

Скінченно-граничноелементна схема методу декомпозиції області для плоских задач теорії пружності з несумісними розбиттями підобластейІван Дияк¹, Станіслав Матисяк², Ігор Прокопишин³¹ к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: dyyak@franko.lviv.ua² професор, Варшавський університет, алея Жвїрки і Вігури, 93, Варшава, Польща, e-mail: s.j.matysiak@uw.edu.pl³ Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: ihor84@gmail.com

Розглядається узагальнення паралельної Неймана-Неймана та послідовної Діріхле-Неймана схем методу декомпозиції області для плоскої задачі теорії пружності за несумісних сіток на межі підобластей. Із використанням мортарних елементів умови ідеального механічного контакту підобластей наближаються слабкими умовами. Числові результати отримані з використанням лінійних гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій. Досліджено якість наближеного розв'язку від кількості мортарних елементів і його збіжність при згущенні несумісних сіток методу скінченних елементів і прямого методу граничних елементів.

Ключові слова: метод декомпозиції області, метод скінченних елементів, прямий метод граничних елементів, мортарні функції.

Вступ. Гібридні скінченно-граничноелементні апроксимації [1, 2] у поєднанні з методом декомпозиції області (МДО) [3, 4] є ефективним методом розв'язування задач математичної фізики для геометрично складних областей і середовищ із неоднорідними фізико-механічними характеристиками. Вони дозволяють врахувати специфіку задачі в окремій підобласті та використати переваги різних числових методів.

У роботах [5-7] розглянуто послідовні та паралельні гібридні скінченно-граничноелементні схеми МДО розв'язування плоскої задачі теорії пружності. У дослідженні [6] показано відповідність розроблених дискретних схем методу простої ітерації розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Це дозволило здійснити оптимальний вибір ітераційних параметрів цих схем. У згаданих роботах використовувалися скінченноелементні та граничноелементні дискретизації з сумісними апроксимаціями та вузлами дискретизації, що співпадали на межі підобластей.

У працях [8, 9] запропоновано метод розв'язування крайових задач для рівняння Пуассона з несумісними апроксимаціями в окремих підобластях. Головна ідея цього методу полягає у наближенні умов неперервності на межі підобластей слабкими умовами з використанням спеціальних базисних функцій — мортарних (стягуючих) функцій. Цей метод отримав назву методу мортарних елементів [10].

За варіаційної постановки задач врахування слабких умов контакту на межі підобластей найчастіше здійснюють методом множників Лагранжа [11-14].

Для нестационарних задач, задач із локальною анізотропією та скачками фізико-механічних характеристик, кутовою сингулярністю, задач контакту з рухомими підобластями схеми МДО з несумісними апроксимаціями є гнучкішими та ефективнішими від звичайних схем, які використовують сумісні дискретизації [14]. Окрім того, такі схеми дозволяють проводити подрібнення сіток незалежно для різних підобластей. Це зумовило інтенсивний розвиток методу мортарних елементів. Огляд останніх здобутків у цьому напрямку подано у праці [15].

У пропонованій статті методом мортарних елементів отримано матриці зв'язку між вузловими значеннями переміщень і зусиль для різних підобластей на їх межі. Це дозволило узагальнити гібридні схеми МДО [5, 6] на випадок несумісних сіток. Показано відповідність отриманих схем методу простої ітерації для деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено їх числову ефективність.

1. Формулювання задачі

Розглянемо плоску задачу лінійної теорії пружності для області $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ з ліпшицевою межею $\Gamma = \partial\Omega$ [16]. Вектор переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ задовольняє в цій області рівняння рівноваги Ляме

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

де $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — параметри Ляме, \mathbf{f} — вектор об'ємних сил.

Компоненти тензора напружень виражаються через переміщення так

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \sigma_{22} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

На частині межі $\Gamma^u \subset \Gamma$ задані кінематичні крайові умови

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^u, \quad (3)$$

а на частині $\Gamma^\sigma \subset \Gamma$ — статичні крайові умови

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^\sigma, \quad (4)$$

де $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ — вектор зусиль із компонентами $p_i = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} n_j$ ($i=1, 2$); n_j ($j=1, 2$) —

компоненти зовнішньої одиничної нормалі $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ до межі Γ .

Розділимо область Ω на підобласті Ω_F і Ω_B з межами $\Gamma_F = \partial\Omega_F$ та $\Gamma_B = \partial\Omega_B$ так, щоб виконувалися умови $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_F \cup \bar{\Omega}_B$, $\Omega_F \cap \Omega_B = \emptyset$ (рис. 1). Нехай $S = \partial\Omega_B \cap \partial\Omega_F = \widehat{\mathbf{ab}}$ — спільна межа підобластей, \mathbf{a} — початкова точка кривої S , а \mathbf{b} — кінцева. Об'єкти та величини, які відносяться до окремої підобласті, будемо відзначати відповідним нижнім індексом.

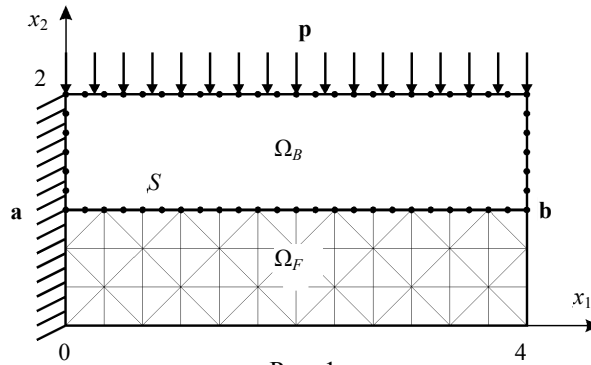


Рис. 1

Крайова задача (1)-(4) еквівалентна таким крайовим задачам для окремих підобластей

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_d = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_d, \quad \mathbf{u}_d = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d^u, \quad \mathbf{p}_d = \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d^\sigma, \quad d \in \{B, F\}$$

або у скороченому записі

$$\mathbf{L}_d \mathbf{u}_d = \mathbf{f}_d, \quad d \in \{B, F\} \quad (5)$$

з додатковими умовами ідеального механічного контакту на спільній межі

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_F, \quad \mathbf{p}_B = -\mathbf{p}_F, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (6)$$

Умови ідеального контакту (6) замінимо слабкими умовами

$$\int_S (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_F) \varphi_k(\mathbf{x}) dS = 0, \quad \int_S (\mathbf{p}_B + \mathbf{p}_F) \varphi_k(\mathbf{x}) dS = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7)$$

де $\varphi_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$, $k = \overline{1, m}$ — система лінійно-незалежних мортарних функцій.

Розглянемо деяке розбиття дуги $\widehat{\mathbf{ab}}$: $\widehat{\mathbf{ab}} = \widehat{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} \cup \widehat{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3} \cup \dots \cup \widehat{\mathbf{x}_{m-1} \mathbf{x}_m}$, де $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_m = \mathbf{b}$. Йому відповідає поділ відрізка $[0, |S|]$: $\{0 = t_1 < \dots < t_m = |S|\}$, де $t_k = |\widehat{\mathbf{ax}_k}|$, $k = \overline{1, m}$.

Мортарні функції на межі S , зокрема, можна вибрати лінійними [9]

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_k(t), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t = |\widehat{\mathbf{ax}}|, \quad k = \overline{1, m},$$

де $\tilde{\varphi}_k(t)$ — одновимірні кусково-лінійні функції вигляду (рис. 2)

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1, t_2] \\ 0, & t > t_2 \end{cases}, \quad \tilde{\varphi}_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_1, t_2] \\ (t_3 - t)/(t_3 - t_2), & t \in [t_2, t_3] \\ 0, & t > t_3 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}_k(t) = \begin{cases} 0, & t < t_{k-1}, t > t_{k+1} \\ (t - t_{k-1})/(t_k - t_{k-1}), & t \in [t_{k-1}, t_k] \\ (t_{k+1} - t)/(t_{k+1} - t_k), & t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}, \quad k = \overline{3, m-2},$$

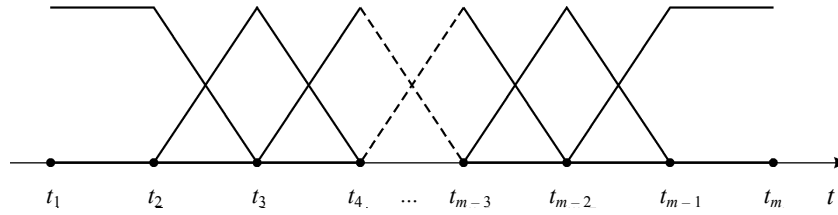


Рис. 2

$$\tilde{\varphi}_{m-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_{m-2} \\ (t - t_{m-2}) / (t_{m-1} - t_{m-2}), & t \in [t_{m-2}, t_{m-1}] \\ 1, & t \in [t_{m-1}, t_m] \end{cases}, \quad \tilde{\varphi}_m(t) = \begin{cases} 0, & t < t_{m-1} \\ 1, & t \in [t_{m-1}, t_m] \end{cases}.$$

Нехай n_d — кількість вузлів розбиття підобласті Ω_d ($d \in \{B, F\}$), що лежать на межі контакту S . Вектори переміщень і зусиль у цих вузлах для області d позначатимемо відповідно \mathbf{u}_d^j та \mathbf{p}_d^j , $j = \overline{1, n_d}$. Тоді переміщення \mathbf{u}_d та зусилля \mathbf{p}_d підобласті Ω_d ($d \in \{B, F\}$) на межі контакту можна наближено подати

$$\mathbf{u}_d(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{u}_d^j f_d^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{p}_d(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{p}_d^j g_d^j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (8)$$

де $f_d^j(\mathbf{x})$, $g_d^j(\mathbf{x})$, $j = \overline{1, n_d}$ — системи базисних функцій, породжених апроксимацією, заданою на Ω_d .

Звідси отримуємо

$$\int_S \mathbf{u}_d(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) dS \approx \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{u}_d^j \phi_{dk}^j, \quad \int_S \mathbf{p}_d(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) dS \approx \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{p}_d^j \chi_{dk}^j, \quad k = \overline{1, m},$$

де $\phi_{dk}^j = \int_S f_d^j(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) dS$, $\chi_{dk}^j = \int_S g_d^j(\mathbf{x}) \varphi_k(\mathbf{x}) dS$, $j = \overline{1, n_d}$, $k = \overline{1, m}$, $d \in \{B, F\}$.

Дискретний аналог слабких умов контакту (7) подамо так

$$\mathbf{H}_B \mathbf{u}_B = \mathbf{H}_F \mathbf{u}_F, \quad \mathbf{Q}_B \mathbf{p}_B = -\mathbf{Q}_F \mathbf{p}_F, \quad (9)$$

де $\mathbf{u}_d = \left((\mathbf{u}_d^1)^T, (\mathbf{u}_d^2)^T, \dots, (\mathbf{u}_d^{n_d})^T \right)^T$ — узагальнений вектор вузлових переміщень,

$\mathbf{p}_d = \left((\mathbf{p}_d^1)^T, (\mathbf{p}_d^2)^T, \dots, (\mathbf{p}_d^{n_d})^T \right)^T$ — узагальнений вектор вузлових зусиль; мат-

риці \mathbf{H}_d , \mathbf{Q}_d складаються з $m \times n_d$ блоків розміру 2×2

$$\mathbf{H}_d = \left[\mathbf{H}_{dk}^j \right]_{k=1, j=1}^{m, n_d}, \quad \mathbf{H}_{dk}^j = \begin{bmatrix} \phi_{dk}^j & 0 \\ 0 & \phi_{dk}^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_d = \left[\mathbf{Q}_{dk}^j \right]_{k=1, j=1}^{m, n_d}, \quad \mathbf{Q}_{dk}^j = \begin{bmatrix} \chi_{dk}^j & 0 \\ 0 & \chi_{dk}^j \end{bmatrix}.$$

Перепишемо умови (9) у вигляді

$$\mathbf{H}_B^T \mathbf{H}_B \mathbf{u}_B = \mathbf{H}_B^T \mathbf{H}_F \mathbf{u}_F, \quad \mathbf{Q}_F^T \mathbf{Q}_B \mathbf{p}_B = -\mathbf{Q}_F^T \mathbf{Q}_F \mathbf{p}_F.$$

Тоді отримаємо

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{H}_{BF} \mathbf{u}_F, \quad (10)$$

$$\mathbf{p}_F = -\mathbf{Q}_{FB} \mathbf{p}_B, \quad (11)$$

де $\mathbf{H}_{BF} \in M_{2n_B, 2n_F}$, $\mathbf{Q}_{FB} \in M_{2n_F, 2n_B}$ — прямокутні матриці розмірів $2n_B \times 2n_F$ та $2n_F \times 2n_B$

$$\mathbf{H}_{BF} = \left(\mathbf{H}_B^T \mathbf{H}_B \right)^{-1} \mathbf{H}_B^T \mathbf{H}_F, \quad \mathbf{Q}_{FB} = \left(\mathbf{Q}_F^T \mathbf{Q}_F \right)^{-1} \mathbf{Q}_F^T \mathbf{Q}_B. \quad (12)$$

Оскільки для прямокутної матриці \mathbf{A} — $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A})$ [17], то при визначенні матриці \mathbf{H}_{BF} достатньо покласти $m \geq n_B$, а при визначенні \mathbf{Q}_{FB} — $m \geq n_F$. Коли для кінематичних умов контакту за мортарні функції взято базисні функції $\varphi_k(\mathbf{x}) = f_B^k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, n_B}$, то матриця \mathbf{H}_B буде квадратною, симетричною та додатно визначеною. Тоді матриця зв'язку \mathbf{H}_{BF} набуде вигляду

$$\mathbf{H}_{BF} = \mathbf{H}_B^{-1} \mathbf{H}_F.$$

Аналогічно, взявши для статичних умов контакту $\varphi_k(\mathbf{x}) = g_F^k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, n_F}$, отримаємо

$$\mathbf{Q}_{FB} = \mathbf{Q}_F^{-1} \mathbf{Q}_B.$$

Із цих міркувань зрозуміло, що збільшення m не може суттєво впливати на матриці \mathbf{H}_{BF} та \mathbf{Q}_{FB} .

Зауважимо, що коли розбиття є сумісними на межі контакту S ($n_B = n_F$), то виконується умова $\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_F$, $\mathbf{Q}_B = \mathbf{Q}_F$ і $\mathbf{H}_{BF} = \mathbf{Q}_{FB} = \mathbf{I}$, де \mathbf{I} — одинична матриця. У цьому випадку умови (10), (11) є дискретним аналогом умов ідеального механічного контакту (6).

Для розв'язування задачі (5), (10), (11) застосуємо ітераційні гібридні схеми МДО, використовуючи в області Ω_F метод скінченних елементів (МСЕ) [18], а в області Ω_B — прямий метод граничних елементів (ПМГЕ) на основі методу Бубнова-Гальоркіна [19].

2. Ітераційні схеми МДО

Розглянемо ітераційні схеми МДО для задач із несумісними на межі контакту сітками, які узагальнюють відповідні алгоритми МДО [5-7] для сумісних сіток, і покажемо їх відповідність методу простої ітерації [4, 20] розв'язування деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Це дозволяє провести аналіз збіжності алгоритмів. Ітераційні наближення позначатимемо верхнім індексом.

2.1. Паралельна схема Неймана-Неймана. У цьому алгоритмі крайові задачі для підобластей Ω_B та Ω_F розв'язуємо паралельно з використанням статичних крайових умов (умов Неймана) на спільній межі S .

Крок 0. Для заданої кількості мортарних функцій m обчислюємо матриці $\mathbf{H}_B, \mathbf{H}_F, \mathbf{Q}_B, \mathbf{Q}_F$ і матриці зв'язку $\mathbf{H}_{BF}, \mathbf{Q}_{FB}$ за формулами (12).

Покладаємо лічильник ітерацій $k := 0$. Задаємо початкове значення зусилля для підобласті Ω_B на спільній межі

$$\bar{\mathbf{p}}_B^k = \bar{\mathbf{p}}_B^0, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Використовуючи співвідношення (11), обчислюємо значення зусилля для підобласті Ω_F на спільній межі

$$\bar{\mathbf{p}}_F^k = -\mathbf{Q}_{FB} \bar{\mathbf{p}}_B^k, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Крок 1. Із використанням ПМГЕ розв'язуємо в області Ω_B крайову задачу з умовою Неймана на межі S

$$\mathbf{L}_B \mathbf{u}_B^k = \mathbf{f}_B, \quad \mathbf{p}_B^k = \bar{\mathbf{p}}_B^k, \quad \mathbf{x} \in S$$

й обчислюємо значення переміщень на межі областей

$$\bar{\mathbf{u}}_B^k = \mathbf{u}_B^k, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Застосовуючи МСЕ в області Ω_F , розв'язуємо аналогічну крайову задачу

$$\mathbf{L}_F \mathbf{u}_F^k = \mathbf{f}_F, \quad \mathbf{p}_F^k = \bar{\mathbf{p}}_F^k, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Визначаємо переміщення на межі S $\bar{\mathbf{u}}_F^k = \mathbf{u}_F^k, \mathbf{x} \in S$. Знаходимо нев'язку $\mathbf{r}^k = \bar{\mathbf{u}}_B^k - \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^k, \mathbf{x} \in S$.

Крок 2. Якщо справджується нерівність $\|\mathbf{r}^k\| / \|\bar{\mathbf{u}}_B^k\| \leq \varepsilon, \mathbf{x} \in S$, де ε — задана точність, то алгоритм завершено. Інакше, задаємо нові наближення для зусиль на спільній границі

$$\bar{\mathbf{p}}_B^{k+1} = \bar{\mathbf{p}}_B^k - \omega_k \mathbf{r}^k, \quad \bar{\mathbf{p}}_F^{k+1} = -\mathbf{Q}_{FB} \bar{\mathbf{p}}_B^{k+1}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (13)$$

де ω_k — розмірний параметр. Приймаємо $k := k + 1$ і переходимо на *Крок 1*.

Покажемо, що цей алгоритм реалізує метод простої ітерації для деякої системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Подамо зв'язок між вузловими переміщеннями та зусиллями у такій матричній формі

$$\bar{\mathbf{u}}_B = \mathbf{G}_B \bar{\mathbf{p}}_B + \bar{\mathbf{u}}_B^*, \quad \bar{\mathbf{u}}_F = \mathbf{G}_F \bar{\mathbf{p}}_F + \bar{\mathbf{u}}_F^*, \quad (14)$$

де $\mathbf{G}_B, \mathbf{G}_F$ — матриці межової податливості відповідно розмірностей $2n_B \times 2n_B$ та $2n_F \times 2n_F$, а $\bar{\mathbf{u}}_B^*, \bar{\mathbf{u}}_F^*$ — переміщення на межі контакту S , зумовлені умовами поза нею.

Ці матриці отримують шляхом виключення невідомих із повних матриць податливості ПМГЕ та МСЕ для відповідних підобластей, вони — симетричні та додатно визначені [5].

Підставимо вираз (14) для $\bar{\mathbf{u}}_B$ в умову контакту (10). Тоді

$$\mathbf{H}_{BF} (\mathbf{G}_F \bar{\mathbf{p}}_F + \bar{\mathbf{u}}_F^*) = \mathbf{G}_B \bar{\mathbf{p}}_B + \bar{\mathbf{u}}_B^* .$$

Далі, враховуючи (11), отримаємо

$$-\mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB} \bar{\mathbf{p}}_B + \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^* = \mathbf{G}_B \bar{\mathbf{p}}_B + \bar{\mathbf{u}}_B^* .$$

Отож, приходимо до системи рівнянь

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}_B = \mathbf{f} , \tag{15}$$

де $\mathbf{A} = \mathbf{G}_B + \mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB}$, $\mathbf{f} = \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^* - \bar{\mathbf{u}}_B^*$.

Застосуємо до розв'язування цієї системи метод простої ітерації [4, 20]

$$\bar{\mathbf{p}}_B^{k+1} = \bar{\mathbf{p}}_B^k - \omega_k (\mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}_B^k - \mathbf{f}), \quad k = 0, 1, \dots . \tag{16}$$

Бачимо, що нев'язка цієї системи має вигляд

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{p}}_B^k - \mathbf{f} = \bar{\mathbf{u}}_B^k - \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^k = \mathbf{r}^k , \tag{17}$$

що відповідає ітераційному процесу (13).

Узагальнення методу Неймана-Неймана на випадок кількох областей є очевидним.

2.2. Послідовна схема Діріхле-Неймана. У цьому алгоритмі крайові задачі для областей Ω_B та Ω_F розв'язуємо послідовно. Для області Ω_B на спільній межі S задаємо кінематичні крайові умови (умови Діріхле), а для області Ω_F — статичні крайові умови (умови Неймана).

Крок 0. Задаємо кількість мортарних функцій m і обчислюємо матриці \mathbf{H}_B , \mathbf{H}_F , \mathbf{Q}_B , \mathbf{Q}_F . Обчислюємо матриці зв'язку \mathbf{H}_{BF} і \mathbf{Q}_{FB} за формулами (12).

Покладаємо лічильник ітерацій $k := 0$ і задаємо початкове переміщення на межі S для області Ω_B

$$\bar{\mathbf{u}}_B^k = \bar{\mathbf{u}}_B^0, \quad \mathbf{x} \in S .$$

Крок 1. Використовуючи ПМГЕ, розв'язуємо в області Ω_B крайову задачу з умовою Діріхле на межі S

$$\mathbf{L}_B \mathbf{u}_B^k = \mathbf{f}_B, \quad \mathbf{u}_B^k = \bar{\mathbf{u}}_B^k, \quad \mathbf{x} \in S .$$

Обчислюємо $\bar{\mathbf{p}}_B^k = \mathbf{p}_B^k$, $\mathbf{x} \in S$.

Крок 2. Використовуючи (11), покладаємо $\bar{\mathbf{p}}_F^k = -\mathbf{Q}_{FB}\bar{\mathbf{p}}_B^k$, $\mathbf{x} \in S$.

В області Ω_F методом скінченних елементів розв'язуємо крайову задачу з умовою Неймана на спільній межі

$$\mathbf{L}_F \mathbf{u}_F^k = \mathbf{f}_F, \quad \mathbf{p}_F^k = \bar{\mathbf{p}}_F^k, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Знаходимо $\bar{\mathbf{u}}_F^k = \mathbf{u}_F^k$, $\mathbf{x} \in S$. Визначаємо нев'язку $\mathbf{r}^k = \bar{\mathbf{u}}_B^k - \mathbf{H}_{BF}\bar{\mathbf{u}}_F^k$, $\mathbf{x} \in S$.

Крок 3. Перевіряємо точність, якщо $\|\mathbf{r}^k\| / \|\bar{\mathbf{u}}_B^k\| \leq \varepsilon$, то алгоритм завершено.

Інакше, знаходимо нове наближення для переміщення на спільній межі для області Ω_B

$$\bar{\mathbf{u}}_B^{k+1} = \bar{\mathbf{u}}_B^k - \alpha_k \mathbf{r}^k, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (18)$$

збільшуємо лічильник ітерацій на одиницю $k := k + 1$ і переходимо на Крок 1.

Покажемо, що запропонований алгоритм реалізує метод простої ітерації для деякої системи рівнянь. Для цього перепишемо співвідношення (14) у вигляді

$$\bar{\mathbf{u}}_F = \mathbf{G}_F \bar{\mathbf{p}}_F + \bar{\mathbf{u}}_F^*, \quad \bar{\mathbf{p}}_B = \mathbf{G}_B^{-1} \bar{\mathbf{u}}_B + \bar{\mathbf{p}}_B^*, \quad (19)$$

де $\bar{\mathbf{p}}_B^* = -\mathbf{G}_B^{-1} \bar{\mathbf{u}}_B^*$.

Підставимо вираз (19) для $\bar{\mathbf{u}}_F$ у формулу (10). З огляду на співвідношення (11) та подання для $\bar{\mathbf{p}}_B$ отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_B &= \mathbf{H}_{BF} (\mathbf{G}_F \bar{\mathbf{p}}_F + \bar{\mathbf{u}}_F^*) = -\mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB} \bar{\mathbf{p}}_B + \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^* = \\ &= -\mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB} \mathbf{G}_B^{-1} \bar{\mathbf{u}}_B - \mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB} \bar{\mathbf{p}}_B^* + \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^*. \end{aligned}$$

У підсумку приходимо до системи рівнянь

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{u}}_B = \mathbf{f}, \quad (20)$$

де $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB} \mathbf{G}_B^{-1}$, $\mathbf{f} = \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^* - \mathbf{H}_{BF} \mathbf{G}_F \mathbf{Q}_{FB} \bar{\mathbf{p}}_B^*$.

Застосовуючи метод простої ітерації для цієї системи, отримаємо

$$\bar{\mathbf{u}}_B^{k+1} = \bar{\mathbf{u}}_B^k - \alpha_k (\mathbf{A} \bar{\mathbf{u}}_B^k - \mathbf{f}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Бачимо, що нев'язка для цієї системи має вигляд

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{u}}_B^k - \mathbf{f} = \bar{\mathbf{u}}_B^k - \mathbf{H}_{BF} \bar{\mathbf{u}}_F^k = \mathbf{r}^k, \quad (22)$$

що відповідає ітераційному процесу (18).

3. Числове дослідження схем МДО з несумісними розбиттями підобластей

Для числового дослідження ефективності запропонованого алгоритму розглянуто плоску задачу про згин консольної двошарової плити (з модулем пружності E та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$) під дією рівномірного нормального зусилля (рис. 1). Для дискретної моделі верхнього шару використано МСЕ з лінійними трикутними елементами [18], а для нижнього — ПМГЕ з лінійною граничноелементною апроксимацією [19]. Дослідження, проведені паралельним методом Неймана-Неймана та послідовним методом Діріхле-Неймана, показали аналогічні результати.

Спершу вивчено вплив кількості мортарних елементів на виконання умов контакту. Використано розбиття: 32 трикутних елементів для Ω_F , $n_F - 1 = 8$; 16×4 граничних елементів для Ω_B , $n_B - 1 = 16$. Початкова кількість мортарних елементів дорівнювала $m - 1 = 16$, далі мортар-розбиття згущувалося удвічі.

У таблиці подані абсолютні та відносні похибки норм нев'язок переміщень $\tilde{u}_i = (E/p_2)u_i$ вздовж зони контакту $\Delta(\tilde{u}_i) = \|\tilde{u}_{iB} - \tilde{u}_{iF}\|_{L_2(S)}$, $\delta(\tilde{u}_i) = \Delta(\tilde{u}_i) / \|\tilde{u}_{iB}\|_{L_2(S)}$, $i = 1, 2$ залежно від кількості мортарних елементів.

Отож, кількість мортарних елементів мало впливає на виконання умов контакту, а відтак — і на загальний розв'язок.

На рис. 3, 4 подано графіки переміщень \tilde{u}_1 та \tilde{u}_2 вздовж лінії $x_2 = 0,5$, отримані при одночасному згущенні несумісних сіток МСЕ та ПМГЕ.

Криві 1-3 отримані для випадку густішого розбиття області Ω_F і відповідають таким відношенням $n_B - 1$ до $n_F - 1$: 8/16, 16/32, 32/64. Криві 4-6 отримані для випадку густішого розбиття області Ω_B за таких відношень $n_B - 1$ до $n_F - 1$: 64/32, 32/16, 16/8. Штриховою лінією показані переміщення, отримані для сумісного розбиття 64/64. В обох випадках (криві 1-3 та криві 4-6), розв'язки наближаються до розв'язку, отриманого з використанням сумісного розбиття. Для густіших сіток ПМГЕ (криві 6-4) швидкість збіжності більша, оскільки застосований варіант ПМГЕ є точніший за відповідну схему МСЕ [19].

На рис. 5, 6 показано графіки переміщень \tilde{u}_1 та \tilde{u}_2 вздовж лінії $x_2 = 0,5$, отримані при зближенні сіток МСЕ та ПМГЕ на межі контакту.

Таблиця

	$m - 1$	$\Delta(\tilde{u}_1)$	$\delta(\tilde{u}_1)$	$\Delta(\tilde{u}_2)$	$\delta(\tilde{u}_2)$
1	16	0,016117	0,020538	0,057379	0,000973
2	32	0,015635	0,020129	0,054972	0,000941
3	64	0,015552	0,020043	0,054605	0,000936
4	128	0,015659	0,020122	0,055197	0,000943
5	256	0,015789	0,020221	0,055895	0,000951
6	512	0,015886	0,020295	0,056416	0,000958

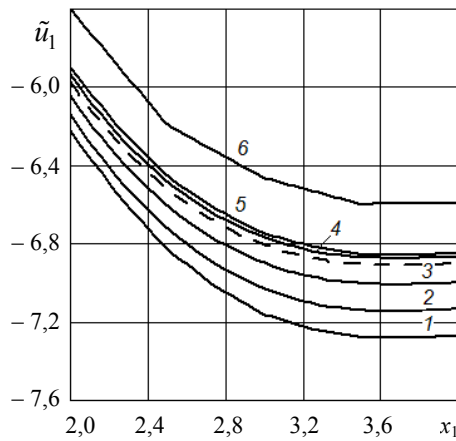


Рис. 3

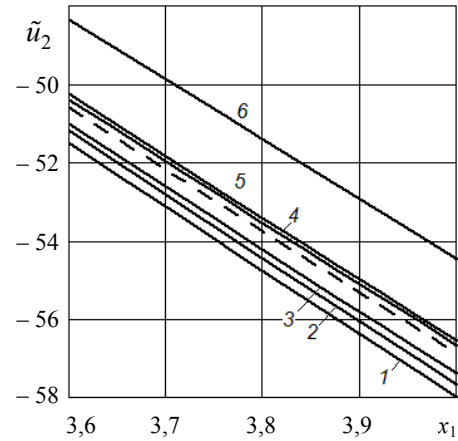


Рис. 4

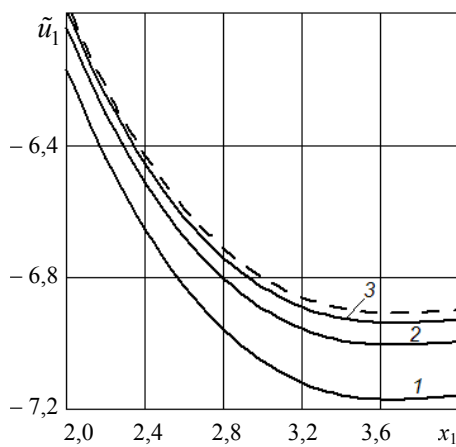


Рис. 5

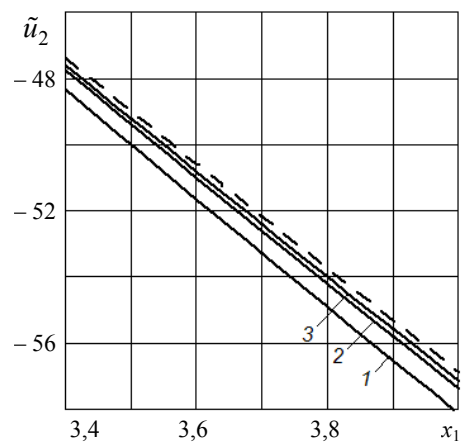


Рис. 6

Криві 1-3 відповідають таким відношенням $n_B - 1$ до $n_F - 1$: 16/64, 32/64, 48/64, а штрихові лінії відповідають сумісним сіткам, а саме — 64/64.

Отже, спостерігаємо збіжність розв'язку на несумісних сітках до розв'язку отриманого на сумісних сітках при зближенні несумісних сіток МСЕ та ПМГЕ.

Висновки. Проведено узагальнення паралельної Неймана-Неймана та послідовної Діріхле-Неймана схем МДО розв'язування плоскої задачі теорії пружності для випадку несумісних сіток на межі контакту з використанням лінійних мортарних елементів. Показано відповідність цих схем методу простої ітерації розв'язування деяких СЛАР, що дозволяє досліджувати збіжність цих схем.

Числове дослідження запропонованих схем із застосуванням лінійних гібридних гранично-скінченноелементних апроксимацій показало слабку залежність розв'язку від кількості мортарних елементів, збіжність розв'язку при одночасному

згущенні несумісних сіток МСЕ та ПМГЕ, збіжність числових результатів до розв'язку на сумісних сітках при зближенні сіток МСЕ та ПМГЕ.

Іван Дияк висловлює вдячність Касі імені Юзефа Мянговського і Фонду Польської Науки (м. Варшава) за надану фінансову підтримку під час виконання досліджень за тематикою статті.

Література

- [1] Головач Н. П., Дияк І. І. Метод декомпозиції області та комбінований скінченно-граничноелементний аналіз пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2000. — № 1. — С. 115-117.
- [2] Hsiao G. C., Schnack E., Wendland W. L. Hybrid coupled finite-boundary element methods for elliptic systems of second order // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2000. — Vol. 190. — P. 431-485.
- [3] Агошков В. И. Методы разделения области в задачах математической физики // Вычислительные процессы и системы. — М.: Наука, 1991. — Вып. 8. — С. 4-50.
- [4] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
- [5] Григоренко А. Я., Дияк І. І., Прокопишин І. І. Метод декомпозиції області для задач теорії пружності з використанням гібридних аппроксимаций // Прикладна механіка. — 20 с. (у друці).
- [6] Дияк І., Макар І., Прокопишин І. Числова ефективність гібридних скінченно-граничноелементних аппроксимаций задач теорії пружності на підставі методу декомпозиції області // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2007. — Вип. 12. — С. 93-100.
- [7] El-Gebeily M., Elleithy W., Al-Gahtani H. J. Convergence of domain decomposition finite element-boundary element coupling methods // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2002. — Vol. 191. — P. 4851-4867.
- [8] Bernardi C., Debit N., Maday Y. Coupling finite element and spectral methods: First results // Mathematics of Computation. — 1990. — Vol. 54 — P. 21-39.
- [9] Bernardi C., Maday Y., Patera A. T. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method // Nonlinear partial differential equations and their applications. — Paris, 1994. — P. 13-51.
- [10] Рукавишников А. В. Численный метод решения задачи Стокса с разрывным коэффициентом // Вычислительные методы и программирование. — 2005. — Т. 6. — С. 17-26.
- [11] Braess D., Dahmen W., Wieners C. A multigrid algorithm for the mortar finite element method // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1999. — Vol. 37. — P. 48-69.
- [12] Lamichhane B., Wohlmuth B. Mortar finite elements for interface problems // Computing. — 2004. — Vol. 72. — P. 333-348.
- [13] Wohlmuth B. Multigrid methods for saddlepoint problems arising from mortar finite element discretizations // Electronic Transactions on Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 11. — P. 43-54.
- [14] Wohlmuth B. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 38. — P. 989-1012.
- [15] Hauret P., Ortiz M. BV estimates for mortar methods in linear elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2006. — Vol. 195. — P. 4783-4793.
- [16] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
- [17] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

- [18] Szabo B., Babuska I. Finite element analysis. — N. Y.: J. Wiley & Sons, 1991. — 268 p.
[19] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
[20] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

Coupled finite-boundary element domain decomposition scheme for a plane elasticity problem with nonconforming subdomain meshes

Ivan Dyyak, Stanislav Matysyak, Ihor Prokopyshyn

A generalization of parallel Neumann-Neumann and sequential Dirichlet-Neumann domain decomposition schemes for a plane elasticity problem with nonconforming meshes on the common boundary of subdomains is proposed. These schemes are based on approximation of ideal mechanical contact conditions of subdomains by weak contact conditions using the mortar element method. Numerical solution is obtained by using linear hybrid finite-boundary element approximation. The quality of the approximate solution depending on a number of mortar elements and its convergence in nonconforming meshes of the method of finite elements and the direct method of boundary-value elements are investigated.

Конечно-гранично-элементная схема метода декомпозиции области для плоских задач теории упругости с несовпадающими разбиениями подобластей

Иван Дьяк, Станислав Матысяк, Игорь Прокопышин

Дано обобщение параллельной Неймана-Неймана и последовательной Дирихле-Неймана схем метода декомпозиции области для плоской задачи теории упругости в случае несовместных сеток на общей границе подобластей. Такое обобщение основано на приближении условий идеального механического контакта подобластей слабыми условиями с помощью метода мортарных элементов. Численное решение получено с использованием линейных гибридных конечно-гранично-элементных аппроксимаций. Изучены влияние на решение количества мортарных элементов, сходимости решения при сгущении и сближении несовместных сеток.

Отримано 22.02.08