УДК 683.03

О.Ю.Афанасьєва, Б.В.Дурняк, Ю.М.Коростіль

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗУВАННЯ ДЛЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Процес прогнозування передбачає можливість визначення величини певних параметрів, чи виникнення певних подій, що відповідними параметрами описуються, які можуть відбуватися при заданих змінах інших параметрів, що опосереднено зв'язані з параметрами, стосовно яких проводиться прогнозування. В більшості випадків, таким опосередненим параметром являється час, але відповідним опосередненим параметром може бути і будь який інший параметр, що змінюється із зміною параметрів, які досліджуються. Такий параметр будемо називати базовим параметром процесу прогнозування. Якщо розглядається прогнозування по кількох опосереднених параметрах, то тоді базових параметрів буде кілька.

Якщо модель прогнозування опосереднених параметрів не використовує, то така модель із статусу моделі прогнозування переходить у статус моделі, що описує процес, який досліджується і для зручності, в рамках даної роботи, таку модель будемо називати моделлю функціонування, що будемо позначати символами MF Відповідно, модель прогнозування будемо позначати символами MP .

Друга принципова відмінність MP від MF полягає у тому, що MP дає рішення поставленої задачі з певною помилкою ε^P , а модель MF , якщо дає рішення з помилкою ε^F , то $\varepsilon^P > \varepsilon^F$, при цьому, для MF є характерним те, що відповідна модель MF модифікується таким чином, щоб ε^F прямувало до нуля, або $\varepsilon^F \to 0$. Очевидно, що з формальної точки зору можна записати наступне співвідношення між MP і MF :

$$MP \setminus P^B \to MF \text{, або } \varphi(MP, P^B) \to MF ,$$

де P^B - базовий параметр, а "\", або φ означає операцію вилучення з MP базового параметра. Очевидно, що операція $\varphi(MP, P^B)$ повинна приводити до того, що ε^P переходить в ε^F . Це означає, що достатньо перейти від MP до MF , щоб можна було отримати MF , яка дає розв'язок, помилка якого є значно менша. Якщо б можна було визначити перетворення $\varphi(MP, P^B)$, то появилась би можливість відмовитися від прогнозування і вирішувати ту ж саму задачу з меншими похибками розв'язку.

Модель MP можна розглядати, як наближення до моделі MF і, тому, перетворення $MP \to MF$ представляє собою побудову MF виходячи з MP . Практично, MP використовуються тільки в тих випадках, коли в силу різних причин і, в першу чергу, в силу відсутності необхідних даних для побудови

MF, використовують для проведення аналізу досліджуваного процесу модель MP і відповідний аналіз представляє собою процес прогнозування, що, як уже відмічалось, передбачає існування певної похибки у отриманих результатах розв'язку задачі. В цьому сенсі, говорити про точності прогнозу еквівалентно розмові про перехід від MP до MF. Отже, в задачах прогнозування є неуникненою певна помилка у розв’язку задачі, оскільки її наявність можна розглядати, як одну з основних характеристик процесу прогнозування і, відповідно, моделі MP. Співвідношення $\varepsilon^P > \varepsilon^F$ означає, що ε^P є величиною, яку необхідно враховувати у випадках, коли використовуються результати відповідного прогнозу. Переважно, прогнозування реалізується по відношенню до виявлення подій, які можуть мати місце, але в силу різних причин не можуть бути встановлені точно. Стосовно таких подій приймається гіпотеза про можливість їх виникнення. Переважно, зацікавленість в таких подіях виникає в тому випадку, коли вони носять негативний характер. В рамках MP така подія описується параметрами, що її характеризують і такі параметри використовуються в якості змінних, що, використовуються в моделях MP. Модель прогнозування відноситься до моделей, які в найбільшій мірі є не визначеними по відношенню до об'єкту моделювання. Така не визначеність обумовлюється наступними факторами:

- неповнотою та неадекватністю параметрів, що використовуються в якості змінних в MP по відношенню до об'єкту дослідження, яким є переважно деякий процес, що протікає в часі,

- неточністю значення параметрів, що використовуються в MP і можуть представляти собою сукупність вхідних даних для проведення розрахунків в рамках моделі MP,

- неадекватність структури співвідношень між параметрами, що використовуються як змінні в MP по відношенню до структури процесу, який описується в MP.

Приведені невизначеності приводять до неуникненості виникнення неточностей в результаті обчислень і відповідно неточності встановлення факту виникнення певної події, яка визначається, як подія негативна.

В цьому випадку, виникає проблема оцінки величини неточності результатів прогнозування. В якості такої оцінки використовується уявлення про ризик. Уявлення про ризик, переважно, асоціюється з небезпекою, що обумовлюється негативною подією, яку передбачається обчислити з допомогою моделі MP. Оскільки, в основному, ціллю розв’язку задачі прогнозування є визначення можливості виникнення негативних подій з ціллю реалізації методів захисту від негативних дій прогнозованої події, якими можуть бути:

- протидія негативній дії відповідної події, яку будемо в подальшому називати небезпечною подією і будемо позначати символами (NP),

- компенсація результатів дії NP на об'єкт, по відношенню до яких відповідні дії направлені,

- запобігання виникненню NP, що може здійснюватися за рахунок використання процедури прогнозування.

У відповідності з приведеними методами захисту технічного об'єкту (TO) від дії NP, використовуються різні методи визначення величини ризику, що обумовлюється можливістю виникнення NP в рамках системи, я якій розв'язується задача прогнозування, виділяються наступні компоненти, що складають таку систему:

- компонента, в рамках якої реалізується процес, функціонування якого може привести до виникнення NP,

- компонента, що складає середовище, в якому можуть функціонувати певні процеси, або один процес, що може привести, або приводить до виникнення NP,

- компонента, на яку направлена відповідна негативна дія NP,

- компонента, яка повинна протидіяти негативній дії, яку реалізує NP,

- компонента, що оцінює міру небезпеки, що може виникнути в системі у вигляді певної NP.

Компонента, що представляє собою середовище, в якому реалізуються процеси, представляє собою об'єднання технічного об'єкту (TO), в якому реалізуються технологічні процеси (TP_i), з оточуючим середовищем (OS), що позначається символом (SP) і, яку можна записати у вигляді співвідношення:

$$SP = [OS \cup ((\sum_{i=1}^{n} TP_i) \subset TO)].$$

Слід відмітити, що в рамках SP реалізуються всі обслуговуючі алгоритми і моделі та системи прогнозування. Це означає, що:

$$MP \subset TP \text{, де } TP = \sum_{i=1}^{n} TP_i .$$

Виходячи з приведеного вище аналізу моделей прогнозування, відомо, що модель прогнозування в певній мірі є моделлю процесу, який приводить до виникнення NP, але описує цей процес з точністю, яка нижча деякого порогу δd_i, який розділяє уявлення про модель функціонування певного процесу з моделлю що прогнозує NP, що пов'язана з відповідним процесом. Приймемо, що в OS знаходяться компоненти, в інтересах яких реалізуються процеси $TP_i \in TP$ і по відношенню до яких можуть виникати NP. Відповідні NP можуть діяти безпосередньо на відповідні компоненти OS, які будемо називати зацікавленими компонентами (ZK) з OS, та опосередненно через їх вплив на технологічний процес (TP). Таким чином, ризик та його величина може інтерпретуватися мірою дії NP на ZK, при умові, що NP відбулася і, відповідно, подіяла на ZK. Але такий підхід до визначення величини ризику не є конструктивним. Завищення величини ризику, яке в такому випадку має місце, приводить до того, що засоби захисту, які повинні протидіяти відповідним NP, повинні бути придатними для протидії, така міра придатності є значно вища ніж це необхідно, виходячи з реальної ситуації, що визначається подіями типу NP. Наприклад, якщо у відповідності з результатами прогнозування, подія NP відбувається один раз в році, а засоби протидії NP повинні бути в повній мірі готовими на протязі всього року, то забезпечення їх готовності на протязі такого періоду часу може потребувати більших затрат ніж ті, що потрібні для успішної протидії відповідному NP.

Другий підхід, що грунтується на використанні моделей прогнозування, полягає у наступному. При визначенні частоти виникнення подій з допомогою деякої моделі M_i, котра може представляти собою MP_i з відповідно сформованою ціллю, можна використати іще одну MP_j, яка визначає, або прогнозує величину інтервалу між окремими можливими подіями типу NP. В цьому випадку, на основі аналізу точності прогнозування частоти виникнення NP моделлю MP_i і використовуючи MP_j, можна визначити інтервали, що визначаються з вищою точністю прогнозування. В цьому випадку, використання засобів захисту від NP буде менш коштовним ніж у випадку використання першого підходу.

Таким чином, доцільно розділити поняття ризику, як оцінки небезпеки для ZK зі сторони NP, що може породжуватися в TP та оцінку точності прогнозування, яка визначає наскільки точним є отримане рішення завдяки використанню моделі прогнозування. Тому, в рамках даної роботи будемо розглядати оцінку прогнозу виключно по відношенню до вибраної моделі прогнозування і така точність є однією із складових рівня безпеки системи.

Очевидно, що засоби протидії NP, які реалізуються в рамках системи безпеки (SB) можуть, в залежності від прийнятої інтерпретації TO, представляти собою компоненту TO і, тоді, відповідне TO буде вважатися розширеним системою SB, завдяки чому, можна говорити про міру безпеки самого TO. В більшості випадків, SB реалізується, як компонента, що входить в склад TO, що можна записати у вигляді:

$$BTO = F[TO, SB],$$

де BTO - безпечна TO. Практично, максимальний рівень безпеки TO у випадку BTO є не можливий, оскільки, в цьому випадку функціональна вартість такого TO, як мінімум, подвоюється. Наприклад, якщо в TO виявляється на початковому етапі процес зародження NP, що може, наприклад, здійснюватися на основі використання системи діагностики TO, то функціонуюче TO заміняється резервним, якщо технологічно така заміна передбачена в рамках проекту TO.

Існують випадки, коли SB розміщається в OS відповідного TO і безпосередньо зв'язана з ZK з OS. В цьому випадку, прийнято говорити про захист ZK і, в цілому, OS від можливих NP, які ініціюються в TO. Незалежно від цього, в склад TO входить, як мінімум, компонента, що представляє собою діагностичну систему

(DS). Тоді, SB називається системою захисту від TO, який може породжувати NP. В цьому випадку, оцінка безпеки функціонування TO по відношенню до OS обчислюється на основі даних, що отримані в процесі аналізу можливостей системи захисту (SZ) протидіяти NP, якщо останні появляються зі сторони TO. Практично, при розв'язуванні задач забезпечення безпеки функціонування TO в деякому OS, використовується синтез приведених двох підходів. Причому, синтез полягає у створенні двох взаємозв'язаних компонент, одна з якої є SB, а друга є SZ. Тоді, загальна система безпеки (ZSB) описується співвідношенням:

$$ZSB = F_i(SB, SZ).$$

В цьому випадку, оцінка ризику, яка, по визначенню, є оцінкою міри не забезпечення необхідного рівня безпеки, обчислюється для кожної компоненти окремо, а загальне значення відповідного ризику, яке будемо позначати R, обчислюється у відповідності з функцією F_i Тоді, в загальному випадку, можна записати наступне співвідношення:

$$R = \Phi_i[SB, SZ, F_i(SB, SZ)].$$

Очевидно, що між функціями Φ_i і F_i існує взаємозв'язок, який не може бути представлений лінійною залежністю, тому запишемо його у вигляді наступного співвідношення: $\Phi_i \propto F_i$.

Розглянемо деякі теоретичні аспекти оцінки точності моделей прогнозування та різні типи таких моделей. Найбільш поширеним типом моделей прогнозування є моделі, які грунтуються на використанні статистичних методів [1,2]. Для прогнозування використовуються наступні статистичні методи:

- регресії,
- авторегресії,
- екстраполяції періодичних компонент,
- оцінка густини розподілу,
- прогноз багатомірних нормальних розподілів та інші.

В рамках аналізу цих методів, розглянемо методи інтерпретації відомих підходів до оцінки прогнозування з врахуванням відхилень густини модельного розподілу з певними розширеннями, що обумовлюється особливістю предметної області. Як відомо, основною причиною неточностей моделей прогнозування, що грунтується на використанні статистичних методів, є відхилення заданого розподілу густини випадкових значень змінних, що використовуються в таких моделях, від заданих розподілів [3,4].

Оцінка регресійного прогнозу досить широко досліджується, що знайшло своє відображення в публікаціях [5,6]. В загальному випадку модель регресії, описується співвідношенням:

$$y = r(x, \Theta) + \varepsilon ,$$

де $r(*)$ - функція регресії заданого виду, Θ - регресійні коефіцієнти, ε - випадкова величина, що незалежна від x, описується параметрами $E\varepsilon = 0$, $E\varepsilon^2 = \sigma^2$, густина розподілу вектора x рівна $f_i(x)$, y - результуюча змінна, або відгук, x_i - незалежні змінні, предиктори. Тоді, оптимізаційна функція записується у вигляді співвідношення:

$$\sum_i^n \rho(x_i, y_i, \hat{\Theta}) \tag{1}$$

В цьому випадку, похибка прогнозування, по суті, є похибкою розв'язку регресійної моделі. Така похибка, в найпростішому випадку, визначається, як похибка прогнозу математичного очікування залежної змінної по незалежних змінних у новому спостереженні (x_0, y_0), що описується співвідношенням:

$$R := \lim nE[r(x_0, \hat{\Theta}) - r(x_0, \Theta)]^2 . \tag{2}$$

В якості оптимізуємих функцій використовують і інші функції, прикладом яких можуть служити функції, що запропоновані Мешалкіним і Юречковою [7,8]:

$\rho(b) = -\exp(-\lambda b^2 / 2)$, $\rho(b) = |b|^v, 1 < v < 2$, відповідно.

Для вибору найбільш ефективної регресії з ціллю розв'язку задачі прогнозування, яка допускала б можливість обчислення помилки прогнозування, може використовуватися спосіб обчислення помилки R за рахунок оцінки параметрів.

Очікувана середньоквадратична похибка регресійного прогнозування записується у вигляді наступного співвідношення:

$$s^2 = E(y_0 - \tilde{y}_0)^2 = \sigma^2 + R / n , \tag{3}$$

де σ^2 - дисперсія моделі, що використовується, R/n - квадратична похибка за рахунок оцінки параметрів моделі. Для прикладу, розглянемо R для різних регресійних моделей.

Поліноміальна регресія степенів g, при нормальному розподілі ε має регресійну функцію виду:

$$r(x, \Theta) = \sum_j^g \Theta_j x^j .$$

Оцінки Мешалкіна мають вигляд:

$$\psi_j = x^j \varepsilon \exp(-\lambda \varepsilon^2 / 2\sigma^2) .$$

Похибка оцінювання описується співвідношенням:

$$R = R(\lambda) = (1 + \lambda)^3 (1 + 2\lambda)^{3/2} (g + 1)\sigma^2 .$$

Її нестійкість описується співвідношенням:

$$Q(\lambda) = \sqrt{2\pi} (1 - \lambda)^3 (2\lambda)^{3/2} (g + 1)\sigma^3 .$$

Ріст нестійкості регресійного оцінювання виключає можливість стійкого оцінювання суттєво багатомірних задач. Задача багатомірної лінійної регресії зводиться до послідовності двохмірних задач на основі використання редукованої регресії. Редукована регресія реалізується наступним чином [1]. Впорядковуються предиктори по зменшенню квадрата коефіцієнта їх кореляції з відгуком y. Знаходиться стійка регресія відгуку y на предиктор $x^{(1)}$ і отримуємо регресійні залишки $\varepsilon_1^{(1)},...,\varepsilon_n^{(1)}$. Знаходимо стійку регресію на предиктор $x^{(2)}$ залишків $\varepsilon_1^{(2)},...,\varepsilon_n^{(2)}$ і т.д. Тоді, для лінійної регресії отримаємо наступну схему:

$$y = r_1(x^{(1)},\Theta_1^{(1)}) + \varepsilon^{(1)}$$

$$\varepsilon^{(1)} = r_2(x^{(2)},\Theta_0^{(2)},\Theta_1^{(2)}) + \varepsilon^{(2)}$$

$$\varepsilon^{(2)} = r_3(x^{(3)},\Theta_0^{(3)},\Theta_1^{(3)}) + \varepsilon^{(3)} \quad \text{і т.д.}$$

Предиктор $x^{(j)}$ буде інформативним, якщо при регресії залишків $\varepsilon^{(j-1)}$ на предиктор $x^{(j)}$ величина s^2 з (3) зменшується. Цей предиктор будемо вважати не інформативним, якщо величина s^2 не зменшується, при додаванні предиктора $x^{(j)}$.

Наступним, досить поширеним класом моделей, що використовуються для прогнозування, є моделі, що грунтуються на використанні випадкових функцій. Випадкова функція, це є випадкова величина, що змінюється в ході експерименту. Випадкові функції, що залежать від однієї змінної прийнято називати випадковими процесами. Випадкові функції, що залежать від декількох змінних, прийнято називати випадковими полями [2]. Для розв'язку задач прогнозування використовуються, в основному, дві моделі, що залежать від часу та не залежать від зсуву в часі одномірних випадкових процесів x_t:

- стаціонарних процесів,
- процесів із стаціонарним приростом.

Локальні властивості цих процесів залежать від вигляду коваріаційної функції в межах нуля. Їх, переважно, досліджують на показникових структурних функціях виду: $v_{(s)} = \omega^2 s^\gamma$, $0 \le \gamma \le 2$, де $v_{(t)}$ структурна параметрична функція $v_{(t)} \ge 0$, t і s точки процесу, ω- параметр, що залежить від вибраних одиниць вимірювань. Якщо прийняти $\omega^2 = 1$, то $v_{(\tau)} = \tau^\gamma$, випадковий процес є неперервним, якщо має місце:

$$\underbrace{\lim}_{s\to t} E(x_t - x_s)^2 = \underbrace{\lim}_{s\to t} v_{t-s|\,|} = 0,$$

що означає наступне. Якщо границя зміни різниці квадрату математичного очікування, при зближенні двох точок спостереження прямує до нуля, то такий процес є неперервним в середньоквадратичному. Аналогічно, випадковий процес є диференційований в середньоквадратичному, якщо має місце:

$$\underbrace{\lim}_{h\to 0}\rho_h = 1 .$$

де h - крок спостережень, ρ_h - кореляційна функція процесу. Якщо $\rho_h = \rho = 2^{\gamma-1} - 1$, то умова виконується тільки у випадку, якщо $\gamma = 2$. Уявлення про неперервність та диференційованість випадкових процесів є надзвичайно важливим для задач прогнозування, оскільки ці параметри є визначаючими при визначенні функціональних помилок прогнозування.

Одним з важливих типів випадкових процесів описується гаусовською послідовністю авторегресії, яка описується наступним співвідношенням:

$$x_{k+1} = \sum\nolimits_{i=1}^{k} h_{(k-i)} x_i + \varepsilon_{k+1} ,$$

де k - порядок авторегресії, h_i - коефіцієнти, ε_{k+1} - має розподіл $N(0,\sigma^2)$.

У випадку прогнозування процесів, що відбуваються в технічних системах, незалежних змінних, переважно, є більше двох, тому, для розв'язку задач прогнозування доцільно використовувати уявлення про випадкові поля, які описують такого типу випадки.

Якщо в деякій області вибрати пряму L, на якій задається одномірний просторовий параметр t, то випадкова змінна функції x_t по вибраній прямій створює реалізацію випадкового процесу x_t, який називається перетином випадкового поля x_t. Якщо ймовірнісні характеристики різних перетинів не залежать від вибору L, то поле x_t називається ізотропним. Віддаль між точками s і t в області Q визначається у вигляді $\|s-t\|$, а віддаль t від початкової точки, як $\|t\|$.

В практичних використаннях моделі випадкових полів в загальному описуються співвідношеннями:

$$Ex_t =: \mu = const ; \ \operatorname{cov}(x_s, x_t) =: c_{\|s-t\|} .$$

У випадку стаціонарних полів та у випадку стаціонарних полів з приростами, моделі описуються співвідношеннями:

$$E(x_{t+s} - x_t) = 0 , \ E(x_{t+s} - x_t)^2 = v_{\|s\|} ,$$

$$\operatorname{cov}(x_s, x_t) = (1/2)(v_{\|s\|} + v_{\|t\|} - v_{\|t-s\|} .$$

При цьому, для випадкових полів виявилась зручною показникова апроксимація структурної функції:

$$v_{[\|s\|]} = \omega^2 \|s\|^{\gamma} , \ 0 \le \gamma \le 2 .$$

Важливо розв’язувати задачу визначення функціональної точності відповідної моделі прогнозування та задачу вибору кроку спостереження. Звичайно, така модель представляє собою лінійну інтерполяцію відповідних типів процесів. Наприклад, якщо вибрано вінеровський процес з помилками, то можна записати наступні співвідношення, що характеризують відповідну помилку, для i -го інтервалу у вигляді співвідношення:

$$E\Delta_i^2 / h = \omega^2 + (\sigma_{i-1}^2 + \sigma_i^2) / h .$$

Незміщена оцінка вінеровського процесу є:

$$\hat{\omega}^2 = (1/nh)[\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 - \sigma_0^2 - \sigma_n^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i^2] .$$

Тоді, дисперсія лінійної інтерполяції, яка характеризує відповідну похибку, представляється у вигляді:

$$D\hat{\omega} = (n/R)\omega^2 h^3 + (1/4)(\sigma_0^2 + \sigma_n^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i^2 .$$

Для визначення ефективного кроку спостереження, на якому дисперсії приросту шуму і сигналу одинакові, що дозволяє вибрати крок спостереження, на якому варіації визначаються, в основному, сигналом , використовується метод, запропонований Д.У.Алланом [9]. Нехай процес $z_t = \tilde{x}_t + x_t$, де $t \in T$, являється сумою регулярної компоненти сигналу $\hat{x}_i$ і шуму x_t . Спостереження процесу $z_\tau, z_{2\tau}, \ldots$, проводиться з кроком h . Необхідно знайти таке критичне значення h , при якому дисперсія локальної змінної і шуму рівні. Тоді, доцільно вибрати крок, який є більшим від h^* , або $h > h^*$, оскільки при такому кроці виявляються зміни сигналу, при проведенні відповідних спостережень випадкового процесу.

1. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.В.* Прикладная статистика: исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985,
2. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1976.
3. *Tikey J.W.* A survej of sampling from contaminated distribution.//Contribution to Probability and Statistics. - Stanford University Press. 1960.
4. *Колмогоров А.Н.* Несмещенные оценки.// Изв. АН СССР, сер. мат., Т. 14.
5. *Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссен П., Штаэль В.* Робастость в статистике: подход на основе функции влияния. М.: Мир, 1989.
6. *Харин Ю.С., Сталевская С.Н.* Об устойчивости многомерного линейного прогнозирования.//Весці АН Беларусі. 1997,N4, с.9-13.
7. *Jureckova J.* Nonparametric estimates of regression coefficients.//An. Math. Statist. 1971. V 42, N4.
8. *Мешалкин Л.Д., Курочкина А.И.* Новый подход к параметризации регресионных зависимостей. Исследования по математической статистике.// Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. Л., 1979. Т87.
9. *Allan D.W.* Shold the classical variance be used as a Basic mtasure In standards Metodology.//IEEE Transactijn on Instrumenttation and mtasurement. 1987, h. 646-654.

Поступила 13.09.2010р.