УДК 539.3

Метод інтегральних рівнянь у нестаціонарних задачах теплопровідності термочутливих тіл

Борис Процюк

Д. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

Викладено методику розв'язування одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності за нагрівання тепловим потоком однорідних шару, циліндра та кулі з урахуванням температурної залежності коефіцієнтів тепло- та температуропровідності. При цьому використано інтегральне формулювання задач на змінні Кірхгофа за допомогою функцій Гріна відповідних лінійних задач. Розв'язок отриманих інтегродиференціальних рівнянь побудовано з використанням лінійних сплайнів, точних сум функціональних рядів за власними функціями, через які виражаються функції Гріна, та методу колокацій. Числові результати наведено для шару. Досліджено їх точність. Проведено порівняння з результатами, отриманими на основі розв'язків лінеаризованих задач.

Ключові слова: тіла простої геометрії, нестаціонарні температурні поля, температурна залежність характеристик, інтегродиференціальні рівняння.

Вступ. Методи визначення температурних полів на основі нелінійних математичних моделей наведені в працях [1-7] та ін. У праці [8] запропоновано підхід до розв'язування нелінійних задач теплопровідності для шаруватих тіл, який ґрунтується на застосуванні функцій Гріна. З його використанням у [9, 10] викладено методику розв'язування одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності для шаруватих термочутливих пластин і циліндрів за сталих коефіцієнтів температуропровідності (задачі з простою нелінійністю). Вона передбачає розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтера другого роду. Нижче, використовуючи аналогічний підхід, проілюструємо методику розв'язування одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності для однорідних тіл простої геометрії, які нагріваються тепловим потоком, за припущення, що від температури залежить також коефіцієнт температуропровідності.

1. Постановка задач

Розглянемо віднесені до декартової $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, циліндричної $(\tilde{r}, \varphi, \tilde{z})$ і сферичної $(\tilde{r}, \varphi, \psi)$ систем координат відповідно шар $(\tilde{z}_0 \le \tilde{z} \le \tilde{z}_1, -\infty < \tilde{y} < \infty, -\infty < \tilde{x} < \infty)$, порожнисті циліндр $(\tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le \tilde{r}_1, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty < \tilde{z} < \infty)$ і кулю $(\tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le \tilde{r}_1, 0 \le \varphi \le 2\pi$,

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2009, вип. 10, 96-105

$-\pi/2 \le \psi \le \pi/2)$. Нехай $q_0^{(k)} = const$ густини теплових потоків, якими нагріваються поверхні $\tilde{z} = 0$ шару ($k = 0$), циліндра $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ ($k = 1$) і кулі $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ ($k = 2$). Вважаємо, що на протилежних поверхнях тіл підтримується нульова температура.

За такої теплової дії температурні поля $t^{(k)}$ будуть одновимірні. Для їх визначення з урахуванням температурної залежності теплофізичних характеристик використаємо записані в уніфікованій формі рівняння теплопровідності та крайові умови

$$\frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^k \lambda_t\left(t^{(k)}\right)\frac{\partial t^{(k)}}{\partial x}\right] = a_* c_\upsilon\left(t^{(k)}\right)\frac{\partial t^{(k)}}{\partial Fo}, \quad x_0 < x < x_1; \tag{1}$$

$$\lambda\left(t^{(k)}\right)\frac{\partial t^{(k)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = -l\,q_0^{(k)}, \quad t^{(k)}\Big|_{x=x_1} = 0; \tag{2}$$

$$t^{(k)}\Big|_{Fo=0} = 0, \tag{3}$$

де $\lambda_t(t) = \lambda_* \Lambda(t)$, $c_\upsilon(t) = c_* C(t)$; λ_*, c_* — значення коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t(t)$ й об'ємної теплоємності $c_\upsilon(t)$ з області їх зміни; $a_* = \lambda_*/c_*$, $x = \tilde{x}/l$, τ, $x_1 = \tilde{x}_1/l$; $\tilde{x}$ і $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0$ — координата, до якої віднесено відповідне тіло, та його товщина (для шару $\tilde{x}_0 = 0$); $Fo = a_*\tau/l^2$; l — характерний лінійний розмір.

За допомогою змінної Кірхгофа

$$\theta^{(k)} = \frac{1}{\lambda_*}\int_0^{t^{(k)}} \lambda_t(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

задачу (1)-(3) зводимо до розв'язування такої задачі

$$\frac{1}{x^k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial \vartheta^{(k)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial \vartheta^{(k)}}{\partial Fo} - w_t^{(k)}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \vartheta^{(k)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = -1; \quad \vartheta^{(k)}\Big|_{x=x_1} = 0; \tag{6}$$

$$\vartheta^{(k)}\Big|_{Fo=0} = 0. \tag{7}$$

Тут

$$w_t^{(k)} = w_t^{(k)}\left(\vartheta^{(k)}, \frac{\partial \vartheta^{(k)}}{\partial Fo}\right) \equiv \left\{1 - \frac{C\left[t^{(k)}\left(\vartheta^{(k)}\right)\right]}{\Lambda\left[t^{(k)}\left(\vartheta^{(k)}\right)\right]}\right\}\frac{\partial \vartheta^{(k)}}{\partial Fo};$$

$$\vartheta^{(k)} = \theta^{(k)}/Q^{(k)}; \quad Q^{(k)} = l q_0^{(k)}/\lambda_*.$$

Надалі розглядатимемо тіла, для яких температурну залежність коефіцієнта теплопровідності можна апроксимувати лінійною функцією, тобто

$$\Lambda\left(t\right)=\left(1+\beta_{\lambda}t\right)\Big/k_{\lambda}\,, \tag{8}$$

де $k_{\lambda}=\lambda_{*}/\lambda_{0}\lambda_{0}$, λ_{0} — значення коефіцієнта теплопровідності $\lambda_{t}\left(t\right)$ за нульової температури, $\beta_{\lambda}=const$. Тоді шукана температура за відомої змінної Кірхгофа визначатиметься співвідношенням $t^{(k)}=\tilde{t}^{(k)}Q^{(k)}$, де згідно з (4)

$$\tilde{t}^{(k)}=\left(\sqrt{1+2k_{\lambda}\beta_{\lambda}^{(k)}\vartheta^{(k)}}-1\right)\Big/\beta_{\lambda}^{(k)}\,,\qquad \beta_{\lambda}^{(k)}=\beta_{\lambda}Q^{(k)}\,. \tag{9}$$

2. Інтегральне формулювання задач

Перейдемо від диференціального до інтегрального формулювання задач на відшукання змінних Кірхгофа за допомогою відповідних функцій Гріна. Під функціями Гріна будемо розуміти функції $G^{(k)}\left(x,\rho,Fo\right)$, що задовольняють рівняння

$$\frac{1}{x^{k}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{k}\frac{\partial G}{\partial x}\right)=\frac{\partial G}{\partial Fo} \tag{10}$$

та крайові умови

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=x_{0}}=0\,,\qquad \left.G\right|_{x=x_{1}}=0\,, \tag{11}$$

$$\left.G\right|_{Fo=0}=\frac{1}{x^{k}}\delta\left(x-\rho\right). \tag{12}$$

Тут $\delta(x-\rho)$ — дельта-функція Дірака, $x_{0}<\rho<x_{1}$.

Розв’язки задач (10)-(12) для відповідного тіла такі [8]

$$G^{(k)}\left(x,\rho,Fo\right)=2y^{(k)}\left(x,\rho\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(k)}\left(\mu_{m}^{(k)},x\right)\Phi^{(k)}\left(\mu_{m}^{(k)},\rho\right)}{N^{(k)}\left(\mu_{m}^{(k)}\right)}e^{\left(-\mu_{m}^{(k)}\right)^{2}Fo}\,, \tag{13}$$

де

$$y^{(0)}\left(x,\rho\right)=y^{(1)}\left(x,\rho\right)=1, y^{(2)}y^{(0)}\left(x,\rho\right)=y^{(1)}\left(x,\rho\right)=1=1\big/\left(x\rho\right), \Phi^{(0)}\left(\mu,x\right)=\cos\left(\mu x\right),$$

$$\Phi^{(1)}(\mu,x)=\psi_{10}(\mu,x_{0},x)\,,\ \Phi^{(2)}(\mu,x)=\cos\left[\mu\left(x-x_{0}\right)\right]+\left(\mu x_{0}\right)^{-1}\sin\left[\mu\left(x-x_{0}\right)\right],$$

$$N^{(0)}=x_{1}\,,\ \ N^{(1)}(\mu)=r_{1}^{2}\left[\mu^{2}\psi_{11}^{2}(\mu,x_{0},x_{1})-1\right],\ x_{0}^{2}\mu^{2}N^{(2)}(\mu)=x_{0}^{2}\mu^{2}(x_{1}-x_{0})+x_{1}\,;$$

$$2\psi_{\nu p}(\beta,z,y)=\pi\beta^{|\nu-p|}[J_{\nu}(\beta z)Y_{p}(\beta y)-Y_{\nu}(\beta z)J_{p}(\beta y)],\quad \nu,p=0,1\,;$$

$\mu_{m}^{(k)}$ — додатні корені рівнянь $\Phi^{(k)}\left(\mu,x_{1}\right)=0$.

Із використанням цих функцій Гріна задачі (5)-(7) зводимо до розв’язування таких інтегродиференціальних рівнянь

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2009, вип. 10, 96-105

$$\vartheta^{(k)}(x,Fo)=x_0^k\int_0^{Fo}G^{(k)}(x,x_0,Fo-\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^{Fo}\int_{x_0}^{x_1}\rho^k G^{(k)}(x,\rho,Fo-\xi)w_t^{(k)}\left(\vartheta^{(k)}(\rho,\xi),\frac{\partial\vartheta^{(k)}(\rho,\xi)}{\partial\xi}\right)d\rho d\xi\,. \qquad (14)$$

3. Побудова наближених розв'язків інтегродиференціальних рівнянь

3.1. Заміна інтегродиференціальних рівнянь параметричними залежностями. Поділимо проміжок $[x_0, x_1]$ на N частин. Позначимо ліві та праві межі новоутворених проміжків і їх середину відповідно точками $\bar{x}_{j-1},\bar{x}_j,x_j^*\left(j=\overline{1,N},\bar{x}_0=x_0,\bar{x}_N=x_1\right)$. У другому доданку рівняння (14) інтеграл по ρ подамо як суму інтегралів від $\bar{x}_{j-1}$ до $\bar{x}_j$. Невідомі густини внутрішніх джерел тепла замінюємо густинами, розподіли яких описуємо функціями $w_j^{(k)}\left(Fo\right)=\left\{1-\frac{k_\lambda C\left[t^{(k)}\left(\vartheta_j^{(k)}\right)\right]}{\sqrt{1+2\beta_\lambda^{(k)}\vartheta_j^{(k)}}}\right\}\frac{\partial\vartheta_j^{(k)}}{\partial Fo}$, які апроксимуємо лінійними сплайнами

$$w_j^{(k)}\left(Fo\right)\approx s_{j1}^{(k1)}Fo+s_{j1}^{(k0)}+\sum_{q=1}^{K_\tau-1}\left(s_{j,q+1}^{(k1)}Fo+s_{j,q+1}^{(k0)}-s_{jq}^{(k1)}Fo-s_{jq}^{(k0)}\right)S\left(\xi-Fo_q\right).\qquad(15)$$

Тут $\vartheta_j^{(k)}=\vartheta^{(k)}\left(\rho,Fo\right)\Big|_{\rho=x_j^*}$, $s_{jq}^{(k1)}=\frac{w_j^{(k)}\left(Fo_q\right)-w_j^{(k)}\left(Fo_{q-1}\right)}{\Delta Fo_q}$,

$s_{jq}^{(k0)}=\frac{-w_j^{(k)}\left(Fo_q\right)Fo_{q-1}+w_j^{(k)}\left(Fo_{q-1}\right)Fo_q}{\Delta Fo_q}$, Fo_q — вузли сітки, такі що $0=Fo_0<Fo_1<...<Fo_{K_\tau}=Fo$; $\Delta Fo_q=Fo_q-Fo_{q-1}$ — крок сітки.

В отриманий інтеграл за часовою змінною підставляємо вирази для функцій Гріна (13), після чого обчислюємо його з використанням формул [8]

$$2y^{(k)}\left(x,\rho\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(k)}\left(\mu_m^{(k)},x\right)\Phi^{(k)}\left(\mu_m^{(k)},\rho\right)}{N^{(k)}\left(\mu_m^{(k)}\right)\left(\mu_m^{(k)}\right)^{2M}}=g_M^{(k)}\left(x,\rho\right),\quad M=1,2,\qquad(16)$$

в яких

$$g_1^{(k)}\left(x,\rho\right)=\left[f^{(k)}\left(x_1\right)-f^{(k)}\left(\rho\right)\right]-\left[f^{(k)}(x)-f^{(k)}\left(\rho\right)\right]S\left(x-\rho\right),$$

$$g_2^{(k)}\left(x,\rho\right)=g_{12}^{(k)}\left(x_1,\rho\right)-g_{12}^{(k)}\left(x,\rho\right),$$

$$g_{12}^{(k)}\left(x,\rho\right)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varsigma^k}g_{11}^{(k)}\left(\varsigma,\rho\right)d\varsigma,\quad g_{11}^{(k)}\left(x,\rho\right)=\int_{x_0}^{x}\varsigma^k g_1^{(k)}\left(\varsigma,\rho\right)d\varsigma\,,$$

$$f^{(0)}(x)=x\,,\quad f^{(1)}(x)=\ln x\,,\quad f^{(2)}(x)=-1/x\,.$$

У підсумку з рівняння (14) отримаємо для змінних Кірхгофа параметричні залежності від дискретних значень цих змінних і їх похідних за часом

$$\begin{aligned}\vartheta^{(k)}(x,Fo)\approx\vartheta_L^{(k)}(x,Fo)-\sum_{j=1}^{N}\Big\{{}_1g_j^{*(k)}(x)\,w_j^{(k)}(Fo)-\\ -{}_2g_j^{*(k)}(x)\left[s_{j1}^{(k1)}+\sum_{q=1}^{K_\tau-1}\left(s_{j,q+1}^{(k1)}-s_{jq}^{(k1)}\right)S\left(Fo-Fo_q\right)\right]+{}_2\,g_j^{(k)}(x,Fo)\,s_{j1}^{(k1)}+\\ +\sum_{q=1}^{K_\tau-1}{}_2g_j^{(k)}\left(x,Fo-Fo_q\right)\left(s_{j,q+1}^{(k1)}-s_{jq}^{(k1)}\right)S\left(Fo-Fo_q\right)\Big\}\,,\end{aligned}\qquad(17)$$

де

$$\vartheta_L^{(k)}(x,Fo)=x_0^k\left[g_1^{(k)}(x,x_0)-2y^{(k)}(x,\rho)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(k)}\left(\mu_m^{(k)},x\right)\Phi^{(k)}\left(\mu_m^{(k)},x_0\right)}{\left(\mu_m^{(k)}\right)^2N^{(k)}\left(\mu_m^{(k)}\right)}e^{-\left(\mu_m^{(k)}\right)^2Fo}\right],$$

$${}_Mg_j^{*(k)}(x)=\int_{\bar x_{j-1}}^{\bar x_j}\rho^k g_M^{(k)}(x,\rho)\,d\rho\,,\quad M=1,2\,,$$

$${}_2g_j^{(k)}(x,\xi)=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi^{(k)}\left(\mu_m^{(k)},x\right)\displaystyle\int_{r_{j-1}}^{r_j}y^{(k)}(x,\rho)\rho^k\,\Phi\left(\mu_m^{(k)},\rho\right)d\rho}{\left(\mu_m^{(k)}\right)^4N^{(k)}\left(\mu_m^{(k)}\right)}e^{-\left(\mu_m^{(k)}\right)^2\xi}\,.$$

3.2. Визначення дискретних значень змінних Кірхгофа через дискретні значення їх похідних за часом. У рівності

$$\vartheta^{(k)}(x,Fo)=\int_0^{Fo}\frac{\partial\vartheta^{(k)}(x,\xi)}{\partial\xi}d\xi\qquad(18)$$

підінтегральні функції, як функції часової змінної, апроксимуємо лінійними сплайнами у вигляді (15). Після інтегрування та низки перетворень одержимо

$$\vartheta_j^{(k)}\Big|_{Fo=Fo_1}=Fo_1y_{j1}^{(k)}/2\,,\quad \vartheta_j^{(k)}\Big|_{Fo=Fo_q}=\Delta Fo_q\,y_{jq}^{(k)}/2+A_{jq}^{(k)}\,,\qquad(19)$$

де

$$y_{jq}^{(k)}=\left(\partial\vartheta_j^{(k)}/\partial Fo\right)\Big|_{Fo=Fo_q}\,,$$

$$2A_{jq}^{(k)}=\frac{y_{j1}^{(k)}Fo_q^2}{Fo_1}+y_{j,q-1}^{(k)}\Delta Fo_q-\frac{\Delta Fo_q}{\Delta Fo_{q-1}}\Big[\left(Fo_q+Fo_{q-1}-2Fo_{q-2}\right)y_{j,q-1}^{(k)}-$$

$$-y_{j,q-2}^{(k)}\Delta Fo_q\Big]+\sum_{p=1}^{q-2}\left(Fo_q-Fo_p\right)\left\{\left[\left(Fo_q-Fo_p\right)y_{j,p+1}^{(k)}+\right.\right.$$
$$\left.+\left(2Fo_{p+1}-Fo_q-Fo_p\right)y_{jp}^{(k)}\right]\Big/\Delta Fo_{p+1}-$$
$$\left.-\left[\left(Fo_q+Fo_p-2Fo_{p-1}\right)y_{jp}^{(k)}+\left(Fo_p-Fo_q\right)y_{j,p-1}^{(k)}\right]\Big/\Delta Fo_p\right\}.$$

У частковому випадку, коли крок сітки однаковий і дорівнює ΔFo, вираз для $A_{jq}^{(k)}$ спроститься та набуде вигляду

$$2A_{jq}^{(k)}=\left[y_{j1}^{(k)}q^2-2y_{j,q-1}^{(k)}+y_{j,q-2}^{(k)}+\sum_{p=1}^{q-2}(q-p)^2Y_{jp}^{(k)}\right]\Delta Fo,$$

де $Y_{jp}^{(k)}=y_{j,p+1}^{(k)}-2y_{jp}^{(k)}+y_{j,p-1}^{(k)}$, $y_{j,0}^{(k)}=0$.

3.3. Формування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Використовуючи метод колокацій, із співвідношень (17) отримаємо рекурентні системи нелінійних алгебричних рівнянь для відшукання $y_{jq}^{(k)}$

$$\frac{1}{2}Fo_1y_{j1}^{(k)}+\sum_{j=1}^{N}\left[{}_1g_j^{*(k)}\left(x_j^*\right)-\alpha_{j1}\right]w_{j1}^{(k)}=\vartheta_L^{(k)}\left(x_j^*,Fo_1\right),$$
$$\frac{1}{2}\Delta Fo_qy_{jq}^{(k)}+\sum_{j=1}^{N}\left[{}_1g_j^{*(k)}\left(x_j^*\right)-\alpha_{jq}\right]w_{jq}^{(k)}=\theta_L^{(k)}\left(x_j^*,Fo_q\right)-A_{jq}^{(k)}-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\left\{\alpha_{jq}w_{j,q-1}^{(k)}+{}_2\,g_j^{(k)}\left(x_j^*,Fo_q\right)s_{j1}^{(k1)}-\right.$$
$$\left.-{}_2g_j^{(k)}\left(x_j^*,Fo_1\right)s_{j,q-1}^{(k1)}+\sum_{p=1}^{q-2}{}_2g_j^{(k)}\left(x_j^*,Fo_q-Fo_p\right)\left(s_{j,p+1}^{(k1)}-s_{jp}^{(k1)}\right)\right\},\tag{20}$$

де

$$w_{jq}^{(k)}=\left\{1-\frac{k_\lambda C\left[T_{jq}^{*(k)}\left(y_{jq}^{(k)}\right)\right]}{T_{jq}^{(k)}\left(y_{jq}^{(k)}\right)}\right\}y_{jq}^{(k)},\quad T_{jq}^{*(k)}\left(y_{jq}^{(k)}\right)=\frac{1}{\beta_\lambda}\left[T_{jq}^{(k)}\left(y_{jq}^{(k)}\right)-1\right],$$
$$T_{j1}^{(k)}\left(y_{j1}^{(k)}\right)=\sqrt{1+k_\lambda\beta_\lambda^{(k)}Fo_1y_{j1}^{(k)}},\ T_{jq}^{(k)}\left(y_{jq}^{(k)}\right)=\sqrt{1+2k_\lambda\beta_\lambda^{(k)}A_{jq}^{(k)}+k_\lambda\beta_\lambda^{(k)}\Delta Fo_qy_{jq}^{(k)}},$$
$$\alpha_{jq}=\left[{}_2\,g_j^{*(k)}\left(x_j^*\right)-{}_2\,g_j^{(k)}\left(x_j^*,Fo_1\right)\right]\Big/\Delta Fo_q,\quad q=\overline{2,K_\tau}.$$

Після їх розв'язування, підстановки знайдених значень у відповідні апроксимації, а отриманих виразів — у (17), одержимо співвідношення для змінних Кірхгофа. Зокрема, у вузлах апроксимації матимемо

$$\vartheta^{(k)}\left(x, Fo_q\right) \approx \vartheta_L^{(k)}\left(x, Fo_q\right) - \sum_{j=1}^{N}\left\{ {}_1g_j^{*(k)}(x) w_{jq}^{(k)} - {}_2g_j^{*(k)}(x) s_{jq}^{(k1)} + \right.$$
$$\left. + {}_2g_j^{(k)}\left(x, Fo_q\right) s_{j1}^{(k1)} + \sum_{p=1}^{q-1} {}_2g_j^{(k)}\left(x, Fo_q - Fo_p\right)\left(s_{j,p+1}^{(k1)} - s_{jp}^{(k1)}\right)\right\}. \qquad (21)$$

4. Числові результати

Досліджували безрозмірну температуру в шарі ($k = 0$) залежно від кількості частин поділу проміжку $[0, z_1]$ і кількості вузлів сплайну для $\lambda_* = \lambda_0$, $c_* = c_0$, $z_1 = 1$, $l = 0{,}022$ м, $Q^{(0)} = 550$ºС за таких теплофізичних характеристик: $\lambda_t(t) = 55{,}059(1 - 0{,}000597t)\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$,

$c_\upsilon\left(t\right) = 32{,}667 \cdot 10^5\left(1 + 0{,}00071t\right)\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^3\cdot{}^\circ\text{C}}$, які відповідають сталі 20 К. Порівнювали її з безрозмірними температурами, підрахованими на основі розв'язків задачі з простою нелінійністю та лінійних задач. У задачі з простою нелінійністю приймали $a(t) \approx a_c = \dfrac{1}{700}\displaystyle\int_0^{700}\dfrac{\lambda_t(t)}{c_\upsilon(t)}dt = 11{,}015\cdot 10^{-6}\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $Fo = a_c\tau/l^2$. Лінійні задачі розглядали відповідно з характеристиками $\lambda_t\left(t\right) \approx \lambda_0$, $a\left(t\right) \approx a_0 = \lambda_0/c_0 = 16{,}85\cdot 10^{-6}\,\text{м}^2/\text{с}$, $Fo = a_0\tau/l^2$ та $\lambda_t(t) \approx \lambda_c = \dfrac{1}{700}\displaystyle\int_0^{700}\lambda_t(t)dt = 43{,}55\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $a(t) \approx a_c, Fo = a_c\tau/l^2$. В останній задачі використовували граничну умову $\partial\tilde{t}^{(0)}/\partial z\big|_{z=0} = -\lambda_0/\lambda_c$.

Решта необхідних для обчислень величин приймали у вигляді

$$w_{jq}^{(k)} = \left(\beta_{c\lambda} - 1\right)\left[\left(1 + 2k_\lambda\beta_\lambda^{(k)}A_{jq}^{(k)} + k_\lambda\beta_\lambda^{(k)}\Delta Fo_q y_{jq}^{(k)}\right)^{-1/2} - 1\right]y_{jq}^{(k)},$$

де $\beta_{c\lambda} = \beta_c/\beta_\lambda$, β_c — кутовий коефіцієнт функції $C(t)$;

$$\vartheta_L\left(z, Fo\right) = z_1 - z - \frac{2}{z_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\mu_m z\right)}{\mu_m^2}e^{-\mu_m^2 Fo}, \qquad \mu_m = \pi\left(m - 0{,}5\right),$$

$${}_2g_j\left(z, Fo\right) = \frac{2}{z_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\mu_m z\right)}{\mu_m^5}\left[\sin\left(\mu_m\bar{z}_j\right) - \sin\left(\mu_m\bar{z}_{j-1}\right)\right]e^{-\mu_m^2 Fo},$$

$$g_{12}\left(z, \zeta\right) = \frac{1}{6}\left[3z^2\left(z_1 - \varsigma\right) - \left(z - \varsigma\right)^3 S\left(z - \varsigma\right)\right],$$

$${}_1g_j^*(z) = \frac{1}{2}\left[2z_1\varsigma - \varsigma^2 + (z - \varsigma)^2 S(z - \varsigma)\right]\Big|_{\bar{z}_{j-1}}^{\bar{z}_j},$$

$${}_2g_j^*(z) = \left[{}_{12}g\left(z_1, \varsigma\right) - {}_{12}g\left(z, \varsigma\right)\right]\Big|_{\bar{z}_{j-1}}^{\bar{z}_j},$$

$$_{12}g(z,\varsigma)=\left(2z_1\varsigma-\varsigma^2\right)\frac{z^2}{4}-$$
$$-\left[\frac{1}{24}\left(4z^3\varsigma-3z^4-\varsigma^4\right)+\frac{1}{12}\left(2z\varsigma^3-3z^2\varsigma^2+z^4\right)\right]S(z-\varsigma).$$

Таблиця

τ, с	Нелінійна задача				Проста нелін.	Лінійні задачі	
	$\Delta\tau$, с						
	0,5	0,250	0,125	0,0625		λ_0, a_0	λ_c, a_c
0,0625				0,05299	0,04286	0,05264	0,0538
0,1250			0,07483	0,07510	0,06079	0,07445	0,0761
0,2500		0,10526	0,10628	0,10621	0,08634	0,10528	0,1076
0,5000	0,14754	0,15057	0,15024	0,15016	0,12285	0,14889	0,1522
1	0,21394	0,21297	0,21257	0,21249	0,17527	0,21057	0,2152
2	0,30284	0,30165	0,30119	0,30113	0,25109	0,29779	0,3043
4	0,42933	0,42800	0,42762	0,42758	0,36197	0,42109	0,4304
8	0,60794	0,60705	0,60689	0,60688	0,52674	0,59219	0,6083
12	0,73871	0,73827	0,73818	0,73818	0,65761	0,71093	0,7416
16	0,83938	0,83912	0,83906	0,83906	0,76633	0,79501	0,8469
20	0,91842	0,91823	0,91818	0,91818	0,85689	0,85463	0,9308
24	0,98128	0,98113	0,98110	0,98110	0,93199	0,89691	0,9979
28	1,03176	1,03164	1,03161	1,03161	0,99396	0,92689	1,0515
32	1,07259	1,07249	1,07247	1,07247	1,04483	0,94816	1,0942
36	1,10581	1,10572	1,10570	1,10570	1,08642	0,96324	1,1284
40	1,13294	1,13287	1,13286	1,13286	1,12029	0,97393	1,1557
44	1,15519	1,15513	1,15511	1,15511	1,14778	0,98151	1,1775
48	1,17347	1,17342	1,17341	1,17341	1,17003	0,98689	1,1949
52	1,18854	1,18849	1,18848	1,18848	1,18799	0,99070	1,2089
56	1,20096	1,20092	1,20091	1,20091	1,20246	0,99341	1,2200
60	1,21123	1,21119	1,21119	1,21119	1,21411	0,99532	1,2289
64	1,21973	1,21969	1,21969	1,21969	1,22347	0,99668	1,2359
68	1,22676	1,22673	1,22673	1,22673	1,23097	0,99765	1,2416
96	1,25173	1,25171	1,25171	1,25171	1,25480	0,99979	1,2595
100	1,25331	1,25329	1,25329	1,25329	1,25607	0,99985	1,2604
112	1,25662	1,25661	1,25661	1,25661	1,25853	0,99995	1,2622
144	1,26008	1,26007	1,26007	1,26007	1,26067	1,00000	1,2638
200	1,26102	1,26102	1,26102	1,26102	1,26108	1,00000	1,2641

Результати обчислень температур на поверхні нагрівання, коли у нелінійній задачі крок сітки $\Delta\tau = 0{,}5;\ 0{,}25;\ 0{,}125;\ 0{,}625$ с, $N = 8$, наведено в таблиці. Аналіз отриманих результатів показує, що в одні і ті ж моменти часу зі зменшенням кроку сітки відповідна різниця температур зменшується, причому з віддаленням від початку нагрівання вона наближається до нуля.

Температура, обчислена на основі розв'язку вихідної нелінійної задачі, знаходиться між температурами, підрахованими на основі розв'язків лінійних задач з теплофізичними характеристиками відповідно λ_0, a_0 і λ_c, a_c. Для малих часів ці три температури відрізняються неістотно. Для великих часів також неістотно відрізняється температура у задачі з простою нелінійністю й у лінійній задачі з теплофізичними характеристиками λ_c, a_c, до того ж точнішим є розв'язок задачі з простою нелінійністю. У лінійній задачі з теплофізичними характеристиками λ_0, a_0 різниця може досягати 20 %.

Зауважимо, що температура на поверхні нагрівання, підрахована на основі точного розв'язку нелінійної стаціонарної задачі, дорівнює 1,261099.

Різниця між значеннями температур, обчислених для $N = 4$ й $N = 8$, не перевищує 0,001.

Висновки. Запропонована методика, яка передбачає розв'язування інтегродиференціальних рівнянь, дає змогу з високою точністю визначати в тілах канонічної форми зумовлені нагріванням тепловим потоком нестаціонарні температурні поля з урахуванням температурної залежності коефіцієнтів тепло- та температуропровідності.

На основі лінеаризованих задач для малих часів точніші є розв'язки лінійних задач, а для більших — розв'язок задачі з простою нелінійністю.

Із розв'язків, отриманих на основі лінійних задач, точніший є розв'язок із середньоінтегральними теплофізичними характеристиками.

Література

[1] *Беляев, Н. М.* Методы теории теплопроводности: уч. пос. для вузов; в 2-х частях / *Н. М. Беляев, А. А. Рядно.* — Москва: Высшая школа, 1982. — Ч. 2. — 304 с.

[2] *Березовский, А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики; в 2-х частях / *А. А. Березовский*. — Киев: Наук. думка, 1976. — Ч. 2. — 292 с.

[3] *Коздоба, Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности / *Л. А .Коздоба*. — Москва: Наука, 1975. — 226 с.

[4] *Коляно, Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / *Ю. М. Коляно*. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.

[5] *Постольник, Ю. С.* Нелінійна прикладна термомеханіка / *Ю. С. Постольник, А. П. Огурцов*. — Киев: НМЦ ВО МОНУ, 2000. — 280 с.

[6] *Kushnir, R. M.* The Thermoelastic State of a Thermosensitive Sphere and Space with a Spherical Cavity Subject to Complex Heat Exchange / *R. M. Kushnir, V. S. Popovych, O. M. Vovk* // J. Eng. Mathematics. — 2008. — Vol. 61, No 2-4. — P. 357-369.

[7] *Noda, N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties / *N. Noda* // Appl. Mech. Rev. — 1991. — Vol. 44. — P. 383-397.

[8] *Процюк, Б. В.* Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл: автореферат дис. ... д. ф.-м. н.: 27.11.06 / *Процюк Борис Васильович*. — Львів, 2006. — 40 с. — Рукопис.

[9] *Процюк, Б. В.* Квазистатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком / *Б. В. Процюк* // Теор. и прикл. механика. — 2003. — Вып. 38. — С. 63-69.

[10] *Кушнір, Р. М.* Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі / *Р. М. Кушнір, Б. В. Процюк, В. М. Синюта* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2004. — № 4. — С. 7-16.

Integral equation method in nonstationary heat conduction problems for thermosensetive bodies

Borys Protsuik

The procedure to solve one-dimensional non-stationary heat conduction problems for homogeneous layer, cylinder, and sphere with the account of temperature dependence of heat- and thermal conductivity under heating by heat flow is presented. The procedure anticipates integral presentation of the problems on the Kirchhoff variables using Green's functions of corresponding linear problems. The solution of integro-differential equations obtained is constructed by linear splines, exact sums of functional series in eigen functions in terms of which Green's functions are expressed, and by a collocation method. Numerical results are given for a layer. Their accuracy is studied. The results obtained on the basis of linearized problems solutions are compared.

Метод интегральных уравнений в нестационарных задачах теплопроводности термочувствительных тел

Борис Процюк

Изложено методику решения одномерных нестационарных задач теплопроводности для однородных тел простой геометрии с учетом температурозависимости коэффициентов тепло- и температуропроводности при нагревании тепловым потоком. При этом использовано интегральную формулировку задач на переменные Кирхгофа при помощи функций Грина соответствующих линейных задач. Решения полученных интегро-дифференциальных уравнений построены с использованием линейных сплайнов, точных сумм функциональных рядов по собственных функциях, через которые выражаются функции Грина, и метода коллокаций. Числовые результаты приведены для слоя. Исследована их точность. Проведено сравнение с результатами, полученными на основании решений линеализированных задач.

Представлено професором В. Чекуріним

Отримано 01.04.09