

До ідентифікації параметрів багат шарових тіл із використанням теплового зондування

Василь Чекурін

Д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: chekurin@iapmm.lviv.ua

Розглядається математична модель для ідентифікації структури та теплофізичних властивостей плоских багат шарових тіл із використанням стаціонарних теплових процесів. У рамках моделі встановлені множини інформативних параметрів і сформульовані прямі й обернені задачі ідентифікації. На прикладі двошарового тіла проведено дослідження впливу його структури на вимірювальні інформативні параметри.

Ключові слова: ідентифікація, неруйнівні методи, прямі й обернені задачі, теплове зондування, багат шарові структури.

Вступ. Задачі ідентифікації параметрів структури та фізичних властивостей кусково-однорідних тіл виникають у багатьох прикладних дисциплінах — технічній діагностиці, геофізиці, геологічній розвідці, біофізиці тощо. Неруйнівні методи базуються на зондуванні об'єктів фізичними полями та вимірюванні змін параметрів зондувального поля, зумовлених його взаємодією з тілом. Якщо теплофізичні характеристики складових кусково-однорідного тіла відрізняються, то для зондування об'єктів можна застосовувати температурне поле, створене зовнішніми потоками чи об'ємними джерелами тепла [2, 3]. При цьому інформативними параметрами є збурення температурного поля та теплового потоку на поверхні об'єкту, зумовлені неоднорідністю теплофізичних властивостей. Дослідимо можливість застосування методу теплового зондування для неруйнвної ідентифікації внутрішньої структури та теплофізичних властивостей плоских шаруватих тіл.

1. Математичні моделі зондування температурним полем

Обмежимося випадком зондування стаціонарним двовимірним температурним полем. Із цією метою розглянемо модель багат шарового тіла — безмежну прямокутну область $\mathcal{D} = \{x \in (-\infty, \infty) \cup y \in (0, 1)\}$, де x, y — безрозмірні координати, віднесені до товщини тіла. Коефіцієнт теплопровідності λ матеріалу в області \mathcal{D} кусково-постійною функцією координати y

$$\lambda = \lambda(y) = \begin{cases} \lambda_1, & (x, y) \in \mathcal{D}_1, \\ \lambda_2, & (x, y) \in \mathcal{D}_2, \\ \vdots & \\ \lambda_N, & (x, y) \in \mathcal{D}_N, \end{cases} \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $\mathcal{D}_\alpha = \{x \in (-\infty, \infty) \cup y \in (Y_{\alpha-1}, Y_\alpha)\}$, $\lambda_\alpha = \text{const} > 0$, $Y_\alpha \in (0, 1)$, $Y_0 = 0$.

Параметри Y_α та λ_α визначають внутрішню структуру та теплофізичні властивості шаруватого тіла, що підлягають визначенню.

Якщо на сторонах $y = 0$ та $y = 1$, що обмежують область \mathcal{D} , задані розподіли температури $T_0(x)$ та $T_1(x)$, то в тілі виникає стаціонарне двовимірне температурне поле $T(x, y)$, яке, за певних обмежень на функції $T_0(x)$, $T_1(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, у кожній із відкритих областей \mathcal{D}_α задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D}_\alpha, \quad (2)$$

на межах сусідніх областей \mathcal{D}_α , $\alpha = \overline{1, N}$, умови

$$\begin{aligned} T(x, Y_\alpha) - T(x, Y_{\alpha-1}) &= 0, \\ \lambda_\alpha \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=Y_\alpha} - \lambda_{\alpha-1} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=Y_{\alpha-1}} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а на зовнішній межі області \mathcal{D} умови

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad T(x, 1) = T_1(x). \quad (4)$$

Лінійна крайова задача (2)-(4) має єдиний розв'язок, за яким, зокрема, можна визначити густини теплових потоків на поверхнях $y = 0$ та $y = 1$

$$J_0(x) = -\lambda_1 \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad J_1(x) = -\lambda_N \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=1}. \quad (5)$$

Таким чином, при заданих параметрах Y_1, Y_2, \dots, Y_N та $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ математична модель (2)-(5) встановлює відповідність між парами функцій $(T_0(x), T_1(x))$ та $(J_0(x), J_1(x))$. Позначатимемо ці пари функцій як T та J , а множину структурних Y_1, Y_2, \dots, Y_N і теплофізичних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ як Y та Λ . Тоді відповідність між парами $(T_0(x), T_1(x))$ і $(J_0(x), J_1(x))$, яку встановлює математична модель (2)-(5), можна трактувати як відображення

$$\mathcal{M}_{(Y, \Lambda)}^T : T \mapsto J. \quad (6)$$

Оскільки лінійна стосовно функції $T(x, y)$ крайова задача (2)-(5) математично коректна, то у разі виконання обмежень (2) на функції $(T_0(x), T_1(x))$ відображення $\mathcal{M}_{(Y, \Lambda)}^T$ є біективне, тобто існує обернене до нього відображення

$$\mathcal{M}_{(Y, \Lambda)}^J : J \mapsto T. \quad (7)$$

Відображення (7) визначається математичною моделлю, повна система співвідношень якої складається з рівняння (2), умов спряження (3), крайових умов

$$\lambda_0 \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = J_0(x), \quad \lambda_N \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=1} = J_1(x), \quad (8)$$

а також формул

$$T_0(x) = T(x, 0), \quad T_1(x) = T(x, 1), \quad (9)$$

де $J_0(x)$, $J_1(x)$ — задані функції, $T(x, y)$ — розв'язок задачі (2), (3), (8).

Таким чином маємо дві математичні моделі (2)-(5) та (2), (3), (8), (9), які називатимемо моделями T - та J -зондування відповідно. Обидві моделі пов'язують розподіли температури та густини теплового потоку, що діють на зовнішній поверхні об'єкта з його внутрішніми параметрами — структурою та теплофізичними властивостями.

2. Емпіричні моделі та множини інформативних параметрів

Математичні об'єкти T та J є моделями реальних фізичних полів — температури та густини потоку, що діють на поверхнях $y = 0$ та $y = 1$. Ці поля можна визначити незалежно від математичної моделі (2)-(4), наприклад, шляхом фізичних вимірювань. Для цього слід узяти шарувате тіло, теплофізичні властивості якого визначаються співвідношенням (1), створити на його верхній і нижній поверхнях стаціонарні розподіли температури $T_0^E(x)$ і $T_1^E(x)$, а відтак виміряти густини теплових потоків $J_0^E(x)$ і $J_1^E(x)$ на цих поверхнях. У такий спосіб буде встановлено відображення $\mathcal{E}_{(Y, \Lambda)}^T$ між парами $(T_0^E(x), T_1^E(x))$ і $(J_0^E(x), J_1^E(x))$ (позначатимемо їх як T^E та J^E відповідно)

$$\mathcal{E}_{(Y, \Lambda)}^T : T^E \mapsto J^E. \quad (10)$$

У позначеннях T^E , J^E , $\mathcal{E}_{(Y, \Lambda)}^T$ і т. д. літери E та \mathcal{E} вказують на емпіричну (апостеріорну) природу відповідних об'єктів.

Аналогічно, задаючи на зовнішніх поверхнях тіла теплові потоки $J_0^E(x)$ та $J_1^E(x)$ і вимірюючи стаціонарні розподіли температур, які при цьому виникатимуть на цих поверхнях, встановимо відповідність між парами J^E , T^E

$$\mathcal{E}_{(Y, \Lambda)}^J : J^E \mapsto T^E. \quad (11)$$

Слід підкреслити, що об'єкти T та J з одного боку та J^E та T^E з іншого, мають істотні відмінності між собою. Якщо областю визначення функцій T та J є

числова пряма $-\infty < x < \infty$ і вони є об'єктами детерміністичних математичних моделей (2)-(5) та (2), (3), (8), (9), то J^E та T^E визначені на скінченних відрізках прямої (можливо, навіть на скінченній множині точок на них) і є реалізаціями деяких випадкових процесів, що описують процеси відбору даних шляхом фізичних вимірювань, які застосовують для знаходження відповідних фізичних параметрів (температури та теплового потоку). Це стосується й відображень $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T$, $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J$ та $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$, $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J$, що пов'язують відповідні функції. Отже, на відміну від T , J , $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T$, $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J$, які є детерміністичними об'єктами, об'єкти T^E , J^E , $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$, $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J$ є нечіткими (стохастичними). Називатимемо їх об'єктами класів \mathcal{M} та \mathcal{E} відповідно.

Проте, якщо вибрати поздовжній розмір фізичного об'єкта, на якому здійснюються вимірювання, значно більшим за його товщину, та зондування здійснювати шляхом локального нагрівання, тобто вибирати функції T^E , J^E відмінними від нуля лише на відрізках, довжини яких значно менші за довжину об'єкта та достатньо віддалені від його поперечних країв, то математичні моделі (2)-(4) та (2), (3), (8) достатньо точно описуватимуть фізичні процеси, які виникають за таких умов. На цій основі можна визначити правила для співставлення об'єктів класів \mathcal{M} з їх нечіткими аналогами — об'єктами класу \mathcal{E} та навпаки, тобто — правила, що встановлюють відношення еквівалентності між цими двома групами об'єктів.

Нехай \mathcal{R} відображення, що ставить у відповідність об'єктові класу \mathcal{E} об'єкт класу \mathcal{M} . Його можна реалізувати, застосовуючи до емпіричних даних статистичне усереднення, інтерполяцію, згладжування, екстраполяцію тощо.

Отже, якщо задано два об'єкти T^E та J^E класу \mathcal{E} , які визначають емпіричні (апостеріорні) розподіли температур на зовнішніх поздовжніх поверхнях N -шарової плоскої структури та відповідні їм розподіли теплових потоків на цих поверхнях, то зіставляючи за правилом \mathcal{R} ці дані з математичною моделлю $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T$ чи $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J$, отримуємо деяку інформацію щодо внутрішньої структури та теплофізичних параметрів цього тіла. Таке зіставлення для моделей T - та J -зондування можна подати у вигляді символічних рівнянь

$$\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{R}(T^E)) = \mathcal{R}(J^E), \quad \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{R}(J^E)) = \mathcal{R}(T^E), \quad (12)$$

чи відповідних їм діаграм

$$\begin{array}{ccc} T^E & \xrightarrow{\mathcal{R}} & T & & J^E & \xrightarrow{\mathcal{R}} & J \\ \downarrow \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T & & \downarrow \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T & & \downarrow \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J & & \downarrow \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J \\ J^E & \xrightarrow{\mathcal{R}} & J & & T^E & \xrightarrow{\mathcal{R}} & T \end{array}, \quad (13)$$

в яких невідомі є параметри внутрішньої структури та теплофізичних властивостей Y та λ .

Тож пари функцій $T^E = (T_0^E(x), T_1^E(x))$ та $J^E = (J_0^E(x), J_1^E(x))$, відповідність $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$ (або $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J$) між якими встановлюють у процесі фізичних вимірювань за методиками, які описані вище, можна використовувати як інформативні параметри для неруйнівної ідентифікації шаруватих структур із використанням температурного поля.

Зондування тіла за цими методиками можна здійснювати неодноразово, використовуючи різні умови нагрівання. При цьому щораз отримуватимемо нову інформацію щодо структури та властивостей тіла, позаяк для кожної пари $T^E \in \mathcal{T}^E$ та $J^E \in \mathcal{J}^E$ справедливе рівняння виду (12). Так одержимо сукупності рівнянь для моделі T -зондування

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{R}(T_1^E)) &= \mathcal{R}(J_1^E), \\ \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{R}(T_2^E)) &= \mathcal{R}(J_2^E), \quad T_i^E \in \mathcal{T}^E, \quad J_i^E \in \mathcal{J}^E, \\ &\vdots \\ \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{R}(T_{Z_T}^E)) &= \mathcal{R}(J_{Z_T}^E) \end{aligned} \quad (14)$$

та для моделі J -зондування

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{R}(J_1^E)) &= \mathcal{R}(T_1^E), \\ \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{R}(J_2^E)) &= \mathcal{R}(T_2^E), \\ &\vdots \\ \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{R}(J_{Z_J}^E)) &= \mathcal{R}(T_{Z_J}^E), \quad J_i^E \in \mathcal{J}^E, \quad T_i^E \in \mathcal{T}^E. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут Z_T та Z_J — кількості відповідних зондувань.

Множини $\mathcal{T}^E = \{T_1^E, T_2^E, \dots, T_{Z_T}^E\}$ та $\mathcal{J}^E = \{J_1^E, J_2^E, \dots, J_{Z_T}^E\}$, між якими діє відображення $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$, називатимемо множиною інформаційних параметрів для T -зондування, а множини $\mathcal{J}^E = \{J_1^E, J_2^E, \dots, J_{Z_J}^E\}$ та $\mathcal{T}^E = \{T_1^E, T_2^E, \dots, T_{Z_J}^E\}$, які пов'язані відображенням $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J$ називатимемо множиною інформаційних параметрів для J -зондування. Відображення $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$ та $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J$ є емпіричними моделями тіла для T - та J -зондувань відповідно.

У разі збільшення кількості зондувань зростає кількість елементів множин \mathcal{F}^E та \mathcal{J}^E (Z_T — під час T -зондування та Z_J під час J -зондування), а відтак — збільшується інформативність відповідних емпіричних моделей $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$ та $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J$.

Як впливає з діаграм (13), сукупності рівнянь (14) і (15) можна розглядати як зіставлення відповідних емпіричних і математичних моделей N -шарової структури, які можна подати у вигляді символічних рівнянь

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T) = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T, \quad \mathcal{R}(\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J) = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J. \quad (16)$$

3. Прямі й обернені задачі ідентифікації

Розглядатимемо пряму й обернену задачі ідентифікації структури та теплофізичних властивостей шаруватого тіла з використанням теплового зондування.

Пряма задача для моделі T -зондування. Нехай задані множини параметрів структури $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ і теплофізичних параметрів $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$. Знайти для заданої множини функцій \mathcal{F} відповідну їй за відображенням $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T$ множини функцій \mathcal{J} .

Щоб розв'язати цю пряму задачу необхідно для кожної пари функцій крайових умов $(T_0, T_1) \in \mathcal{F}$ розв'язати задачу (2)-(4), а відтак за формулами (5) обчислити відповідну їй пару функцій $(J_0, J_1) \in \mathcal{J}$. Її розв'язок можна подати символічно у вигляді

$$J = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(T), T \in \mathcal{F} \quad \text{або} \quad \mathcal{J} = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{F}). \quad (17)$$

Множину \mathcal{J} називатимемо розв'язком цієї прямої задачі ідентифікації на множині \mathcal{F} для множини параметрів Y, Λ .

Пряма задача для моделі J -зондування. Нехай задані множини параметрів структури $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ і теплофізичних параметрів $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$. Для заданої множини \mathcal{J} знайти відповідну їй за відображенням $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J$ множини функцій \mathcal{F} .

Щоб розв'язати цю пряму задачу необхідно для кожної пари функцій крайових умов $(J_0, J_1) \in \mathcal{J}$ розв'язати задачу (2), (3), (8), а відтак за формулами (9) обчислити відповідну їй пару функцій $(T_0, T_1) \in \mathcal{F}$. Розв'язок цієї задачі можна подати символічно як

$$T = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(J), J \in \mathcal{J} \quad \text{або} \quad \mathcal{F} = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{J}). \quad (18)$$

Множину \mathcal{F} називатимемо розв'язком цієї прямої задачі ідентифікації на множині \mathcal{J} для множини параметрів Y, Λ .

Із використанням розв'язків прямих задач ідентифікації можна кількісно оцінювати інформативні параметри для різних умов теплового зондування, а також

вплив на них параметрів Y_1, Y_2, \dots, Y_N та $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$, що підлягають визначенню. Це, своєю чергою, дозволяє оцінювати чутливість і роздільну здатність методу ідентифікації, здійснювати його оптимізацію за цими показниками шляхом відповідного вибору умов зондування.

Для цього введемо обернене до \mathcal{R} відображення \mathcal{R}^{-1} , що ставить у відповідність об'єктові класу \mathcal{M} об'єкт класу \mathcal{E} . Дію відображення \mathcal{R}^{-1} для моделей T - та J -зондування можна зобразити діаграмами

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}} & T^E & J & \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}} & J^E \\
 \downarrow \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T & & \downarrow \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T, & \downarrow \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J & & \downarrow \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J, \\
 J & \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}} & J^E & T & \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}} & T^E
 \end{array} \quad (19)$$

з яких випливає, зокрема, що \mathcal{R}^{-1} встановлює також відповідності між множинами

$$\mathcal{R}^{-1}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^E, \quad \mathcal{R}^{-1}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^E, \quad (20)$$

а також математичними й емпіричними моделями

$$\mathcal{R}^{-1}: \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T \rightarrow \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T, \quad \mathcal{R}^{-1}: \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J \rightarrow \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J. \quad (21)$$

Відображення \mathcal{R}^{-1} можна реалізувати шляхом моделювання процесів відбору даних під час теплового зондування. Наприклад, якщо вимірювання здійснюються у дискретній множині точок на поверхні тіла, то відображення \mathcal{R}^{-1} включатиме формування на основі розв'язків відповідних прямих задач дискретної множини значень пар функцій $(J_0(x), J_1(x))$ (для T -зондування) або $(T_0(x), T_1(x))$ (для J -зондування) у заданих дискретних множинах точок вимірювання на поверхнях тіла $y = 0, 1$. Щоб врахувати вплив випадкових похибок на результати вимірювання можна змоделювати процес відбору даних певним стохастичним процесом, який для заданого розв'язку прямої задачі, генерує задану кількість випадкових реалізацій із заданим статистичним розкидом [4].

Використовуючи відображення \mathcal{R}^{-1} і розв'язок прямої задачі $\mathcal{J} = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{T})$ та $\mathcal{T} = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{J})$, можемо збудувати множини $\mathcal{T}^E, \mathcal{J}^E$, а також відображення $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T$ таке, що $\mathcal{J}^E = \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{T}^E)$

$$\mathcal{T}^E = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{T}), \quad \mathcal{J}^E = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{J}), \quad \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T), \quad (22)$$

які утворюють модель множини інформативних параметрів для моделі T -зондування.

Аналогічно для моделі J -зондування матимемо

$$\mathcal{J}^E = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{J}), \quad \mathcal{J}^E = \mathcal{D}^{-1}(\mathcal{J}), \quad \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J = \mathcal{D}^{-1}\left(\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J\right), \quad (23)$$

де $\mathcal{J} = \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{J})$, $\mathcal{J}^E = \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{J}^E)$.

Моделі множин інформативних параметрів можна використовувати як вхідні дані для відповідних обернених задач із метою відлагоджування алгоритмів їх розв'язування, оцінки їх швидкодії та впливу статистичних розкидів даних на точність розв'язування, стійкість алгоритмів тощо.

Обернена задача для моделі T-зондування. Нехай задані множини $\mathcal{J}^E, \mathcal{J}^E$, що пов'язані відображенням $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T: \mathcal{J}^E = \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^T(\mathcal{J}^E)$ й отримані шляхом T-зондування N-шарового тіла. Знайти такі множини структурних Y та теплофізичних Λ параметрів, для яких розв'язок прямої задачі T-зондування на множині $\mathcal{R}(\mathcal{J}^E)$ є еквівалентний множині \mathcal{J}^E за відображенням \mathcal{R}

$$\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T\left(\mathcal{R}(\mathcal{J}^E)\right) = \mathcal{R}(\mathcal{J}^E). \quad (24)$$

Обернена задача для моделі J-зондування. Нехай задані множини $\mathcal{J}^E, \mathcal{J}^E$, що пов'язані відображенням $\mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J: \mathcal{J}^E = \mathcal{E}_{(Y,\Lambda)}^J(\mathcal{J}^E)$ й отримані шляхом J-зондування N-шарового тіла. Знайти множини структурних Y та теплофізичних Λ параметрів, для яких розв'язок прямої задачі J-зондування на множині $\mathcal{R}(\mathcal{J}^E)$ є еквівалентний у сенсі відображення \mathcal{R} множині \mathcal{J}^E

$$\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J\left(\mathcal{R}(\mathcal{J}^E)\right) = \mathcal{R}(\mathcal{J}^E) \quad (25)$$

$\mathcal{J}^E, \mathcal{J}^E$ у формулах (24), (25) — задані множини функцій; $\mathcal{R}, \mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^T$ та $\mathcal{M}_{(Y,\Lambda)}^J$ — відомі відображення, тому їх можна розглядати як рівняння стосовно множин невідомих параметрів Y та Λ .

4. Числове дослідження прямої задачі

Для розв'язування прямої задачі застосуємо до функцій $T(x, y)$, $T_0(x)$ і $T_1(x)$ перетворення Фур'є щодо змінної x . Рівняння (2), умови (3) та (4), записані стосовно трансформанти $t(\omega, y)$ функції $T(x, y)$ матимуть вигляд

$$\frac{d^2 t(\omega, y)}{dy^2} - \omega^2 t(\omega, y) = 0, \quad (26)$$

$$t(\omega, Y_\alpha) - t(\omega, Y_{\alpha-1}) = 0,$$

$$\lambda_\alpha \frac{\partial t(\omega, y)}{\partial y} \Big|_{y=Y_\alpha} - \lambda_{\alpha-1} \frac{\partial t(\omega, y)}{\partial y} \Big|_{y=Y_{\alpha-1}} = 0, \quad (27)$$

а на зовнішній межі області \mathcal{D} умови

$$t(\omega, 0) = t_0(\omega), \quad t(\omega, 1) = t_1(\omega). \quad (28)$$

Загальний розв'язок рівняння (26) має вигляд

$$t(\omega, y) = C_1(\omega, y) \exp(-\omega y) + C_2(\omega, y) \exp(\omega y), \quad (29)$$

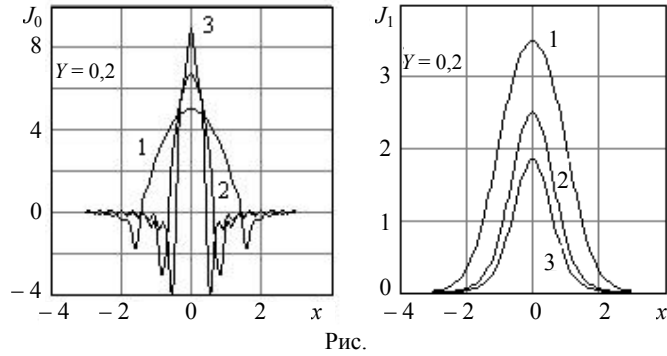
$$\text{де } C_i(\omega, y) = \begin{cases} C_{i1}(\omega), & y \in (Y_0, Y_1) \\ C_{i2}(\omega), & y \in (Y_1, Y_2) \\ \vdots \\ C_{iN}(\omega), & y \in (Y_{N-1}, Y_N) \end{cases}, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Підставляючи розв'язок (29) в умови (27), (28), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів

$$\begin{aligned} C_{11} + C_{21} &= t_0(\omega), \\ C_{1\alpha+1} \exp(-\omega Y_\alpha) + C_{2\alpha+1} \exp(\omega Y_\alpha) - C_{1\alpha} \exp(-\omega Y_\alpha) - C_{2\alpha} \exp(\omega Y_\alpha) &= 0, \\ -\lambda_{\alpha+1} C_{1\alpha+1} \exp(-\omega Y_\alpha) + \lambda_{\alpha+1} C_{2\alpha+1} \exp(\omega Y_\alpha) + \lambda_\alpha C_{1\alpha} \exp(-\omega Y_\alpha) - \\ -\lambda_\alpha C_{2\alpha} \exp(\omega Y_\alpha) &= 0, \\ C_{1N} \exp(-\omega) + C_{2N} \exp(\omega) &= t_1(\omega), \quad \alpha \in [1, N-1]. \end{aligned} \quad (31)$$

Розглянемо для прикладу двошарову структуру ($N = 2$) й обмежимося випадками зондувань, за яких на поверхні $y = 1$ підтримується стала температура $T_1(x) = 0$, а на $y = 0$ задано температурне поле $T_0(x)$. При цьому

$$\begin{aligned} C_{11}(\omega) &= \frac{t_0(\omega) [\operatorname{ch}(\omega Y) + \operatorname{sh}(\omega Y)] [\operatorname{sh}(\omega(1-Y)) + \xi \operatorname{ch}(\omega(1-Y))]}{(\xi+1) \operatorname{sh}(\omega) + (\xi-1) \operatorname{sh}(\omega(2Y-1))}, \\ C_{21}(\omega) &= -\frac{t_0(\omega) [\operatorname{ch}(\omega Y) - \operatorname{sh}(\omega Y)] [-\operatorname{sh}(\omega(Y-1)) + \xi \operatorname{ch}(\omega(Y-1))]}{(\xi+1) \operatorname{sh}(\omega) + (\xi-1) \operatorname{sh}(\omega(2Y-1))}, \quad (32) \\ C_{12}(\omega) &= \frac{t_0(\omega) \exp(\omega)}{(\xi+1) \operatorname{sh}(\omega) + (\xi-1) \operatorname{sh}(\omega(2Y-1))}, \\ C_{22}(\omega) &= -\frac{t_0(\omega) \exp(-\omega)}{(\xi+1) \operatorname{sh}(\omega) + (\xi-1) \operatorname{sh}(\omega(2Y-1))}, \quad \xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \end{aligned}$$



Використовуючи розв'язок (29), з урахуванням формул (5) знаходимо формули для Фур'є-трансформант функцій $J_0(x)$ і $J_1(x)$, які визначають густини теплового потоку на поверхнях $x = 0$ та $x = 1$

$$\begin{aligned} j_0(\omega) &= -\lambda_1 [-\omega C_{11}(\omega) + \omega C_{21}(\omega)], \\ j_1(\omega) &= -\lambda_2 [-\omega C_{12}(\omega) \exp(-\omega) + \omega C_{22}(\omega) \exp(\omega)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Застосовуючи до функцій $t(\omega, y)$ і $j_0(\omega), j_1(\omega)$ обернене перетворення Фур'є, визначаємо температурне поле $T(x, y)$ і теплові потоки $J_0(x)$ і $J_1(x)$.

Отриманий розв'язок прямої задачі використали для дослідження впливу умов нагрівання та внутрішньої структури тіла на теплові потоки $J_0(x)$ та $J_1(x)$. На рисунку наведені розподіли цих потоків під час T -зондування за умови, що на поверхні $y = 1$ підтримують сталу температуру $T_1 = 0$, на відріжку $x \in [-\pi/2a, \pi/2a]$ поверхні $y = 0$ діє температурне поле $T_0(x) = \cos(ax)$, а поза його межами $T_0(x) = 0$. Криві 1, 2 та 3 на графіках відповідають значенням параметра $a = 1, 2, 3$, який визначає ступінь зосередженості нагрівання під час зондування.

Щоб оцінити вплив товщини складових двошарового тіла числові дослідження проведено для трьох значень параметра Y (товщини верхнього шару) 0,2, 0,5 і 0,8. У таблиці для порівняння наведені значення густин потоків $J_0(x)$ і $J_1(x)$ (віднесені до теплопровідності верхнього шару) в точці максимуму $x = 0$ (див. рис.). При розрахунках приймали, що відношення питомих теплопровідностей шарів ξ дорівнює двом.

Таблиця

	a	$Y = 0,2$	$Y = 0,5$	$Y = 0,8$
$J_0(0)$	1	5,026	3,997	3,497
	2	6,707	5,505	5,123
	3	8,946	7,755	7,464
$J_1(0)$	1	3,499	2,858	2,417
	2	2,506	2,087	1,792
	3	1,860	1,561	1,348

Висновки. У статті розглянуто два способи теплового зондування багат шарового тіла з метою отримання даних для неруйнівної ідентифікації його внутрішньої структури та теплофізичних властивостей — T - та J -моделі зондування.

Для кожного з цих способів сформульовані прямі й обернені задачі ідентифікації. Формулювання обернених задач враховують стохастичну природу даних, які отримують шляхом фізичних вимірювань на реальних об'єктах. На прикладі двошарової структури проведено числове дослідження інформативних параметрів у разі застосування локального нагріву за моделлю T -зондування. Крім T - та J -зондувань можливі й інші способи збору даних про внутрішню структуру та теплофізичні властивості багат шарових тіл із використанням теплових процесів. Це, зокрема, способи, які приводять до змішаних задач теплопровідності для безмежної смуги, наприклад, коли на одній із її сторін задано теплових потік, а на іншій — розподіл температури.

Спосіб зондування та конкретні умови теплообміну (розподіли температур та/чи теплових потоків, які задають, щоб ініціювати теплові процеси в тілі) можуть суттєво впливати на чутливість і точність відповідного методу ідентифікації. Так, отримані числові результати вказують на істотні залежності вимірювальних параметрів T -зондування, а саме, залежності густин теплових потоків, що перетікають через нижню та верхню поверхні тіла, від товщини окремих шарів, з яких воно складається. Крім того, з проведених числових досліджень випливає, що змінюючи область локалізації нагрівання, можна впливати на чутливість інформативних параметрів до змін параметрів, що підлягають визначенню в задачах ідентифікації. Тому з використанням розробленого методу розв'язування прямих задач ідентифікації необхідно дослідити інформативні параметри для різних способів зондування та конкретних умов теплообміну з тим, щоб вибрати оптимальні.

Запропоновані формулювання обернених задач дозволяють будувати алгоритми їх числової реалізації, застосовуючи розв'язки відповідних прямих задач. Тому важливого значення набуває проблема створення швидких алгоритмів розв'язування сформульованих прямих задач ідентифікації. Розвинутий тут метод, який базується на перетворенні Фур'є, дозволяє отримувати аналітичні розв'язки прямих задач і є одним із найефективніших способів вирішення цієї проблеми. У подальших дослідженнях цей метод буде застосовано для числового аналізу відповідних обернених задач.

Література

- [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.
- [2] Чекурін В. Ф., Шуміліна Н. В. До ідентифікації прямокутного включення у півплощині з використанням потенціального поля // Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів (серія), вип. 7: Неруйнівний контроль конструкційних та функціональних матеріалів: Зб. наук. пр. — Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка, 2002. — С. 130-132.

Василь Чекурін

До ідентифікації параметрів багатослойних тіл із використанням теплового зондування

- [3] Чекурин В. Ф., Шумилина Н.В. Обратная задача идентификации приповерхностных включений с использованием потенциального поля // Тезисы докладов Междунар. школы-конференции «Обратные задачи: теории и приложения» (11-19 августа 2002 г., г. Ханты-Мансийск, Россия). — Ч. 1. — С. 64-65.
- [4] Чекурин В. Ф. Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла // Известия Академии Наук: Механика твердого тела. — 1998. — № 3. — С. 86-97.

To identification of multilayered bodies parameters with use of thermal sounding

Vasyl Chekurin

The mathematical model for identification of the structure and thermal properties of multilayer plane bodies with the use of stationary thermal processes has been considered. Within the frame of the model, the information parameters have been established and direct and inverse problems for identification have been formulated. For the case of a two-layered body the influence of the body structure on the measuring information parameters has been investigated.

К идентификации параметров многослойных тел с использованием теплового зондирования

Василь Чекурин

Рассматривается математическая модель для идентификации структуры и теплофизических свойств плоских многослойных тел с использованием стационарных тепловых процессов. В рамках модели установлены множества информативных параметров, сформулированы прямые и обратные задачи идентификации. На примере двухслойного тела выполнены количественные исследования влияния структуры и условий нагрева тела на измеряемые информативные параметры.

Отримано 22.04.08