

Визначення параметрів внутрішніх джерел тепла у півпросторі за заданими значеннями температури на його поверхні

Богдан Гера

д. т. н., проф., Центр математичного моделювання ІПММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, Львів, 79005, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, e-mail: gera@cmm.lviv.ua

Отримано розв'язок оберненої задачі про визначення функції температури та параметрів внутрішніх джерел тепла (потужність, місцезнаходження) у теплопровідному півпросторі за заданих умов теплообміну та значеннях температури в окремих точках на його поверхні. Показано, що оцінити потужність і характер джерел тепла можна, замінивши розподілені джерела тепла — точковими. Кількість таких джерел та оцінка меж і координат їх розташування можуть бути отримані з аналізу поверхневих теплових контрастів, із подальшим їх уточненням, а також визначенням глибини та потужності джерел із розв'язку оберненої задачі теплопровідності. Досліджено результати числових розрахунків.

Ключові слова: обернена задача, теплопровідність, параметри джерела тепла.

Вступ. Особливістю обернених задач про визначення параметрів внутрішніх джерел тепла в теплопровідному тілі є їх некоректність, що може проявлятися у неєдиності та нестійкості розв'язків. Суттєво ускладнює їх розв'язування сильна залежність розв'язків від незначної зміни вхідних даних, які, переважно, задані не точно, а з деякою похибкою. Крім того може бути відсутня додаткова кількісна інформація про межі зміни параметрів джерел тепла, яка б дозволила звужити область їх пошуку. Відомі два шляхи подолання некоректності розв'язку оберненої задачі: зміна постановки задачі так, щоб вона стала коректною, або побудова «регуляризуючого» алгоритму розв'язку без попереднього переформулювання постановки задачі [1, 2].

Задачі про визначення інтегральної потужності та розташування внутрішніх джерел тепла у теплопровідному тілі за викликаними ними тепловими аномаліями на поверхні розглядали в роботах [3-6].

У пропонованій роботі для регуляризації задачі теплову дію розподілених джерел тепла заміняємо дією невеликої кількості точкових джерел, границі області просторового розташування яких вважаємо відомими. У такому наближенні записано постановку оберненої задачі про визначення інтенсивностей і координат розташування точкових джерел тепла. Додаткову інформацію про область пошуку джерел тепла пропонується отримувати з аналізу форми теплової аномалії на поверхні тіла. Розв'язок оберненої задачі зведено до відшукування умовного

екстремуму функції середньоквадратичного відхилення від заданих значень температури внаслідок наявності у тілі точкових джерел. Із використанням методу найшвидшого спуску чисельно отримані параметри точкових джерел тепла за дискретними даними, тобто за значеннями температури в окремих точках теплової аномалії на поверхні півпростору.

1. Постановка оберненої задачі визначення параметрів джерел тепла

Розглянемо однорідний теплопровідний півпростір, в обмеженій внутрішній області якого відбуваються стаціонарні тепловиділення, наслідком яких є неоднорідний розподіл температури (температурна аномалія) на поверхні півпростору. Потрібно оцінити потужність і охарактеризувати розподіл внутрішніх джерел тепла за даними про температуру в окремих точках поблизу або на поверхні півпростору.

Відомо, що обернена задача визначення інтенсивності розподілених джерел тепла в області, яка знаходиться всередині тіла, за заданою функцією температури поза цією областю має неєдиний розв'язок [3]. Тому для оцінки таких параметрів джерел тепла, як загальна їх потужність і розташування, розподілені джерела тепла замінимо сукупністю K зосереджених у точках (ξ_i, η_i, ζ_i) джерел, потужності Q_i ($i = \overline{1, K}$). Півпростір віднесемо до прямокутної системи координат x, y, z (осі Ox і Oy якої належать його поверхні, а Oz — спрямована всередину півпростору).

Рівняння теплопровідності для визначення створюваного ними поля температури $t(x, y, z)$ запишемо у вигляді

$$\Delta t(x, y, z) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^K Q_i \delta(x - \xi_i) \delta(y - \eta_i) \delta(z - \zeta_i), \quad (1)$$

умову теплообміну на поверхні півпростору $z = 0$

$$\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=0} = \alpha t(x, y, 0), \quad (2)$$

а умови на безмежності

$$\lim_{|x|, |y|, z \rightarrow \infty} t(x, y, z) = 0. \quad (3)$$

Окрім того у точках $A_j(x_j, y_j, z_j)$ ($j = \overline{1, N}$) півпростору задані, з деякою похибкою вимірювань, значення температури θ_j , викликані цими джерелами тепла. Тобто задано N значень

$$\theta_j = t(x_j, y_j, z_j) + \Delta_j, \quad (4)$$

де Δ_j — похибки вимірювань температури. Вважаємо, що ці значення задані біля поверхні, тобто $\max z_j \ll \min \zeta_i$.

Оскільки кількість невідомих $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, Q_i$ складає $4K$, то для їх визначення потрібно провести не менше $4K$ незалежних вимірювань температури θ_j . Тобто $N \geq 4K$. У випадку двовимірної задачі теплопровідності незалежність вимірювань і достатність їх кількості для визначення параметрів двох джерел тепла досліджено в роботі [3].

Приймаємо, що можна встановити обмеження для величин шуканих параметрів вигляду

$$(\xi_i, \eta_i) \in D, \quad \zeta^- \leq \zeta_i \leq \zeta^+, \quad Q^- \leq Q_i \leq Q^+, \quad (5)$$

де D — область температурної аномалії; $\zeta^-, \zeta^+, Q^-, Q^+$ — задані величини.

Задача полягає у визначенні невідомих потужностей Q_i ($i = \overline{1, K}$) та відповідних їм координат ξ_i, η_i, ζ_i внутрішніх зосереджених джерел тепла, які забезпечують у точках A_j значення температури, найближчі до заданих величин θ_j ($j = \overline{1, N}$). Якщо таку близькість приймати у сенсі мінімуму середньоквадратичного відхилення, то параметри точкових джерел тепла будемо визначати так, щоб середньоквадратичне відхилення

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\theta_j - t(x_j, y_j, z_j)]^2, \quad (6)$$

приймало мінімальне значення за виконання умов (1)-(3), (5).

2. Числове розв'язування задачі умовної мінімізації

Розподіл температури у півпросторі, який викликаний наявністю одного джерела тепла з параметрами ξ, η, ζ, Q , визначаємо з рівняння (1) за крайових умов (2), (3) [7]

$$\begin{aligned} t(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, Q) = & \frac{Q}{4\pi\lambda} \left\{ \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right]^{-1/2} + \right. \\ & + \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2 \right]^{-1/2} - \\ & \left. - 2\mu \int_0^\infty \frac{e^{-\rho(z+\zeta)}}{\rho + \mu} J_0 \left(\rho \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) d\rho \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут $\mu = \alpha/\lambda$, $J_0(\rho)$ — функція Бесселя першого роду.

Тоді за дії у точках (x_j, y_j, z_j) K зосереджених джерел тепла, використовуючи лінійність задачі теплопровідності, температуру можна подати у вигляді суми температур від кожного точкового джерела тепла

$$t(x_j, y_j, z_j) = \sum_{i=1}^K t_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, Q_i), \quad (j = \overline{1, N}). \quad (8)$$

Вираз $t_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, Q_i)$, враховуючи формулу (7), запишемо у вигляді

$$t_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i, Q_i) = \frac{Q_i}{4\pi\lambda\zeta_i} \left\{ \left[\left(\frac{r_{ij}}{\zeta_i} \right)^2 + \left(1 - \frac{z_j}{\zeta_i} \right)^2 \right]^{-1/2} + \left[\left(\frac{r_{ij}}{\zeta_i} \right)^2 + \left(1 + \frac{z_j}{\zeta_i} \right)^2 \right]^{-1/2} - 2\mu\zeta_i \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau + \mu(\zeta_i + z_j)} J_0 \left(\frac{\tau r_{ij}}{\zeta_i + z_j} \right) d\tau \right\}, \quad (9)$$

де $r_{ij}^2 = (x_j - \xi_i)^2 + (y_j - \eta_i)^2$.

Оскільки $\max z_j \ll \min \zeta_i$, тобто глибина джерел значно перевищує глибину приповерхневих вимірювань температури, то у (9) можна знехтувати складниками z_j/ζ_i , які малі порівняно з одиницею. З метою переходу до безрозмірних параметрів проведемо заміну змінних

$$X_j = \mu x_j; \quad Y_j = \mu y_j; \quad u_i = \mu \xi_i; \quad v_i = \mu \eta_i; \quad w_i = \mu \zeta_i, \quad q_i = \frac{Q_i}{2\pi\lambda\zeta_i t_{\max}}.$$

Тоді співвідношення (9) перетворимо до вигляду

$$t_j(u_i, v_i, w_i, q_i) = t_{\max} q_i \left\{ w_i \left[(X_j - u_i)^2 + (Y_j - v_i)^2 + w_i^2 \right]^{-1/2} - w_i \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau + w_i} J_0 \left(\frac{\tau}{w_i} \left[(X_j - u_i)^2 + (Y_j - v_i)^2 \right]^{1/2} \right) d\tau \right\}. \quad (10)$$

Тут $t_{\max} = \max_{j=1, J} |t_j|$ — нормуючий множник.

Для визначення невідомих величин u_i, v_i, w_i, q_i ($i = \overline{1, K}$), що забезпечують значення $t(x_i, y_i, z_i)$, найближчі до заданих значень θ_j , виходитимемо з умови мінімуму функції середньоквадратичного відхилення (6)

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\theta_j - \sum_{i=1}^K t_j(u_i, v_i, w_i, q_i) \right]^2. \quad (11)$$

Розв'язок такої задачі існує, оскільки невідомі параметри шукаємо в замкнутій області, що визначається умовами (4), і, якщо похибки вимірювань $\Delta \rightarrow 0$ ($\Delta \geq |\Delta_j|$), їх числові значення прямуватимуть до реальних значень параметрів джерел тепла.

Опишемо алгоритм чисельної мінімізації Ω , використовуючи метод найшвидшого спуску [8]. На першому кроці задаємо початкове наближення шуканих параметрів $u_i^{(0)}, v_i^{(0)}, w_i^{(0)}, q_i^{(0)}$ з області їх допустимих значень. Обчислені значення будуть вхідними для обчислення наступних наближень цих параметрів $u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}, q_i^{(n)}$. На кожному наступному n -ому кроці обчислюємо компоненти

матриці $b_{ij}^{(n)} = t_j(u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}, q_i^{(n)})$ як масив розміру $K \times N$ і за формулою (11) визначаємо $\Omega^{(n)}$. Далі знаходимо напрямок спуску $\tilde{\xi}_i^{(n)}, \tilde{\eta}_i^{(n)}, \tilde{\zeta}_i^{(n)}, \tilde{q}_i^{(n)}$. Вираз для визначення $\tilde{\xi}_i^{(n)}$ запишемо у вигляді

$$\tilde{\xi}_i^{(n)} = -\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = -\sum_{j=1}^N \left[\theta_j - \sum_{i=1}^K b_{ij}^{(n)} \frac{\partial t_j(u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}, q_i^{(n)})}{\partial u_i} \right]. \quad (12)$$

Аналогічним чином можна подати решту компонент напрямку спуску

$$\tilde{\eta}_i^{(n)} = -\frac{\partial \Omega}{\partial v_i}, \quad \tilde{\zeta}_i^{(n)} = -\frac{\partial \Omega}{\partial w_i}, \quad \tilde{q}_i^{(n)} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \quad (13)$$

при $u_i = u_i^{(n)}, v_i = v_i^{(n)}, w_i = w_i^{(n)}, q_i = q_i^{(n)}$.

Для визначення числових значень $\tilde{\xi}_i^{(n)}, \tilde{\eta}_i^{(n)}, \tilde{\zeta}_i^{(n)}, \tilde{q}_i^{(n)}$, окрім обчислених раніше $t_j(u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}, q_i^{(n)})$, слід також знайти значення похідних, які входять у співвідношення (12), (13), тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_j}{\partial u_i} &= q_i \frac{X_j - u_i}{w_i^2} \Xi_{ij}, & \frac{\partial t_j}{\partial v_i} &= q_i \frac{Y_j - v_i}{w_i^2} \Xi_{ij}, \\ \frac{\partial t_j}{\partial w_i} &= q_i \left[\frac{w_i + 1}{w_i} \Psi_{ij} - w_i (r_{ij}^2 + w_i^2)^{-\frac{3}{2}} \right], & \frac{\partial t_j}{\partial q_i} &= \Psi_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

при $u_i = u_i^{(n)}, v_i = v_i^{(n)}, w_i = w_i^{(n)}, q_i = q_i^{(n)}$. Тут

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \frac{w_i^2}{(r_{ij}^2 + w_i^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{w_i^2}{r_{ij}^2} \left[\Psi_{ij} - w_i \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{(\tau - w_i)^2} J_0\left(\frac{\tau r_{ij}}{w_i}\right) d\tau \right], \\ \Psi_{ij} &= \frac{w_i}{(r_{ij}^2 + w_i^2)^{\frac{1}{2}}} + w_i \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau + w_i} J_0\left(\frac{\tau r_{ij}}{w_i}\right) d\tau, \\ r_{ij}^2 &= (X_j - u_i)^2 + (Y_j - v_i)^2, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо в процесі обчислень виявиться, що $X_j = u_i, Y_j = v_i$ за будь-яких $j = \overline{1, N}, i = \overline{1, K}$ й, отже, $r_{ij}^2 = 0$, то Ξ_{ij} має особливість вигляду $\frac{0}{0}$. Тоді формула (15) стає непридатна для обчислень із використанням ЕОМ. Знайдемо граничні вирази $\frac{\partial t_j}{\partial u_i}, \frac{\partial t_j}{\partial v_i}$ при $X_j \rightarrow u_i, Y_j \rightarrow v_i$. Запишемо $\frac{\partial t_j}{\partial u_i}$ у вигляді

$$\frac{\partial t_j}{\partial u_i} = q_i (X_j - u_i) \left[\frac{w_i}{(r_{ij}^2 + w_i^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r_{ij}^2} \int_0^\infty \frac{\tau e^{-\tau}}{\tau + w_i} J_0 \left(\frac{\tau r_{ij}}{w_i} \right) d\tau \right]. \quad (16)$$

Розкладемо функцію Бесселя першого роду в ряд

$$J_0 \left(\frac{\tau r_{ij}}{w_i} \right) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{\tau r_{ij}}{\tau + w_i} \right)^{2l+1}}{l(l+1)2^{2l+1}} = \frac{\tau r_{ij}}{2w_i} - 16 \left(\frac{\tau r_{ij}}{w_i} \right)^3 + \dots$$

Вважаючи, що r_{ij} — малий параметр, обмежимося у цьому розкладі першим членом ряду та підставимо його у співвідношення (16). Враховуючи, що

$$\int_0^\infty \frac{\tau e^{-\tau}}{\tau + \zeta} d\tau = 1 - \zeta - \zeta^2 E_1(\zeta),$$

отримаємо

$$\frac{\partial t_j}{\partial u_i} = q_i (X_j - u_i) \left\{ \frac{w_i}{(r_{ij}^2 + w_i^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{w_i} [1 - w_i - w_i^2 E_1(w_i)] \right\} + O(r_{ij}^2).$$

Звідси випливає, що при $X_j = u_i$, $Y_j = v_i$ справджується рівність $\frac{\partial t_j}{\partial u_i} = 0$. Аналогічним

чином можна показати, що $\frac{\partial t_j}{\partial v_i} = 0$ при $X_j = x_i$, $Y_j = y_i$. Отримавши компоненти на-
прямку спуску, $(n+1)$ -ше наближення розв'язку задачі шукатимемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)} &= u_i^{(n)} + \nu^{(n)} \xi_i^{(n)}, & v_i^{(n+1)} &= v_i^{(n)} + \nu^{(n)} \eta_i^{(n)}, \\ w_i^{(n+1)} &= w_i^{(n)} + \nu^{(n)} \zeta_i^{(n)}, & q_i^{(n+1)} &= q_i^{(n)} + \nu^{(n)} \tilde{q}_i^{(n)}, \end{aligned} \quad (17)$$

де крок спуску $\nu^{(n)}$ визначається з умов мінімуму по ν виразу

$$\Omega^{(n+1)}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \left[\theta_j - \sum_{i=1}^K t_j(u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}, q_i^{(n)}) \right]^2. \quad (18)$$

Цим забезпечується зменшення критерію (11) за переходу від n -го до $(n+1)$ -го наближення, оскільки

$$\Omega^{(n+1)}(0) \equiv \Omega^{(n)}(\nu) \leq \Omega^{(n)}(0). \quad (19)$$

Під час практичної реалізації числової мінімізації $\Omega^{(n+1)}(\nu)$ знаходимо спочатку значення ν , при якому одночасно виконуються нерівності

$$\Omega^{(n)}(v) > \Omega^{(n)}(0) - \frac{v}{2} \frac{d\Omega^{(n)}(v)}{dv} \Big|_{v=0}, \quad (20)$$

$$\Omega^{(n)}\left(\frac{v}{2}\right) < \Omega^{(n)}(0) - \frac{v}{4} \frac{d\Omega^{(n)}(v)}{dv} \Big|_{v=0}, \quad (21)$$

і приймаємо $v^{(n)} = v/2$. Нерівність (21) забезпечує виконання умови (19), оскільки

$$\frac{d\Omega^{(n)}(v)}{dv} \Big|_{v=0} \equiv -\sum_{i=1}^K \left[\left(\tilde{\xi}_i^{(n+1)} \right)^2 + \left(\tilde{\eta}_i^{(n+1)} \right)^2 + \left(\tilde{\zeta}_i^{(n+1)} \right)^2 + \left(\tilde{q}_i^{(n+1)} \right)^2 \right] < 0.$$

Після визначення $v^{(n)}$ знаходимо $(n+1)$ -ше наближення шуканих параметрів і відповідні йому значення Ω . Критерієм завершення обчислень вважаємо виконання нерівностей

$$\Omega^{(n)}(0) - \Omega^{(n+1)}(0) < \varepsilon \Omega^{(1)}(0), \quad (22)$$

де ε — задане мале число. Якщо нерівність (22) не виконується, визначаємо наступне $(n+2)$ -ге наближення розв'язку задачі, а у разі її виконання обчислення закінчуємо та розв'язком вважаємо

$$u_i = u_i^{(n+1)}, \quad v_i = v_i^{(n+1)}, \quad w_i = w_i^{(n+1)}, \quad q_i = q_i^{(n+1)}, \quad i = \overline{1, K}.$$

3. Числові дослідження

Для тестових розрахунків вибирали температурні дані, що відповідають джерелам тепла з заданими параметрами. Обчислення проводили для кількох випадків, коли конфігурація теплової аномалії свідчила про наявність одного ($K=1$), двох ($K=2$) чи трьох ($K=3$) центрів джерел тепла. При цьому на поверхні $z=0$ у точках із координатами (x_j, y_j) , розташованих в області температурної аномалії, задавали значення θ_j , що відповідають чотирьом варіантам дії теплових джерел (a, b, c, d),

Таблиця 1

Тестові значення параметрів точкових джерел тепла

Варіант	ξ_i (м)	η_i (м)	ζ_i (м)	Q_i (К·м)
a ($K=2$)	-3	0	5	160
	0	0	6	170
b ($K=2$)	-3	0	5	160
	4	0	6	170
c ($K=2$)	-3	0	5	160
	7	0	6	170
d ($K=3$)	-3	0	5	160
	4	0	6	170
	0	7	3	100

параметри яких наведені в табл. 1. При цьому похибку Δ вхідних даних θ_j можна контролювати й у разі потреби встановлювати достатньо малою для забезпечення стійкості розв'язку оберненої задачі.

На рис. 1 відповідно для кожного з чотирьох (a, b, c, d) варіантів нагрівання півпростору точковими джерелами тепла показано лінії рівнів функції t в області теплової аномалії, за якими можна визначити теплові контрасти на поверхні півпростору.

У результаті аналізу теплових зображень можна встановити кількість центрів джерел тепла та зробити попередні оцінки їх координат (x_j, y_j) . Під час розв'язування обернених задач для варіантів даних, що відповідають рис. 1*b* та *c*, приймаємо $K = 2$, для даних, показаних на рис. 1*d*, — $K = 3$ та лише для першого з розглянутих випадків, якому відповідає рис. 1*a*, коли джерела знаходяться достатньо близько й їхня дія сприймається на тепловому зображенні як нагрів одним зосередженим джерелом тепла, приймаємо, що $K = 1$.

Попередня оцінка координат джерел тепла (див. рис. 1) дає наступні наближення $x_i^{(0)}, y_i^{(0)}$ для варіантів $a-d$:

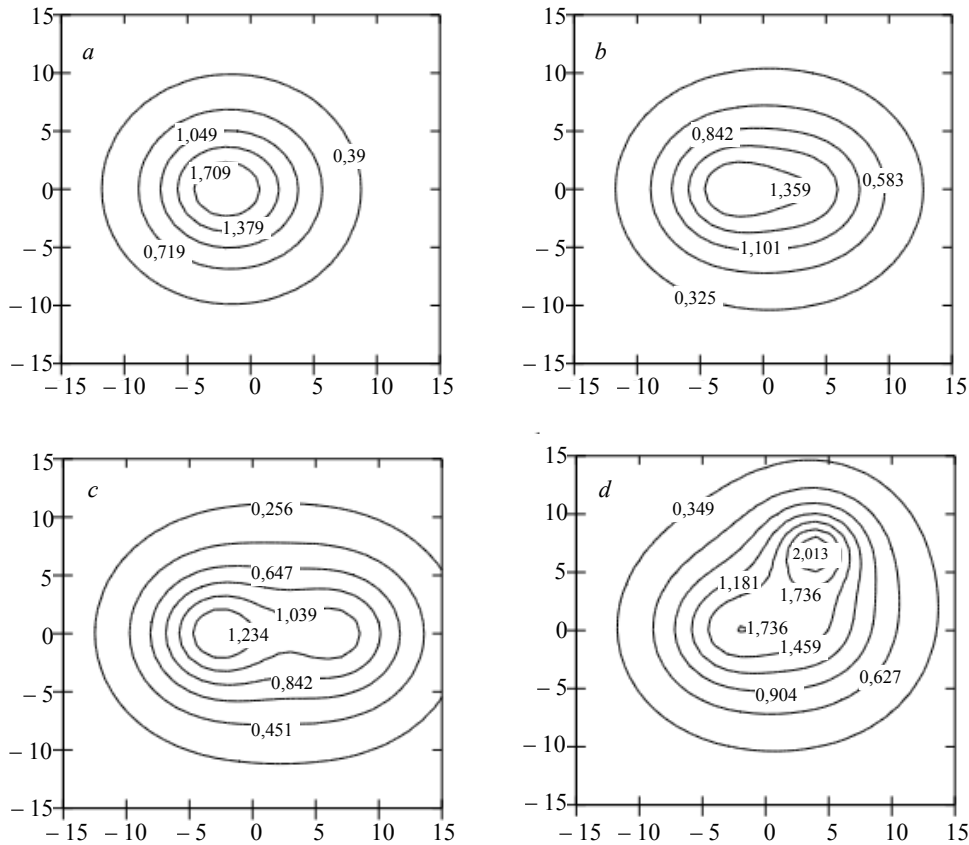


Рис. 1. Лінії рівня температурного поля на поверхні (варіанти a, b, c, d)

- a) $x_1^{(0)} = -2, y_1^{(0)} = 0$;
 b) $x_1^{(0)} = -2, y_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 3, y_2^{(0)} = 0$;
 c) $x_1^{(0)} = -2,5, y_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 5,7, y_2^{(0)} = 0$;
 d) $x_1^{(0)} = -2, y_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 3, y_2^{(0)} = 0,5; x_3^{(0)} = 0, y_3^{(0)} = 6$.

Оцінки глибини $z_i^{(0)}$ і потужності $Q_i^{(0)}$ проводили з використанням розв'язку оберненої задачі з одним локальним джерелом тепла [9] за відомих розподілів температури в околах точок $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$ на поверхні $z = 0$. Для перших трьох розглянутих варіантів такі розрахунки дають

- a) $z_1^{(0)} = 5,5, Q_1^{(0)} = 318$;
 b) $z_1^{(0)} = 5,5, Q_1^{(0)} = 259; z_2^{(0)} = 6,5, Q_2^{(0)} = 270$;
 c) $z_1^{(0)} = 5,3, Q_1^{(0)} = 194; z_2^{(0)} = 6,5, Q_2^{(0)} = 212$.

Ці значення приймалися за нульове наближення при визначенні точкових джерел тепла. У четвертому варіанті нульове наближення вибирали так

- d) $z_1^{(0)} = 4,5, Q_1^{(0)} = 150; z_2^{(0)} = 6,5, Q_2^{(0)} = 180, z_2^{(0)} = 2, Q_2^{(0)} = 90$.

У табл. 2 приведено отримані методом найшвидшого спуску параметри джерел тепла, для яких функція (11) набуває мінімального значення.

Максимальні відхилення визначених потужностей від дійсних (табл. 1) складають у першому варіанті 5%, другому 2%, третьому 5,3% та четвертому 9,7% їх величин. Максимальні абсолютні зміщення джерел відповідно складають 1,19; 0,18; 0,25; 0,70 м. У першому варіанті великі відхилення знайдених параметрів пояснюються поганою ідентифікацією близько розташованих джерел тепла. Зі збільшення відстані між джерелами, коли їхня дія локалізована у різних областях, ці параметри визначаються значно точніше.

Таблиця 2

Отримані значення параметрів точкових джерел тепла

Варіант	$\xi_i(\text{м})$	$\eta_i(\text{м})$	$\zeta_i(\text{м})$	$Q_i(\text{К}\cdot\text{м})$
a (K = 1)	1,78	- 0,010	5,79	342,6
b (K = 2)	- 2,35	- 0,003	5,63	168,0
	- 1,17	- 0,002	5,00	169,0
c (K = 2)	- 3,06	0,00	4,90	153,0
	6,87	- 0,010	6,19	179,0
d (K = 3)	- 2,62	- 0,100	4,72	144,5
	3,49	0,130	6,45	180,5
	0,34	7,000	2,97	100,4

Висновки. Показано, що характер внутрішніх тепловиділень, які відбуваються у замкнутій області теплопровідного півпростору, можна оцінити, замінивши розподілені джерела тепла невеликою кількістю точкових джерел. Розрахункову кількість таких джерел і оцінку координат їх розташування отримуємо з аналізу поверхневих теплових зображень. Подальше уточнення цих координат, а також визначення глибини та потужності джерел можна отримати з використанням розв'язку оберненої задачі теплопровідності, якщо похибки вхідних даних для неї достатньо малі. Температура на поверхні при визначених параметрах джерел тепла практично співпадає з заданою.

Література

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — Москва: Наука, 1986. — 288 с.
- [2] Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев: Наук. думка, 1978. — 228 с.
- [3] Кондорская Е. Е., Гласко В. Б. Об определении положения теплового источника по заданному температурному полю // Вестник Московского ун-та. Сер. физ., астроном. — 1982. — № 1. — С. 79-83.
- [4] Ильинский А. С., Ланеев Е. Б. Об определении положения источника тепла по косвенным данным // Вестн. Московского ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1988. — № 2. — С. 18-22.
- [5] Stefaniak J. Controlling the concentrated sources in some problems of heat conduction // Journal of Theoretical Physics. — 1985. — Vol. 26, 3-4. — P. 349-358.
- [6] Mościcki W. J. Temperature anomalies over underground cavities // Geophysical Prospecting. — 1987. — Vol. 35. — P. 393-423.
- [7] Гера Б. В. Зворотна задача визначення характеристик зосереджених джерел тепла у півпросторі // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1988. — № 3. — С. 75-78.
- [8] Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — Москва: Наука, 1978. — 488 с.
- [9] Гера Б. В., Чапля Е. Я. Определение характеристик сосредоточенных источников тепла в полупространстве при заданных условия теплообмена и распределении температуры на его поверхности // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — Вып. 29. — С. 46-51.

Obtaining the parameters of internal thermal sources in a half-space by the given surface temperature values on its surface

Bogdan Gera

The solution of the inverse problem on evaluation of the temperature function and parameters of internal thermal sources (power, location) in heat conducting half-space with known heat exchange conditions and temperature at some points on its surface is obtained. It was shown that it is possible to evaluate the power and distributions of thermal sources by replacing them with concentrated sources. The number of such sources and assessment of their boundaries and coordinates may be obtained using the surface thermal contrast analysis, with their subsequent refinement, and also by evaluation of depth and power of sources from the solution of the inverse thermal conductivity problem. The results of calculations are investigated.

Определение параметров внутренних источников тепла в полупространстве по заданным значениям температуры на его поверхности

Богдан Гера

Получено решение обратной задачи об определении функции температуры и параметров внутренних источников тепла (мощности, местоположения) в теплопроводном полупространстве при заданных условиях теплообмена и значениях температуры в отдельных точках его поверхности. Показано, что оценить мощность и расположение источников тепла можно, заменив распределенные источники тепла — точечными. Количество таких источников и оценку их координат получаем из анализа тепловых контрастов на поверхности, с последующим их уточнением, а также определением глубины и мощности источников из решения обратной задачи теплопроводности. Исследованы результаты численных расчетов.

Отримано 12.05.08