

Дисперсія механоелектромагнітних хвиль у локально градієнтному діелектрику за врахування інерції поляризації

Василь Кондрат¹, Ольга Грицина²

¹ д. ф.-м. н., с. н. с., Львівський медичний інститут, вул. Поліщука, 76, Львів, 79015, e-mail: Vasyk.kondrat@gmail.com

² к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дундаса, 15, Львів, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua

Виходячи із співвідношень моделі локально градієнтної електромагнітотермомеханіки неферромагнітних діелектриків, яка враховує інерцію процесу поляризації, проведено дослідження впливу інерції на параметри плоских хвиль. Ключову систему рівнянь моделі записано відносно скалярних і векторних потенціалів вектора переміщення, векторів електромагнітного поля та приведеної енергетичної міри впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію. На основі аналізу дисперсійних рівнянь показано, що врахування інерції поляризації приводить до дисперсії фазової швидкості електромагнітної хвилі та зміни характеру дисперсії поздовжніх хвиль. Виявлено критичні значення частоти, переходячи через які, змінюється характер електромагнітної хвилі та поздовжньої хвилі другого роду.

Ключові слова: взаємозв'язані електромагнітотермомеханічні процеси, локальне зміщення маси, поляризовні тіла, нелокальність, інерція поляризації, дисперсія хвиль.

Вступ. У роботі [1] запропоновано повну систему співвідношень локально градієнтної теорії електромагнітотермомеханіки поляризованих деформованих неферромагнітних твердих тіл, у якій окрім теплових, електромагнітних й деформаційних процесів враховано також процес локального зміщення маси та інерційність поляризації. При цьому процеси деформування, поляризації й локального зміщення маси прийнято оборотними, а інерцію поляризації враховано за використання підходу, поданого у працях [2, 3] та розвиненого у [4-10]. Обґрунтування такого підходу за використання теорії динаміки ґраток містять роботи [11, 12]. Ефективність моделей, які враховують інерційність поляризації, продемонстровано на прикладах поширення акусто-оптичних і поверхневих хвиль, дослідження механоелектромагнітних полів, збурених ударним навантаженням, тощо [5-7]. Відзначимо також, що інші засади врахування інерційності різних форм руху запропоновано в працях [13, 14], де у диференціал повної енергії введено складники, які є згортокою імпульсів і спряжених до них потоків. Однак, процес поляризації у роботах [13, 14] не розглядали.

У праці [15] на основі співвідношень локально градієнтної теорії електромагнітної механіки поляризованих деформованих неферромагнітних твердих тіл досліджено взаємодію механоелектромагнітних процесів і локального зміщення

маси, а також вивчено поширення плоских хвиль у неферомагнітному діелектрику. При цьому інерційність процесу поляризації не враховано. Відтак, метою цієї роботи є вивчення в ізотермічному наближенні впливу інерційності поляризації на поширення та взаємодію хвильових процесів у неферомагнітному діелектрику на основі локально градієнтної моделі, запропонованої в роботі [1].

1. Вихідні співвідношення модельного опису

Нехай в ізотропному термопружному поляризованому неферомагнітному тілі протікають фізико-механічні процеси, визначальними з яких є процеси деформування, теплоперенесення, електромагнітні та локального зміщення маси [16]. Будемо також враховувати інерційність процесу поляризації [4].

Система рівнянь локально градієнтної моделі [1] включає рівняння балансу маси та наведеної маси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0, \quad (1)$$

рівняння руху

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho \mathbf{F}_* + \mathbf{F}_e, \quad (2)$$

балансу ентропії

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + T \sigma_s + \rho \mathcal{R} \quad (3)$$

та рівняння Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

Тут

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho (\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p} - \rho_m \mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla \mu'_\pi) \hat{\mathbf{I}}; \quad \mathbf{F}_* = \mathbf{F} + \rho_m \nabla \mu'_\pi - \boldsymbol{\pi}_m \cdot \nabla \nabla \mu'_\pi;$$

$$\mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E}_* + \left(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho \mathbf{p})}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} + \rho (\nabla \mathbf{E}_*) \cdot \mathbf{p};$$

ρ — густина маси; $\rho_{m\pi}$ — густина наведеної маси, яка пов'язана з вектором локального зміщення маси Π_m співвідношенням $\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \Pi_m$ [16]; $\mathbf{J}_{ms} = \frac{d\Pi_m}{dt}$; $\rho_m = \rho_{m\pi}/\rho$; $\boldsymbol{\pi}_m = \Pi_m/\rho$; \mathbf{v} — вектор швидкості континуума центрів мас; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напружень Коші; \mathbf{E} та \mathbf{H} — вектори напруженостей електричного та магнітного полів; \mathbf{D} — вектор індукції електричного поля; $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho$, \mathbf{P} — вектор поляризації; $\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ та $\mathbf{J}_{e*} = \mathbf{J}_e - \rho_e \mathbf{v}$ — вектори напруженості електричного

поля й густини електричного струму в системі відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю \mathbf{v} стосовно лабораторної системи координат; \mathbf{J}_e та \mathbf{B} — вектори густини електричного струму та індукції магнітного поля у лабораторній системі координат (для неферромагнітного середовища $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$); ρ_e — густина вільного електричного заряду; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ — хімічний потенціал; μ_π — міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [16]; s — питома ентропія, T — абсолютна температура, \mathbf{J}_q — потік тепла; σ_s — виробництво ентропії; \mathfrak{R} — розподілені джерела тепла; \mathbf{F} — масові сили; t — час; $d(\dots)/dt = \partial(\dots)/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla(\dots)$ — повна похідна за часом; $\hat{\mathbf{I}}$ — одиничний тензор.

Для ізотропного початково однорідного тіла нелокальні лінійні рівняння стану [1] і кінетичні співвідношення набувають вигляду

$$\begin{aligned} s &= s_0 + \frac{C_V}{T_0} \tilde{T} + \frac{1}{\rho_0} K \alpha_T e + \beta_{T\mu} \tilde{\mu}'_\pi, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* &= 2G \hat{\mathbf{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) e - K \alpha_T \tilde{T} - K \alpha_\mu \tilde{\mu}'_\pi \right] \hat{\mathbf{I}}, \\ \rho_m &= d_\mu \tilde{\mu}'_\pi + \frac{1}{\rho_0} K \alpha_\mu e + \beta_{T\mu} \tilde{T}, \\ \mathbf{p} + \chi_E d_E \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} &= \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \tilde{\mu}'_\pi, \\ \boldsymbol{\pi}_m + \chi_{Em} d_E \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} &= \chi_{Em} \mathbf{E} - \chi_m \nabla \tilde{\mu}'_\pi; \\ \mathbf{J}_e &= \sigma_e \mathbf{E} + \sigma_e \eta \nabla T, \\ \mathbf{J}_q &= -\lambda \nabla T + \pi_t \mathbf{J}_e. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут $\hat{\mathbf{e}} = \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] / 2$ — тензор деформації; $e = \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{I}}$; \mathbf{u} — вектор переміщення; індекс «Т» вказує на операцію транспонування тензора; $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$; $\tilde{T} = T - T_0$; $s_0, T_0, \mu'_{\pi 0}$ — значення ентропії, температури та потенціалу μ'_π у вихідному стані, за який приймаємо стан ненавантаженого безмежного середовища; σ_e, λ — коефіцієнти електро- й теплопровідності; $\pi_t = -T\eta$, коефіцієнти η, π_t характеризують термоелектричні явища; $K, G, d_\mu, C_V, \alpha_T, \alpha_\mu, \beta_{T\mu}, \chi_E, \chi_m, \chi_{Em}$ — характеристики матеріалу.

Зауважимо, що врахування інерції поляризації проявилось наявністю других похідних за часом від питомого вектора поляризації у визначальних співвідношеннях для векторів \mathbf{p} та $\boldsymbol{\pi}_m$.

2. Ключові рівняння в лінійному наближенні

Для ідеальних діелектриків ($\rho_e = 0, \sigma_e = 0$) в ізотермічному наближенні ключова лінеаризована система рівнянь моделі, записана стосовно вектора переміщень \mathbf{u} , приведенного потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, напруженості електричного \mathbf{E} й індукції магнітного \mathbf{B} полів, має вигляд

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(K + \frac{1}{3} G \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \Delta \mathbf{u} - K \alpha_\mu \nabla \tilde{\mu}'_\pi + \rho_0 \mathbf{F},$$

$$\Delta \tilde{\mu}'_\pi - \frac{d_\mu}{\chi_\mu} \tilde{\mu}'_\pi = \frac{K \alpha_\mu}{\rho_0 \chi_\mu} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_0 \chi_p}{\rho_0 \chi_\mu} \nabla \cdot \mathbf{E}; \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{L}' (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{\rho_0 \chi_{Em}}{\varepsilon} \Delta \tilde{\mu}'_\pi = 0,$$

$$\nabla \times (\mathbf{L} \mathbf{B}) = \rho_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \mathbf{L} \mathbf{E} + \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \tilde{\mu}'_\pi \right). \quad (8)$$

Тут $\mathbf{L} = 1 + \chi_E d_E \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\mathbf{L}' = 1 + \chi_E d_E \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\chi_\mu = \chi_m - \chi_{Em}^2 / \chi_E$, $\chi_p = \chi_{Em} / \chi_E$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \rho_0 \chi_E$ — діелектрична проникливість середовища.

3. Потенціали та умова калібрування

Подамо вектори переміщення \mathbf{u} і масових сил \mathbf{F} сумами їх потенціальних (φ_u й Φ) та вихрових ($\boldsymbol{\psi}_u$ й $\boldsymbol{\Psi}$) складників, а вектори напруженості електричного \mathbf{E} та індукції магнітного \mathbf{B} полів — через скалярний φ_e та векторний \mathbf{A} потенціали

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_u + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_u, \quad \mathbf{F} = \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_u = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi_e - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (10)$$

Із рівнянь електродинаміки (8) і співвідношень (10) одержуємо два однотипні рівняння

$$\mathbf{L} (\Delta \mathbf{A}) - \varepsilon \mu_0 \mathbf{L}' \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{L} (\Delta \varphi_{em}) - \varepsilon \mu_0 \mathbf{L}' \frac{\partial^2 \varphi_{em}}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

для визначення векторного \mathbf{A} й узагальненого скалярного φ_{em} потенціалів, де

$$\varphi_{em} = \varphi_e + \chi_E d_E \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial t^2} + \frac{\rho_0 \chi_{Em}}{\varepsilon} \tilde{\mu}'_\pi. \quad (12)$$

Під час одержання рівнянь (11) використано таку умову калібрування

$$\mathbf{L}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \varphi_{em}}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Співвідношення (13) можна трактувати як узагальнену умову калібрування Лоренца. Відзначимо також, що у разі нехтування інерційністю поляризації ($d_E = 0$) потенціал φ_{em} співпадає з потенціалом φ_{em} , введеним у праці [15].

Підставляючи подання (9) у систему рівнянь (7), для визначення скалярних φ_u , $\tilde{\mu}'_\pi$ та векторного Ψ_u потенціалів отримаємо

$$\Delta \Psi_u - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial t^2} + \frac{1}{c_2^2} \Psi = 0, \quad (14)$$

$$\Delta \varphi_u - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2} \Phi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{Z}} \tilde{\mu}'_\pi, \quad (15)$$

$$\mathbf{L} \left[\mathbf{L}'(\Delta \tilde{\mu}'_\pi - \lambda^2 \tilde{\mu}'_\pi) + \mathfrak{B} \Delta \tilde{\mu}'_\pi - \mathfrak{Z} \lambda^2 \mathbf{L}'(\Delta \varphi_u) \right] = 0. \quad (16)$$

Тут $c_1 = \sqrt{\left(K + \frac{4}{3}G\right) / \rho_0}$ і $c_2 = \sqrt{G / \rho_0}$ — відповідно швидкості поширення поздовжньої та поперечної хвиль, а

$$\lambda^2 = \frac{d_\mu}{\chi_\mu}, \quad \mathfrak{M} = \frac{K^2 \alpha_\mu^2}{\rho_0 d_\mu \left(K + \frac{4}{3}G\right)}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{K \alpha_\mu}{\rho_0 d_\mu}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\chi_{Em}^2}{\chi_m \chi_E - \chi_{Em}^2}.$$

Бачимо, що для знаходження векторного потенціалу Ψ_u маємо рівняння (14), яке не пов'язане з рештою рівнянь цієї системи, тоді як скалярні потенціали φ_u та $\tilde{\mu}'_\pi$ є розв'язки взаємозв'язаної системи рівнянь (15), (16). Таким чином, процес локального зміщення маси пов'язаний з процесами стиску-розтягу, а зміна форми на нього не впливає.

Використаємо систему рівнянь (11), (14)-(16) для дослідження впливу інерційності поляризації на поширення плоскої гармонічної хвилі.

4. Вплив інерційності поляризації на дисперсію механоелектромагнітних хвиль

Нехай плоска гармонічна хвиля частоти ω поширюється у безмежному однорідному середовищі, віднесеному до декартової системи координат (x, y, z) . Приймаємо, що хвиля поширюється вздовж осі Ox і всі шукані функції системи рівнянь (11), (14)-(16) залежать лише від просторової координати x і часу t . За відсутності масових сил ($\Phi = 0$, $\Psi = 0$) рівняння (11), (14)-(16) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi_u}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial t^2} &= \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{S}} \tilde{\mu}'_\pi, \\ \frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x^2} - \frac{\lambda^2}{1 + \mathfrak{B}} \tilde{\mu}'_\pi + \frac{\mathfrak{D}}{1 + \mathfrak{B}} \frac{\partial^4 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x^2 \partial t^2} - \mathfrak{D} \lambda^2 \frac{\partial^2 \tilde{\mu}'_\pi}{\partial t^2} &= \lambda^2 \mathfrak{S} \left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} + \mathfrak{D} \frac{\partial^4 \varphi_u}{\partial x^2 \partial t^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mathfrak{D} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут $\mathfrak{D} = \chi_E d_E \varepsilon_0 / \varepsilon$.

Будемо шукати функції $f(x, t) = \{\varphi_u(x, t), \Psi_u(x, t), \mu'_\pi(x, t), \mathbf{A}(x, t), \varphi_{em}(x, t)\}$ у вигляді $f(x, t) \sim e^{-ikx+i\omega t}$, де k — хвильове число. Тоді з системи рівнянь (17) одержимо такі дисперсійні рівняння

$$\begin{aligned} k^2 - \frac{1}{c_2^2} \omega^2 &= 0, \\ k^4 + k^2 \left[\lambda^2 (1 + \mathfrak{M}) \frac{1 - \mathfrak{D} \omega^2}{1 + \mathfrak{B} - \mathfrak{D} \omega^2} - \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \right] - \left(\lambda \frac{\omega}{c_1} \right)^2 \frac{1 - \mathfrak{D} \omega^2}{1 + \mathfrak{B} - \mathfrak{D} \omega^2} &= 0, \\ k^2 \left(1 - \mathfrak{D} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \omega^2 \right) - \varepsilon \mu_0 \omega^2 (1 - \mathfrak{D} \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язки системи рівнянь (18) для хвиль, що поширюються у додатному напрямку осі Ox , є такі

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c_2}, \\ k_{2,3} &= \sqrt{-\frac{1}{2} \left[\lambda^2 D (1 + \mathfrak{M}) - \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\lambda^2 D (1 + \mathfrak{M}) - \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2 \right]^2 + 4 \lambda^2 D \left(\frac{\omega}{c_1} \right)^2}}, \\ k_4 &= \sqrt{\varepsilon \mu_0} \omega \sqrt{\frac{1 - \mathfrak{D} \omega^2}{1 - \mathfrak{D} \omega^2 \varepsilon / \varepsilon_0}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тут

$$D = \frac{1 - \mathfrak{D} \omega^2}{1 + \mathfrak{B} - \mathfrak{D} \omega^2}. \quad (20)$$

Хвильове число k_1 відповідає поперечній пружній хвилі. Ця хвиля незагасаюча та бездисперсійна. За прийнятого тут модельного опису локальне зміщення маси й електромагнітні процеси не впливають на поперечну хвилю.

Якщо у співвідношеннях (19) використати малість параметра \mathfrak{M} і обмежитися лише складниками, лінійними відносно \mathfrak{M} , то вирази для хвильових чисел k_2 і k_3 значно спростяться. У підсумку одержимо

$$k_2 = \frac{\omega}{c_1} \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{M}D(\omega)}{D(\omega) + \omega^2/(c_1\lambda)^2}}, \quad k_3 = \lambda \sqrt{-D(\omega) \left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{D(\omega) + \omega^2/(c_1\lambda)^2}\right)}.$$

За врахування співвідношення (20) цим формулам надамо такого вигляду

$$k_2 = \frac{\omega}{c_1} \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{M}}{1 + \frac{\omega^2}{c_1^2\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{D}\omega^2}\right)}},$$

$$k_3 = \lambda \sqrt{-\frac{1 - \mathfrak{D}\omega^2}{1 + \mathfrak{B} - \mathfrak{D}\omega^2} \left[1 + \frac{\mathfrak{M} \left(1 + \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{D}\omega^2}\right)}{1 + \frac{\omega^2}{c_1^2\lambda^2} \left(1 + \frac{\mathfrak{B}}{1 - \mathfrak{D}\omega^2}\right)}\right]}.$$

Хвильове число k_2 описує модифіковану поздовжню пружну хвилю (поздовжню хвилю першого роду). Модифікація пружної хвилі зумовлена локальним зміщенням маси, його взаємозв'язком із механічними процесами, а також врахуванням інерційності поляризації. Цій хвилі властива високочастотна дисперсія, яка тепер, на відміну від [15], проявляється у двох частотних діапазонах. Для частот $\omega > \omega_1$, де $\omega_1 = c_1\lambda$, спостерігаємо зменшення фазової швидкості з ростом частоти, що узгоджується з результатами, одержаними раніше у працях [15, 17], де інерцію поляризації не враховували. В околі частоти $\omega_2 = 1/\sqrt{\mathfrak{D}}$ для $\omega < \omega_2$ зі збільшенням частоти спостерігаємо зростання фазової швидкості, яка досягає максимального значення за частоти $\omega = \omega_2$, а далі, в області $\omega > \omega_2$, з подальшим ростом частоти зменшується до вихідного значення. Виникнення цього піку фазової швидкості пов'язано з урахуванням інерції поляризації. Зазначимо також, що описана вище дисперсія модифікованої пружної хвилі першого роду буде відсутня в разі рівності нулю коефіцієнта \mathfrak{M} , що описує взаємозв'язок процесів локального зміщення маси та деформування [15].

Хвильове число k_3 відповідає поздовжній хвилі другого роду. За частот $\omega < 1/\sqrt{\mathfrak{D}}$ воно відображає власне не хвилю, а коливання неоднорідності в околі початку координат [15]. Однак, на відміну від [15], врахування інерції поляризації привело до виникнення частотної області $1/\sqrt{\mathfrak{D}} < \omega < \sqrt{(1 + \mathfrak{B})/\mathfrak{D}}$, у якій хвильове число k_3 стає додатне й описує плоску незагасаючу хвилю, фазова швидкість якої суттєво залежить від частоти. Для частот $\omega > \sqrt{(1 + \mathfrak{B})/\mathfrak{D}}$ хвильове число k_3 знову відповідає стаціонарній гармонічно коливній неоднорідності,

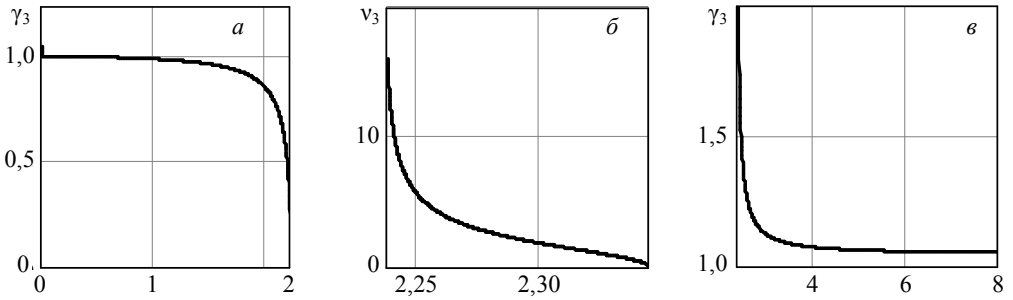


Рис. 1. Залежність від частоти нормованих коефіцієнта загасання γ_3 (а, в) та фазової швидкості v_3 (б) поздовжньої хвилі другого роду

глибина розподілу якої зростає зі збільшенням частоти (див. рис. 1, де подано залежності від безрозмірної частоти $\Omega = \omega/\omega_2$ нормованих фазової швидкості та коефіцієнта загасання γ_3 хвилі другого роду у відповідних частотних діапазонах).

Хвильове число k_4 відповідає електромагнітній хвилі. У разі нехтування інерційністю поляризації ($\mathcal{D} = 0$) з останнього співвідношення системи рівнянь (19) для k_4 отримуємо вираз $k_4 = \sqrt{\epsilon\mu_0}\omega$, який відповідає незагасаючій бездисперсійній електромагнітній хвилі, що поширюється в тілі з фазовою швидкістю $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$. Наслідком врахування інерції поляризації є виникнення частотної області $\sqrt{\epsilon_0/(\epsilon\mathcal{D})} < \omega < 1/\sqrt{\mathcal{D}}$, у якій хвильове число k_4 стає уявним, що відповідає виродженню електромагнітної хвилі у гармонічне коливання просторової неоднорідності в околі точки $x = 0$. За умови $\omega > 1/\sqrt{\mathcal{D}}$ хвильове число k_4 знову відповідає електромагнітній хвилі, фазова швидкість якої зі збільшенням частоти прямує до швидкості поширення електромагнітної хвилі у вакуумі (див. рис. 2).

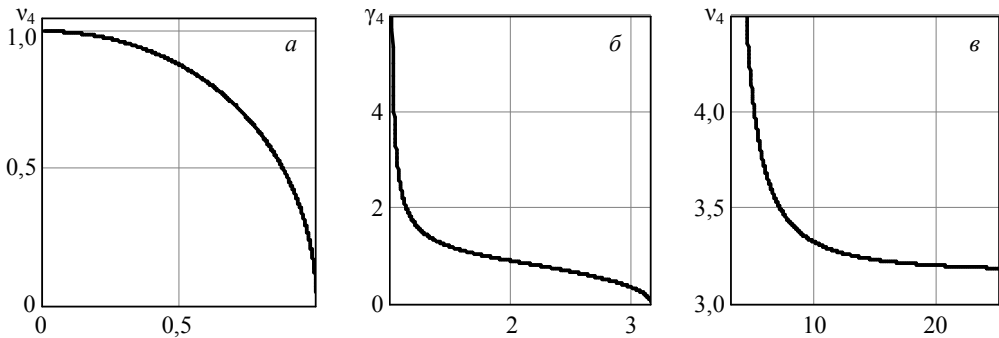


Рис. 2. Залежність від частоти нормованих фазової швидкості v_4 (а, в) та коефіцієнта загасання γ_4 (б) електромагнітної хвилі

Таким чином, врахування інерції поляризації привело не лише до зміни характеру дисперсії механоелектромагнітних хвиль, а й до виникнення області частот, у якій змінюється характер хвильового процесу. При цьому для електромагнітної хвилі цю частотну область можна трактувати як область запирання хвилі, спричинену врахуванням інерції поляризації. Наслідком врахування інерції поляризації також є існування частотного діапазону, у якому коливний процес, який відповідає хвильовому числу k_3 , стає хвильовим.

Висновки. Проведено дослідження впливу інерції поляризації на параметри плоских хвиль у неферромагнітному локально градієнтному діелектрику. На основі аналізу дисперсійних рівнянь встановлено, що наслідком врахування інерції поляризації є дисперсія електромагнітної хвилі та зміна характеру дисперсії поздовжніх хвиль. Виявлено критичні значення частоти, при переході через які змінюється характер електромагнітної хвилі та поздовжньої хвилі другого роду.

Література

- [1] *Kondrat, V.* Mechanical and electromagnetic wave interaction in linear isotropic dielectrics with local mass displacement and polarization inertia / *V. Kondrat, O. Hrytsyna* // *Vibrations in Physical Systems*, ed. by *C. Cempel, M. W. Dobry*. — Poznan, 2010. — Vol. XXIV. — P. 227-232.
- [2] *Maugin, G. A.* Deformable Dielectrics II. Voigt's Intramolecular Force Balance in Elastic Dielectrics / *G. A. Maugin* // *Arch. Mech.* — 1977. — Vol. 29. — P. 143-151.
- [3] *Maugin, G. A.* Deformable Dielectrics III. A Model of Interactions / *G. A. Maugin* // *Arch. Mech.* — 1977. — Vol. 29. — P. 251-258.
- [4] *Можен, Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред / *Ж. Можен*. — Москва: Мир, 1991. — 560 с.
- [5] *Pouget, J.* Coupled Acoustic-Optic Modes in Deformable Ferroelectrics / *J. Pouget, G. A. Maugin* // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1980. — Vol. 68. — P. 588-601.
- [6] *Pouget, J.* Bleustein-Gulyaev Surface Modes in Elastic Ferroelectrics / *J. Pouget, G. A. Maugin* // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1981. — Vol. 69. — P. 1304-1318.
- [7] *Pouget, J.* Piezoelectric Rayleigh Waves in Elastic Ferroelectrics / *J. Pouget, G. A. Maugin* // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1981. — Vol. 69. — P. 1319-1325.
- [8] *Hadjigeorgiou, E. P.* A General Theory for Elastic Dielectrics — Part I. The Vectorial Approach / *E. P. Hadjigeorgiou, V. K. Kalpakides, C. V. Massalas* // *Int. J. of Non-Linear Mech.* — 1999. — Vol. 34, No 5. — P. 831-841.
- [9] *Dolfin, M.* Thermodynamics of Deformable Dielectrics with a Non-Euclidean Structure as Internal Variable / *M. Dolfin, M. Francaviglia, L. Restuccia* // *Technische mechanik.* — 2004. — Vol. 24, No 2. — P. 137-145.
- [10] *Maugin, G. A.* Thermodynamics of Inhomogeneous Ferroelectrics / *G. A. Maugin, L. Restuccia* // *J. Mech. Mat. and Struct.* — 2008. — Vol. 3, No 6. — P. 1113-1123.
- [11] *Pouget, J.* Lattice Model for Elastic Ferroelectric Crystals: Microscopic Approximation / *J. Pouget, A. Askar, G. A. Maugin* // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 33. — P. 6304-6319.
- [12] *Pouget, J.* Lattice Model for Elastic Ferroelectric Crystals: Continuum Approximation / *J. Pouget, A. Askar, G. A. Maugin* // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 33. — P. 6320-6325.
- [13] *Бурак, Я. Й.* Термодинамічні аспекти узагальної термомеханіки / *Я. Й. Бурак, Т. С. Нагірний* // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* — 1990. — № 8. — С. 34-37.
- [14] *Бурак Я. Й.* Визначальні співвідношення узагальної електротермомеханіки / *Я. Й. Бурак, О. Р. Грицина, Т. С. Нагірний* // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* — 1990. — № 9. — С. 32-35.
- [15] *Кондрат, В. Ф.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси / *В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина* // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2009. — Т. 52, № 1. — С. 150-158.

- [16] Бурак, Я. Й. Приповерхневі механоелектромагнітні явища у термопружних поляризованих тілах за локального зміщення маси / Я. Й. Бурак, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2007. — № 4. — С. 5-17.
- [17] Yang, X. M. Electric field gradient effects in anti-plane problems of polarized ceramics / X. M. Yang, Y. T. Hu, J. S. Yang // Int. J. Solids and Struct. — 2004. — Vol. 41, No. 24-25. — P. 6801-6811.

Electromagnetomechanical waves dispersion in local gradient dielectrics with polarization inertia

Vasyl Kondrat, Olha Hrytsyna

Based on the relationships of local gradient theory of electromagnetothermomechanics of nonferromagnetic dielectrics, which takes into account the inertia of the process of polarization, the inertia influence on the parameters of plane waves is studied. The corresponding key system of equations is written on the scalar and vector potentials of the displacement vector, the vectors of the electromagnetic field and the reduced energy measures of the influence of local mass displacement on the internal energy. The analysis of the dispersion equations shows that the account of polarization inertia leads to the dispersion of phase velocity of electromagnetic waves and changes behaviour of the longitudinal waves dispersion. The critical values of frequency affecting the behaviour of electromagnetic wave and of the longitudinal wave of the second kind, when passing through these frequencies, are established.

Дисперсия механоэлектромагнитных волн в локально градиентном диэлектрике с учетом инерции поляризации

Василий Кондрат, Ольга Грицина

Исходя из соотношений модели локально градиентной электромагнитотермомеханики неферромагнитных диэлектриков, учитывающей инерцию процесса поляризации, исследовано влияние инерции на параметры плоских волн. Ключевая система уравнений модели записана относительно скалярных и векторных потенциалов вектора перемещения, векторов электромагнитного поля и приведенной энергетической меры влияния локального смещения массы на внутреннюю энергию. На основе анализа дисперсионных уравнений показано, что учет инерции поляризации приводит к дисперсии фазовой скорости электромагнитной волны и изменению характера дисперсии продольных волн. Выявлены критические значения частоты, при переходе через которые меняется характер электромагнитной волны и продольной волны второго рода.

Отримано 28.07.09