

Об оптимальном выборе параметров нагруженных трёхслойных пластин по критерию стоимости

Имре Тимар¹, Адриан Торский², Валентин Щукин³

¹ проф., Паннон университет, ул. Университетская, 10, Веспрем, Венгрия, 8200, e-mail: timari@almos.vein.hu

² м. н. с., Центр математического моделирования ИППММ им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Дудаева, 15, Львов, 79000, Украина, e-mail: adrian@cmm.lviv.ua

³ с. н. с., Центр математического моделирования ИППММ им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Дудаева, 15, Львов, 79000, Украина, e-mail: scsukin.valentyin@gmail.com

Рассмотрена задача оптимизации трёхслойных пластин, наружные слои которых изготовлены из стали, а средние — из пенополиуретана. Целевая функция выражается стоимостью рассматриваемой конструкции и зависит от её геометрических размеров, которые подчинены ограничениям на механические параметры: напряжения и прогиб. Решение задачи математического моделирования конструкции производилось с применением метода безусловной минимизации, когда определяется минимум выбранной целевой функции и оптимальная толщина среднего слоя конструкции.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, трёхслойные пластины, снижение стоимости конструкции.

Введение. При проектировании и создании новых систем, конструкций и устройств, как правило, исходят из необходимости учитывать различные требования. Такими, применительно к деформируемым механическим системам, являются — прочность, жесткость и т. д. всех элементов системы [1].

Решение задачи, удовлетворяющее всем заданным ограничениям, называется допустимым. Из таких допустимых решений в процессе решения экстремальных задач выбирается оптимальное или рациональное. Под оптимальным будем понимать такое решение, которое является наилучшим с точки зрения выбранного критерия оптимальности.

Примерами таких задач оптимального проектирования являются определение конструктивных параметров машиностроительного оборудования или инженерных сооружений, которые должны выполнять определённые ограничения как по механическим, в частности, прочностным, и тепловым свойствам [2, 3], динамическому поведению [4], а также соответствовать требованию минимальной стоимости.

В последние десятилетия многослойные панели (пластины) все чаще применяются в строительстве и машиностроении [5]. Благодаря целесообразному выбору состава их слоев могут быть созданы многослойные панели или пластины с наперед заданными статическими и конструктивными свойствами. Идея многослойных конструкций не нова, но, в первую очередь, благодаря развитию авиации, где требуются

наиболее лёгкие и высокопрочные материалы, был дан толчок к интенсивному созданию облегченных конструкций. В настоящее время многослойные конструкции стали широко использоваться в разных технических областях, в частности, в строительстве, производстве транспортных средств, теплоизоляционной технике и т. д. [6].

В данной работе рассматривается оптимальное проектирование трёхслойных пластин с наружными слоями из листовых материалов (средний слой — пенополиуретан) при нелинейных механических ограничениях на данную конструкцию. При этом в качестве одного из параметров ограничения использован критерий стоимости конструкции. Приведен пример такого расчета для трёхслойного пакета пластины.

1. Математическая постановка задачи

Для расчета заданной многослойной конструкции выделяется некоторая совокупность независимых конструктивных параметров (независимых переменных) x_1, x_2, \dots, x_n , значения которых однозначно определяют все остальные параметры и характеристики конструкции. Эти переменные — x_1, x_2, \dots, x_n представляют собой, например, геометрические размеры конструкции (изделия) или другие конструктивные параметры [7].

Критерий оптимальности является некоторой функцией независимых конструктивных параметров $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где \vec{x} — вектор параметров.

Задача состоит в определении вектора $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, который является решением задачи минимизации функции $f(\vec{x})$, при заданных ограничениях

$$0 \leq g_i(\vec{x}), \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 = h_j(\vec{x}), \quad j = \overline{1, p},$$

здесь $g_i(\vec{x}), h_j(\vec{x})$ — нелинейные функции.

Для решения задач нелинейного программирования существуют разные математические методы. Например, метод последовательной безусловной минимизации (МПБМ), а также эволюционные алгоритмы или программирование с применением MATLAB (MATrix LABoratory) [8].

При оптимизации различных технических условий исследуемой задачи мы применили метод МПБМ и эволюционный алгоритм [8].

2. Постановка задачи оптимизации трёхслойных панелей (пластин)

Рассмотрим оптимальное проектирование симметричных трёхслойных квадратных (со стороной a) шарнирно опертых пластин под равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p (рис. 1). Здесь $h_1 = h_3 \equiv h$ — толщины внешних слоев, h_2 — толщина слоя пенополиуретана, которая является неизвестной. За целевую функцию в данной задаче выбрана стоимость рассматриваемой конструкции, которая включает:

- стоимость материала внешних слоев (для примера сталь) — K_{cm} ,
- стоимость внутреннего слоя (пенополиуретан) — K_n ,
- стоимости резания и очистки внешних слоев — K_p и K_o .

Таким образом, целевая функция запишется в виде

$$K = K_{cm} + K_n + K_p + K_o. \quad (1)$$

Применяя обозначения рис. 1, запишем отдельные слагаемые целевой функции $K_{cm} = 2k_{cm} a^2 h$, где k_{cm} — удельная стоимость внешних слоев.

Стоимость пенополиуретана $K_n = k_n a^2 h_2$, здесь k_n — удельная стоимость внутреннего (среднего) слоя. Стоимость резания $K_p = k_p l_p$, где k_p — удельная стоимость резания внешних слоев (на 1 метр), l_p — длина резания. Стоимость очистки поверхности стальных пластин $K_o = k_o A$, где k_o — удельная стоимость очистки внешних слоев, A — площадь очищенной поверхности.

3. Построение ограничений задачи

Максимальный прогиб трехслойной пластины должен быть меньше допустимого значения для прогиба w_{gon}

$$w_{max} \leq w_{gon} = C_w a. \quad (2)$$

Обычно принимают, что $C_w = 1/300$ — коэффициент для допустимого прогиба.

Прогиб в центре плиты (пластины) также можно определить по формуле из работы [6] (энергетический метод Ритца)

$$w_{max} = \frac{p a^2}{h + h_2} \left[\frac{2 a^2 (1 - \nu^2)}{E h (h_2 + h)} \beta_1 + \frac{\pi^2}{G_2} \beta_2 \right],$$

здесь p — равномерно распределенная нагрузка, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала внешних слоев конструкции, G_2 — модуль сдвига материала среднего слоя, β_1 и β_2 — параметры конструкции согласно обозначений, принятых в работе [9].

Максимальное нормальное и касательное напряжения в наружных слоях конструкции должны быть меньше, чем допустимые значения нормальных σ_{gon} и касательных τ_{gon} напряжений

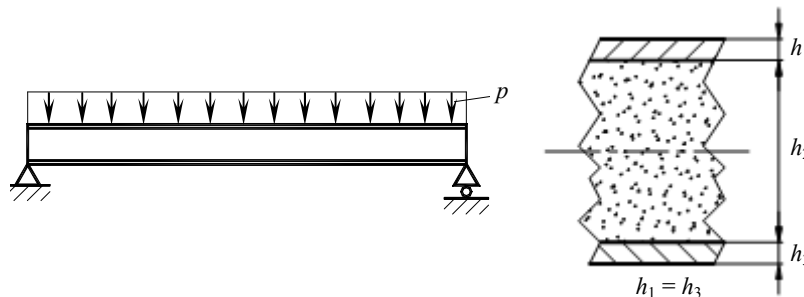


Рис. 1. Трёхслойная пластина

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{gon}, \quad \tau_{\max} \leq \tau_{gon}. \quad (3)$$

Максимальные нормальное и касательное напряжения во внешних слоях определяются согласно формулам и обозначениям, применяемым в работе [9]

$$\sigma_{\max} = \frac{pa^2}{h(h_2 + h)}(\beta_4 + \nu\beta_3), \quad \tau_{\max} = \frac{pa^2}{h(h_2 + h)}(1 - \nu)\beta_5,$$

где β_i ($i = \overline{3,5}$) — постоянные величины, для квадратных пластин $\beta_3 = \beta_4$.

Напряжение сдвига в среднем слое примём постоянной величиной по всей высоте среднего слоя, где максимальное значение $\tau_{2\max}$ не должно превышать допустимого значения τ_{2gon}

$$\tau_{2gon} \geq \tau_{2\max}. \quad (4)$$

Максимальное касательное напряжение в среднем слое определяется согласно формуле [6]

$$\tau_{2\max} = \frac{pa}{h_2 + h}\beta_6,$$

где β_6 — параметр, определяемый характеристиками материала среднего слоя конструкции.

Исходя из технологии производства, можно принять следующие ограничения по минимальной толщине среднего слоя конструкции $h_{2\min}$

$$h_{2\min} \leq h_2, \quad (5)$$

где $h_{2\min}$ определяется условиями технологического процесса создания конструкции пластины.

Для решения поставленной нелинейной оптимизационной задачи использовался модифицированный алгоритм МПБМ.

4. Пример расчета панели

При оптимизации трёхслойной пластины неизвестной величиной является толщина ее среднего слоя. То есть определяется минимум целевой функции (1) при ограничениях по напряжениям (3), (4) и перемещениям (2), а также с учетом технологии изготовления (5).

Исходные данные для панели:

$a = 2000; 3000; 4000$ мм; $p = 10, \dots, 30$ кПа; $k_{cm} = 1600$ д. е. / м² (где д. е. — денежная единица по выбору, а в расчете был взят венгерский форинт); $k_n = 2000$ д. е. / м³; $k_p = 30$ д. е. / м; $k_o = 70$ д. е. / м²; $h = 1$ мм; $\sigma_{gon} = 200$ МПа; $\tau_{\max} = 115$ МПа; $\tau_{2gon} = 0,28$ МПа; $E = 200$ ГПа; $G_2 = 3,1$ ГПа; $\beta_1 = 0,0042$; $\beta_2 = 0,0077$; $\beta_3 = \beta_4 = 0,038$; $\beta_5 = 0,047$; $\beta_6 = 0,33$; $h_{2\min} = 5$ мм.

Оптимальные величины толщины среднего слоя из пенополиуретана и минимум целевой функции (стоимость) при заданных механических ограничениях

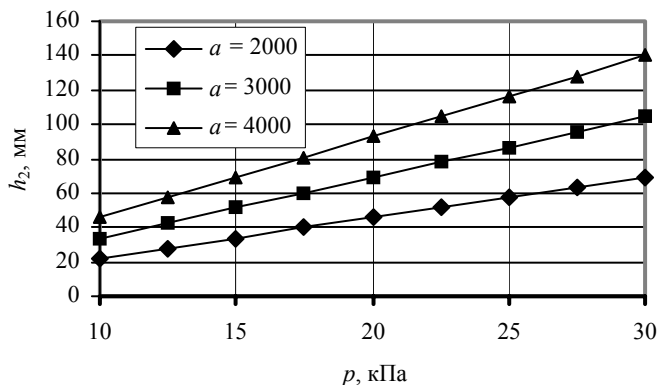


Рис. 2. Оптимальные толщины пенополиуретана

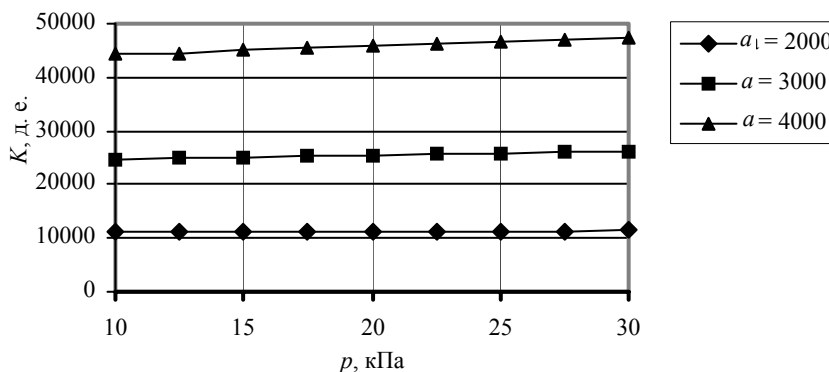


Рис. 3. Минимальные значения целевой функции

представлены на рис. 2 и 3. На основе полученных результатов можно сделать вывод, что минимальные толщины среднего слоя и минимумы стоимости всей конструкции практически линейно зависят от нагрузки на рассматриваемую пластину.

Предложенный метод оптимального проектирования можно применять и при решении других технических проблем. По результатам оптимизации снижается стоимость создаваемой конструкции без уменьшения ее прочности.

Литература

- [1] Малков, В. П. Оптимизация упругих систем / В. П. Малков, А. Г. Угодчиков. — Москва: Наука, 1981. — 288 с.
- [2] Григолоук, Э. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э. И. Григолоук, Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак. — Киев: Наук. думка, 1979. — 364 с.
- [3] Оптимизация управления в электровакуумном производстве / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, В. И. Шелест и др. — Киев: Наук. думка, 1980. — 215 с.
- [4] Бурак, Я. И. Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках / Я. И. Бурак, Ю. Д. Зозуляк, Б. В. Гера. — Киев: Наук. думка, 1984. — 157 с.
- [5] Штамм, К. Многослойные конструкции / К. Штамм, Х. Витте. — Москва: Стройиздат, 1983. — 296 с.

- [6] Timar, I. Optimierung der Isolierstärke von Rohrleitungen / I. Timar // Forschung im Ingenieurwesen. — 2003. — Vol. 68, № 2. — P. 236-241.
- [7] Гемиртерн, В. И. Методы оптимального проектирования / В. И. Гемиртерн, Б. М. Каган. — Москва: Энергия, 1980. — 160 с.
- [8] Pohlheim, H. Evolutionäre Algorithmen / H. Pohlheim. — Berlin: Springer, 1999. — 316 p.
- [9] Allen, H. G. Analysis and design of structural sandwich panels / H. G. Allen. — Oxford, Pergamon Press, 1969. — 283 p.

About an optimum choice of parameters of the loaded three-layer plates by criterion of cost

Imre Timar, Adrian Torski, Valentine Shchukin

The paper deals with the optimum design of three-layered plates. The sandwich plate is composed of polyurethane foam as core and steel as facings. The minimum of objective function (material and fabrication costs) and the optimal thickness of polyurethane foam are determined in the case of design constraints. The constraints relate to the maximal stresses and deflection. A numerical solution of this problem is given by the nonlinear sequential unconstrained minimization technique.

Про оптимальний вибір параметрів навантажених тришарових пластин за критерієм вартості

Імре Тімар, Адріан Торський, Валентин Щукін

Розглянуто задачу оптимізації тришарових пластин, зовнішні шари яких виготовлено зі сталі, а середні — з пінополіуретану. Цільова функція визначається вартістю конструкції, що розглядається, та залежить від її геометричних розмірів, які підпорядковані обмеженням на механічні параметри: напруження та прогин. Розв'язування задачі математичного моделювання конструкції проводилося з застосуванням методу безумовної мінімізації, коли визначається мінімум вибраної цільової функції й оптимальна товщина середнього шару конструкції.

Представлено професором М. Сухорольським

Отримано 06.01.09