(H_\Gamma) = R, \quad (4)$$

за умов:  $u_i - u_i^* = 0$ , де  $K(H), K(u_\Gamma), K(H_\Gamma)$  — матриці жорсткості;  $R, R(F_i)$  — проекції зовнішніх сил.

Лінійна апроксимація похибки  $\varepsilon = u - u^*$  має вигляд

$$\varepsilon^n(H_j^i) = \varepsilon^{n-1}(H_j^i) - A|_{H_j^{n-1}} \Delta H_j^i, \quad j = \overline{1, P}, \quad (5)$$

де  $A = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial H_{j_k}} \right\}; i = \overline{1, N}; k = \overline{1, K}$  — матриця, що характеризує реакцію деформівної системи на зміну параметрів;  $j$  — номер моделі  $M$ ,  $M \in MD(I, M)$ ;  $n$  — номер ітерації;  $H = \{H_j\} = \{H, H_\Gamma, F, u_\Gamma\}$  — вектор невідомих параметрів;  $\varepsilon^n(H_j)$  — вектор-нев'язка вигляду  $\varepsilon^n(H_j) = \left\{ \varepsilon_i^n(H_j) \right\} = \left\{ u_i(X_i, H_j) - u_i^*(X_i) \right\}$ . Звідси, при  $\varepsilon^n(H) \rightarrow 0$ , для кожної з систем (4) маємо

$$A|_{H_j^{n-1}} \Delta H_j = \varepsilon^{n-1}(H_j).$$

Нехай  $S_j = \{\bar{A}_j, \bar{\varepsilon}_j, H_j^0\}$  — спостережувана ситуація для моделі реальної системи  $M_j$ ,  $M_j \in MD(I, M)$ , а  $S_{m_j} = \{\tilde{A}_j, \tilde{\varepsilon}_j, \tilde{H}_j^{(n^*)}\}$  — ситуація для тієї ж моделі  $M_j$ , отримана на  $n^*$ -му кроці ітераційного процесу (5).

Введемо метрику

$$\rho_j(S_j, S_{m_j}) = \left( \gamma_j \left\| H_j^{(n^*)} \right\| - \sigma_j \right),$$

де  $\left\| \tilde{A}_j^{(n^*)} - \bar{A}_j \right\| \leq \gamma_j$ ;  $\left\| \tilde{\varepsilon}_j^{(n^*)} - \bar{\varepsilon}_j \right\| \leq \sigma_j$ ;  $\left\| \bar{A}_j H_j^0 - \bar{\varepsilon}_j \right\| = \mu_j$  і  $\left\| \tilde{A}_j^{(n^*)} \tilde{H}_j^{(n)} - \tilde{\varepsilon}_j^{(n^*)} \right\| = \tilde{\mu}_j$ ,  $n^*$  — номер ітерації, на якій справдилася умова  $\tilde{\varepsilon}_j^{(n)} = \alpha$ ,  $\alpha$  — мале число.

Оскільки для розв'язку  $\tilde{H}_j^{(n)}$ , знайденого в ітераційному процесі (5), досягається мінімум нев'язки  $\left\| \tilde{A}_j^{(n)} \tilde{H}_j^{(n)} - \tilde{\varepsilon}_j^{(n)} \right\|$  [7], то

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{A}_j^{(n)} \tilde{H}_j^{(n)} - \tilde{\varepsilon}_j^{(n)} \right\|^2 &\leq \left\| \tilde{A}_j^{(n)} H_j^0 - \tilde{\varepsilon}_j^{(n)} \right\|^2 \leq \left( \left\| \tilde{A}_j^{(n)} H_j^0 - \bar{A}_j H_j^0 \right\| + \left\| \bar{A}_j H_j^0 - \tilde{\varepsilon}_j^{(n)} \right\| \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \left\| \tilde{A}_j^{(n)} - \bar{A}_j \right\| \left\| H_j^0 \right\| + \left\| \bar{A}_j H_j^0 - \bar{\varepsilon}_j \right\| + \left\| \tilde{\varepsilon}_j^{(n)} - \bar{\varepsilon}_j \right\| \right)^2 \end{aligned}$$

або

$$\tilde{\mu}_j^2 \leq \left( \gamma_j \left\| H_j^0 \right\| + \mu_j + \sigma_j \right)^2. \quad (6)$$

Звідси, враховуючи нерівності, аналогічні до сформульованих у монографії [7],

$$\mu_j \leq \tilde{\mu}_j + \gamma_j \left\| H_j^0 \right\| + \sigma_j, \quad (7)$$

$$\tilde{\mu}_j \leq \mu_j + \gamma_j \left\| H_j^0 \right\| + \sigma_j, \quad (8)$$

отримаємо

$$\left\| \tilde{A}_j^{(n)} \tilde{H}_j^{(n)} - \tilde{\varepsilon}_j^{(n)} \right\|^2 \leq \left[ 2 \left( \gamma_j \left\| H_j^0 \right\| + \sigma_j \right) + \tilde{\mu}_j \right]^2. \quad (9)$$

Оскільки  $\tilde{H}_j^{(n)}$  збігається до  $H^0$ , якщо  $\gamma_j \rightarrow 0$ ,  $\sigma_j \rightarrow 0$ , то на кроці  $n^*$ , на якому  $\tilde{\varepsilon}_j^{(n^*)} = \alpha$ , для  $\sigma_j = 0$  маємо

$$\left\| \tilde{A}_j^{(n^*-1)} \tilde{H}_j^{(n^*)} - \tilde{\varepsilon}_j^{(n^*-1)} \right\| \leq 2\gamma_j^{(n^*)} \left\| \tilde{H}_j^{(n)} \right\| + \tilde{\mu}_j.$$

Звідси

$$\gamma_j^{(n^*)} = \frac{\left\| \tilde{A}_j^{(n^*-1)} \tilde{H}_j^{(n^*)} - \tilde{\varepsilon}_j^{(n^*-1)} \right\| + \tilde{\mu}_j}{2 \left\| \tilde{H}_j^{(n^*)} \right\|}; \quad \rho_j = \gamma_j^{(n^*)} \left\| H_j^{(n^*)} \right\|$$

та

$$H_j^0 = \arg \inf_{M_j \in MD} \rho_j. \quad (10)$$

Запропонована процедура вибору моделі та параметрів, що характеризують її, не потребує додаткових обчислень, порівняно з відомими процедурами [5], які вимагають визначення матриці Фреше другого порядку та наявності навчальної вибірки у вигляді  $N$  різних спостережуваних ситуацій, що, своєю чергою, приводить до необхідності побудови  $N$  матриць Фреше для ситуацій за кожною з моделей.

Приріст  $\Delta \tilde{H}^{(n)}$  невідомого вектора параметрів подамо у вигляді  $\Delta \tilde{H}^{(n)} = [\Delta H^1, \Delta H^2]^T$  приймаючи припущення, що існують найінформативніші компоненти  $\Delta H^1 = \{ \Delta H_{jk}^1 \}; k = \overline{1, K_1}; K_1 < K$  вектора параметрів такі, що справджують умову  $\| \Delta H - \Delta H^1 \|^2 \rightarrow \min$  (далі індекс  $(n)$ , що характеризує номер кроку ітераційного процесу (5), не записуватимемо). Компоненти  $\Delta H^1$  і  $\Delta H^2$  будемо визначати незалежно один від одного у вигляді двох паралельних алгоритмів

$$\Delta H^1 = \int_{\Omega} Q_1(X) \varepsilon(H_j) d\Omega; \quad (11)$$

$$\Delta H^2 = \int_{\Omega} Q_2(X) \varepsilon(H_j) d\Omega, \quad (12)$$

де  $Q_s(X) = [Q_{ski} \cdot \delta(X - X_k), k = \overline{1, K_s}, i = \overline{1, N}]$ ;  $s = 1, 2$  — невідомі матриці, які потрібно визначити;  $\omega_k^s = \delta(X - X_k)$  — функція Дірака. На кожному кроці ітераційного процесу для забезпечення виконання умови  $\| \Delta H - \Delta H^1 \|^2 \rightarrow \min$  розглядаємо функціонал

$$J_1(Q_1, Q_2) = \int_{\Omega} \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon(H_j) - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1(H_j) \right)^T \times \\ \times \left( \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon(H_j) - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1(H_j) \right) d\Omega \rightarrow \min. \quad (13)$$

Тут  $\varepsilon(H_j) = \{ \bar{u}_i(X_i, H_j) - u_i^*(X_i) \}; i = \overline{1, N}; \bar{u}_i(X_i, H_j)$  — переміщення, які є розв'язками прямої задачі (1), (2) для фіксованих значень вектора параметрів  $H_j$ ;  $\varepsilon^1(H_j)$  — нев'язка, обчислена для  $H_j = H_j^1$ , а інтеграл розуміємо в сенсі Стілт'еса.

Оптимальні матриці  $Q_1, Q_2$  повинні забезпечувати мінімізацію функціонала (13), при цьому необхідно забезпечити виконання умов незміщеності й інваріантності оцінювання. Ці умови приєднуємо до функціонала (12) із використанням множників Лагранжа [8]

$$J_2(Q_1, Q_2, \bar{\psi}) = J_1(Q_1, Q_2) + \int_{\Omega} \sum_s \bar{\psi}_s g_s d\Omega + \int_{\Omega} \sum_s \bar{\eta}_s f_s d\Omega, \quad (14)$$

де  $\bar{\psi}^T = \{\bar{\psi}_s\}, \bar{\eta}^T = \{\bar{\eta}_s\}$  — вектори множників Лагранжа;  $g_s = Q_s R_t, f_s = E_s - Q_s R_s$ ;  $i \neq j; s \leftrightarrow t; s, t \in \{1, 2\}$ ;  $R_s$  — матриця з ненульовими елементами, утворена з матриці  $A$  за врахування того, що компоненти вектора  $\Delta H$  належать векторам  $\Delta H^s$ .

Оскільки функції  $\omega_k^s$  ( $s = 1, 2$ ) є обмежені,  $\omega_k^s \in \{0, 1\}, k = \overline{1, K_s}$ , і множина  $W$  подається у вигляді  $W = \{\omega_k^s\} = \{(\omega_1^s, \dots, \omega_{K_s}^s) : \omega_k^s \in \{0, 1\}, k = \overline{1, K_s}\}$ , то функція  $L(\omega) = \sum_{k=1}^{K_s} J'_{2\omega_k}(\omega) \omega_k^s$  досягає своєї нижньої границі на  $W$  в точці  $\bar{\omega}^s = \{\bar{\omega}_1^s, \dots, \bar{\omega}_{K_s}^s\}$ , де

$$\bar{\omega}_k^s = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\psi_{tk}^T R_s^T Q_{tk} - Q_{tk}^T R_t \eta_{tk}) < 0, \\ 0, & \text{якщо } (\psi_{tk}^T R_s^T Q_{tk} - Q_{tk}^T R_t \eta_{tk}) > 0, \end{cases} \quad s, t \in \{1, 2\}; \quad k = \overline{1, K_s}. \quad (15)$$

Диференціюючи співвідношення (14) за аргументами  $Q_{im}, \psi_{im}, \eta_{im}$ , отримаємо необхідні умови для визначення матриць  $Q_1, Q_2$  у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{2k}}{\partial Q_{sk}} = 2PQ_{sk} + R_t \psi_{sk} - R_s \eta_{sk} = [0]_{N \times 1}, \\ \frac{\partial J_{2k}}{\partial \eta_{sk}} = E_{sk} - R_s^T Q_{sk} = [0]_{K_s \times 1_s}, \\ \frac{\partial J_{2k}}{\partial \psi_{sk}} = R_t^T Q_{ks} = [0]_{K_t \times 1}, \end{cases} \quad s, t \in \{1, 2\}, \quad (16)$$

де матриця  $P$  має розмірність  $N \times N$  і містить у верхньому лівому кутку матрицю  $K_1 \times K_1$ , що складається з елементів вигляду  $(\varepsilon_i - \varepsilon_i^1)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^1), i = \overline{1, K_1}$ ; праворуч від неї в стовпцях від  $K_1 + 1$  до  $N$  розташовані елементи вигляду  $\varepsilon_i \varepsilon_j^1, i = \overline{1, K_1}, j = \overline{K_1 + 1, N}$ ; а з  $K_1 + 1$  рядка та далі — елементи вигляду  $\varepsilon_i \varepsilon_j^1, i = \overline{K_1 + 1, N}, j = \overline{1, N}$ .

Для скорочення запису введемо такі позначення:  $Z_s = P^{-1} R_s$ ;  $Z_t = P^{-1} R_t$ ;  $\Phi_{ss} = R_s^T P^{-1} R_s$ ;  $\Phi_{tt} = R_t^T P^{-1} R_t$ ;  $\Phi_{st} = R_s^T P^{-1} R_t$ ;  $\Phi_{ts} = R_t^T P^{-1} R_s$ . Тоді з першого рівняння системи (16) знаходимо

$$Q_{sk} = 2^{-1} (Z_s \eta_{sk} - Z_t \psi_{sk}). \quad (17)$$

Домноживши ліву та праву частини співвідношення (17) зліва на матрицю  $R_t^T$ , за врахування умови інваріантності оцінювання одержуємо

$$\Psi_{sk} = \Phi_{tt}^{-1} \Phi_{ts} \eta_{sk}. \quad (18)$$

Аналогічно, шляхом множення співвідношення (17) зліва на матрицю  $R_s^T$  за врахування умови незміщеності оцінювання, маємо

$$\eta_{sk} = 2\Phi_{ss}^{-1} (E_{sk} + 2^{-1} \Phi_{st} \Psi_{sk}). \quad (19)$$

Розв'язуючи рівняння (18) і (19) відносно  $\Psi_{sk}$ ,  $\eta_{sk}$ , отримаємо співвідношення для визначення множників Лагранжа в явному вигляді, що дає можливість перевірити виконання умов (15). Якщо ці умови не виконуються, то необхідно сформулювати новий вектор функцій належності компонент вектора  $\Delta H$  векторам  $\Delta H^s$  ( $s = 1, 2$ ). Для цього необхідно перемістити компоненти вектора  $\Delta H^1$ , для яких функція належності  $\omega_k^1$  набула значення 0 у вектор  $\Delta H^2$  і навпаки, а потім знову виконати процедуру перевірки умови (15).

Для шуканих оптимальних матриць  $Q_s$  маємо

$$Q_s = \left[ F_{tt} Z_s (R_s^T F_{tt} Z_s)^{-1} \right]_{K_s \times N}; \quad s \neq t; \quad s, t \in \{1, 2\}. \quad (20)$$

У підсумку для обчислення компонент вектора  $\Delta H^s$ ,  $s = 1, 2$ , одержуємо такі співвідношення

$$\left[ \Delta H^s \right]_{K_s \times 1} = \left[ F_{tt} Z_s (R_s^T F_{tt} Z_s)^{-1} \right]_{K_s \times N} [\varepsilon]_{N \times 1}. \quad (21)$$

#### 4. Результати обчислювального експерименту

Запропонований тут підхід реалізовано в обчислювальному експерименті. Об'єктом дослідження була тонкостінна циліндрична прямокутна в плані панель (рис. 1), що перебувала під дією зосередженої сили  $F$ . Така система має деяку початкову недосконалість, оскільки виміряні для неї значення переміщень у вузлах сітки відрізняються від відповідних значень, визначених із розв'язку прямої задачі (1), (2) для аналогічної еталонної панелі ( $L/R = 2,4$ ;  $R/h = 100$ ;  $L, R, h, \varphi$  — довжина, радіус, товщина та кут розкриття панелі), що має відомі геометричні ( $h = 0,008$  м) та фізичні ( $E = 2 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0,3$ ;  $\sigma_T = 2,4 \cdot 10^3$  Н/м<sup>2</sup>) параметри. В еталонній панелі, яка теж перебуває під дією зосередженої сили, відсутні локальні пошкодження (отвори, тріщини). Відзначимо, що для формування вектора  $\mathbf{u}_i^*$  обиралися значення переміщень, отримані з розв'язку прямої задачі (1), (2) для панелі з заданим у локальній області (на рис. 1 цю область зафарбовано) відхиленням товщини, яке складає не більше 10 % від еталонного значення.

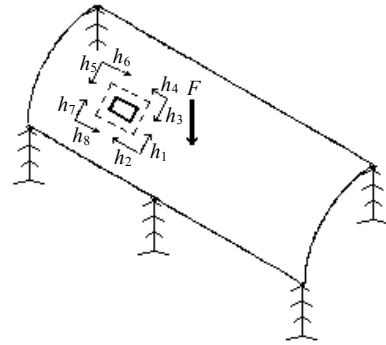
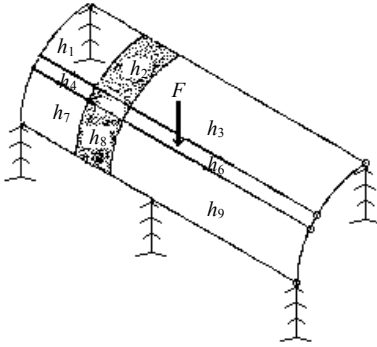


Рис. 1. Модель системи з відхиленнями товщини      Рис. 2. Модель системи з наскрізним отвором

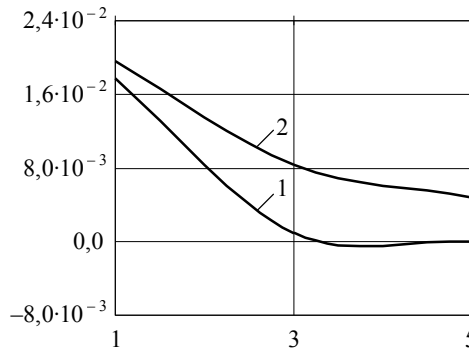


Рис. 3. Зміна норми похибки на ітераціях

Як елементи множини можливих моделей-кандидатів розглянемо: *модель 1* — панель має відхилення товщини від заданого значення в області, де спостерігаються найбільші відхилення вимірних значень переміщень від відповідних переміщень еталонної панелі; *модель 2* — панель має локальне пошкодження (отвір), розташоване в області, де спостерігаються найбільші відхилення вимірних значень переміщень від відповідних переміщень непошкодженої панелі. Далі ці моделі використовувалися для ідентифікації вектора параметрів реальної системи з метою вибору серед них дійсної моделі. Ітераційний процес визначення параметрів системи за *моделями 1 і 2* був побудований із застосуванням алгоритму декомпозиції.

Як вектор параметрів  $h_1-h_9$  (ці області на рис. 1 пронумеровані) для *моделі 1* вибрані значення товщини. Початкове наближення задавалося значеннями товщини, які мають бути забезпечені вимогами технологічного процесу (еталонні значення  $h = 0,008$  м).

На кожному кроці  $n$  ітераційного процесу за кожною  $j$ -ою моделлю були отримані наближення до значень вектора параметрів системи  $H_j$ , оцінювалася норма вектора  $\epsilon^n(H_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

Ітераційний процес ідентифікації вектора параметрів із використанням моделі 1 був зупинений внаслідок досягнення заданої точності  $\alpha$  після виконання 5 ітерацій. На рис. 3 подані залежності  $\|\epsilon^n(H_j)\|$  для обох моделей-кандидатів. Крива 1 відповідає *моделі 1*, а крива 2 — *моделі 2*. Аналізуючи побудовані залеж-



ності та порівнюючи величини  $\rho_1 = 3,11 \cdot 10^{-5}$  та  $\rho_2 = 4,87 \cdot 10^{-3}$  в якості модельної системи, що максимально повно імітує поведінку реальної системи, слід обрати *модель 1*. Результат ідентифікації вектора параметрів із використанням *моделі 1* подано у таблиці. Похибка між відтвореними значеннями вектора параметрів і дійсними складає не більше 1-2 %, що допустимо.

Таблиця

Результат ідентифікації вектора параметрів для системи з відхиленням товщини

$H$	Вектор параметрів реальної системи	Вектор відтворених параметрів системи	Похибка, %
$h_1$	0,008	0,007895	1,32
$h_2$	0,007	0,007061	0,88
$h_3$	0,008	0,007978	0,27
$h_4$	0,008	0,008021	0,26
$h_5$	0,007	0,006874	1,80
$h_6$	0,008	0,007978	0,27
$h_7$	0,008	0,008107	1,34
$h_8$	0,007	0,007120	1,71
$h_9$	0,008	0,008064	0,80

Далі було проведено експеримент, у ході реалізації якого за компоненти вектора  $\mathbf{u}_i^*$  приймали значення переміщень у вузлах сітки, отримані з розв'язку прямої задачі (1), (2) для панелі з наскрізним отвором (на рис. 2 отвір позначено суцільною лінією). За множину моделей-кандидатів приймаємо ту ж множину моделей. Задана точність  $\alpha$  була досягнута в ітераційному процесі з використанням *моделі 2* у результаті виконання 7 ітерацій. Як і у попередньому випадку порівнювали норми вектора похибки на ітераціях і значення  $\rho_1 = 8,33 \cdot 10^{-3}$  та  $\rho_2 = 7,16 \cdot 10^{-5}$ , отримані під час ідентифікації за *моделями 1* і *2* відповідно. Як модельну систему для панелі з наскрізним отвором слід обрати *модель 2*.

**Висновки.** На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

- застосування метрики дозволяє оцінити близькість двох ситуацій — дійсної, яка задається результатами спостережень, і отриманої з використанням параметризованої моделі;
- задача відтворення вектора параметрів системи формулюється як обернена; вектор параметрів системи може бути відновлений із використанням декомпозиційного підходу;
- запропонована процедура вибору моделі та параметрів, що характеризують її, не потребує додаткових обчислень, порівняно з відомими процедурами, які вимагають визначення матриці Фреше другого порядку та наявності навчальної вибірки у вигляді  $N$  різних спостережуваних ситуацій;
- порівняльний аналіз отриманих числових результатів відтворення вектора параметрів із використанням обраної модельної структури зі значеннями параметрів реальної системи свідчить про високу міру їх достовірності (відхилення складають не більше 1-2 %);

- розроблений підхід і відповідний комплекс програм дозволяють для різних тонкостінних систем (пластин, оболонок) розв'язувати задачу вибору моделі з подальшим її використанням для відтворення параметрів комплексу навантаження, геометричних і (або) фізичних параметрів деформівної системи, ідентифікації границі області пошкодження, визначення типів граничних умов.

У перспективі запропонований підхід може бути застосований для розв'язування задач термомеханіки.

### Література

- [1] Snee, R. D. Validation of regression models. Methods and examples / R. D. Snee // Technometrics. — 1974. — Vol. 19. — P. 415-428.
- [2] Bohlin, T. Maximum-power validation without higher-order fitting / T. Bohlin // Automatica. — 1978. — Vol. 14 — P. 137-146.
- [3] Эйхофф, П. Современные методы идентификации систем / П. Эйхофф, А. Ванечек, Е. Савараги. — Москва: Мир, 1983. — 238 с.
- [4] Ивахненко, А. Г. Метод группового учета аргументов — конкурент метода стохастической аппроксимации / А. Г. Ивахненко // Автоматика. — 1968. — № 3. — С. 72-87.
- [5] Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. — Москва: Наука, 1991. — 431 с.
- [6] Bathe, K. Numerical method in finite element analysis / K. Bathe. — Москва: Наука, 1985. — 648 с.
- [7] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — Москва: Наука, 1986. — 288 с.
- [8] Булычева, Е. Ю. Декомпозиционный подход к решению плохо обусловленных задач параметрической идентификации / Е. Ю. Булычева, Ю. Г. Булычев, И. В. Бурлай // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 5. — С. 28-31.

## Choice of formal model of a reverse problem of deformation thin-walled system, using supervision results

Nataliya Obodan, Nataliya Huk

*The problem about the choice of the formal model from a great number of models of the deformation thin-walled system with the use of metric is considered. Decomposition approach for determination of parameters of a reverse problem is developed. The procedure of model choice and determination of parameters that characterise it allows us to estimate the equivalence between the model and the real systems. Additional calculations as in the known procedures are not required.*

## Выбор формальной модели обратной задачи деформируемой тонкостенной системы по результатам наблюдений

Наталья Ободан, Наталья Гук

*В работе рассматривается вопрос о выборе формальной модели из множества параметризованных моделей для реальной деформируемой тонкостенной системы с использованием метрики. Для определения вектора параметров обратной задачи деформирования разработан декомпозиционный подход. Предлагаемая процедура выбора модели и характеризующих ее параметров позволяет оценить адекватность модели реальной системе и не требует дополнительных вычислений по сравнению с известными процедурами.*

Представлено профессором Б. Герою

Отримано 06.07.09