УДК 518.5+519.65

Рівномірне наближення сумою многочлена й експоненти з точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка

Петро Малачівський

К. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Досліджено властивості рівномірного (чебишовського, мінімаксного) наближення функції сумою многочлена й експоненти з найменшою абсолютною похибкою та точним відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка. Встановлено достатні умови існування такого рівномірного наближення та запропоновано алгоритм для визначення його параметрів за схемою Ремеза.

Ключові слова: рівномірне (чебишовське) наближення з ермітовим інтерполюванням, точки чебишовського альтернансу, схема Ремеза.

Вступ. Рівномірне (чебишовське, мінімаксне) наближення функцій з інтерполяційними умовами використовується для побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення [1]. Властивості рівномірного наближення функції нелінійним виразом з інтерполюванням розглянуто у працях [1-4], умови існування такого наближення з ермітовим інтерполюванням у зовнішніх точках — у роботі [5]. Дана стаття присвячена встановленню умов існування рівномірного наближення неперервно диференційовної на відрізку [α, β] функції $f(x)$ ($f(x) \in C^1[\alpha, \beta]$) сумою многочлена й експоненти

$$E_n(a; x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + Ae^{px}, \quad A \neq 0, \quad p \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

з точним відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка. Таке рівномірне наближення використовується під час побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення [5] виразом вигляду (1).

1. Існування рівномірного наближення сумою полінома й експоненти з найменшою абсолютною похибкою та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка

Розглянемо неперервно диференційовні на відрізку [α, β] функції $f(x)$, які справджують нерівності

$$W^{(n)} > 0, \qquad W^{(n)} \neq W_0^{(n)}, \tag{2}$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f;\, z_2,\, z_3, ..., z_{n+4})}{D_{n+1}(f;\, z_1,\, z_2, ..., z_{n+3})}, \tag{3}$$

$$W_0^{(n)} = \frac{D_{n+1}(s_{n+1};\, z_2,\, z_3, ..., z_{n+4})}{D_{n+1}(s_{n+1};\, z_1,\, z_2, ..., z_{n+3})}, \tag{4}$$

$$s_k(x) = x^k,$$

$$D_k\left(U;\; z_j,\, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right) = \frac{D_{k-1}\left(U;\;\, z_{j+1},\, z_{j+2}, ..., z_{j+k+1}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1};\; z_{j+1},\, z_{j+2}, .., z_{j+k+1}\right)} -$$

$$-\frac{D_{k-1}\left(U; z_j,\; z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k}\right)}, \quad k = \overline{2,\; n+1}, \quad j = \overline{1,\, n-k+3}, \tag{5}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = U(z_{j+2}) - U(z_j), \quad j = \overline{1,\, n+2},$$

z_j $\left(j = \overline{1,\, n+4}\right)$ — довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з відрізка [α, β].

Достатню умову існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку [α, β], тоді:

а) достатньою умовою існування рівномірного наближення функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n ($n > 1$) й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка α та β є справдження нерівностей (2), у яких

$$D_2\left(U;\; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}\right) = \begin{cases} \dfrac{D_1(U;\, z_2, z_4)}{D_1(s_1;\, z_2, z_4)} - U'(z_1), & \text{якщо} \quad j = 1; \\[2ex] \dfrac{D_1\left(U;\, z_{j+1}, z_{j+3}\right)}{D_1\left(s_1;\, z_{j+1}, z_{j+3}\right)} - \dfrac{D_1\left(U;\, z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(s_1;\, z_j, z_{j+2}\right)}, & \text{якщо} \;\; 1 < j < n+1; \\[2ex] U'(z_{n+4}) - \dfrac{D_1(U;\, z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1;\, z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо} \quad j = n+1, \end{cases} \tag{6}$$

$$D_1\left(U;\; z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо} \quad j = 1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), & \text{якщо} \quad j = 2; \\ U(z_{j+2}) - U(z_j), & \text{якщо} \quad 2 < j \le n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо} \quad j = n+1; \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо} \quad j = n+2, \end{cases} \tag{7}$$

$U'(x)$ — похідна функції $U(x)$, z_j ($j = \overline{3, n+2}$) — довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з інтервалу (α, β), $z_1 = z_2 = \alpha$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

б) у випадку виконання умов пункту *а* існує єдине рівномірне наближення функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n ($n > 1$) й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка, а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(\alpha) - \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - Ae^{p\alpha} = 0, \\ f'(\alpha) - \sum_{i=1}^{n} i a_i \alpha^{i-1} - Ape^{p\alpha} = 0, \\ f(z_j) - \sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - Ae^{pz_j} = (-1)^j \mu, \qquad j = \overline{3,\ n+2}, \\ f(\beta) - \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^i - Ae^{p\beta} = 0, \\ f'(\beta) - \sum_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} - Ape^{p\beta} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

у якій z_j ($j = \overline{3, n+2}$) — упорядковані за зростанням точки рівномірного альтернансу з інтервалу (α, β).

Доведення. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови теореми. Тоді, за теоремою існування та єдиності рівномірного наближення функції нелінійним виразом з ермітовим інтерполюванням у зовнішніх точках [5], для існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення та значення її похідної у крайніх точках відрізка α та β достатньо, щоб система рівнянь (8) мала єдиний розв'язок для довільних упорядкованих за зростанням точок z_j ($j = \overline{3, n+2}$) з інтервалу (α, β).

Покажемо, що у разі справдження умов теореми система рівнянь (8) має єдиний розв'язок щодо невідомих a_i ($i = \overline{0, n}$), A, p та μ. Виключивши з системи (8) невідомі a_0 і μ, отримаємо

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} i a_i \alpha^{i-1} + Ape^{p\alpha} = f'(\alpha), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(z_4^i + z_3^i - 2\alpha^i\right) + A\left(e^{pz_3} + e^{pz_2} - 2e^{p\alpha}\right) = f(z_4) + f(z_3) - 2f(\alpha), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(z_{j+2}^i - z_j^i\right) + A\left(e^{pz_{j+2}} - e^{pz_j}\right) = f(z_{j+2}) - f(z_j), \qquad j = \overline{3,\ n}, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(2\beta^i - z_{n+1}^i - z_{n+2}^i\right) + A\left(2e^{p\beta} - e^{pz_{n+1}} - e^{pz_{n+2}}\right) = 2f(\beta) - f(z_{n+1}) - f(z_{n+2}), \\ \sum_{i=1}^{n} i a_i \beta^{i-1} + Ape^{p\beta} = f'(\beta). \end{cases} \tag{9}$$

З урахуванням позначень (3)-(7) система рівнянь (9) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D_1\left(s_i; z_j,\, z_{j+2}\right) + AD_1\left(\varphi; z_j,\, z_{j+2}\right) = D_1\left(f; z_j,\, z_{j+2}\right),\quad j=\overline{1,\, n+2}, \tag{10}$$

де $\varphi(p, x) = e^{px}$. Із цієї системи виключимо невідомі $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ і A, які входять лінійно. Виключення параметрів $a_i\left(i=\overline{1,\, n}\right)$ проводитимемо в порядку зростання індексу. Починаючи з $i = 1$, із кожного рівняння системи (10) визначаємо a_i, а потім, попарно віднімаючи j-ті рівняння від $(j + 1)$-их, отримуємо систему щодо решти параметрів $a_r\left(r=\overline{i+1,n}\right)$, A і p. Після виключення з системи (10) невідомого a_1 отримаємо

$$\sum_{i=2}^{n} a_i D_2\left(s_i;\ z_j,\ z_{j+1},\, z_{j+2},\ z_{j+3}\right) + AD_2\left(\varphi;\ z_j,\ z_{j+1},\, z_{j+2},\ z_{j+3}\right) =$$
$$= D_2\left(f;\, z_j,\ z_{j+1},\, z_{j+2},\ z_{j+3}\right),\quad j=\overline{1, n+1}\,. \tag{11}$$

Таке виключення невідомого a_1 можна зробити, бо коефіцієнти біля нього в усіх рівняннях не набувають нульового значення. Справді, жодне зі значень виразу

$$D_1\left(s_1;\ z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо}\quad j=1; \\ z_4 + z_3 - 2z_2\,, & \text{якщо}\quad j=2; \\ z_{j+2} - z_j\,, & \text{якщо}\quad 2<j\le n; \\ 2z_{n+3} - z_{n+2} - z_{n+1}\,, & \text{якщо}\quad j=n+1; \\ 1, & \text{якщо}\quad j=n+2, \end{cases}$$

для $j=\overline{1,n+2}$ не дорівнює нулю, оскільки за умовою теореми числа $z_j\left(j=\overline{3,n+2}\right)$ — це різні упорядковані за зростанням числа з інтервалу (α, β), $z_2 = \alpha$ і $z_{n+3} = \beta$. Для упорядкованих за зростанням точок $z_j\left(j=\overline{2, n+3}\right)$ вирази $D_1(s_1; z_j, z_{j+2})$, $j=\overline{1,n+2}$ набувають лише додатних значень.

Для продовження виключення решти параметрів $a_i\ \left(i=\overline{2,n}\right)$ із системи рівнянь (11) необхідно переконатися, що коефіцієнти біля них також відмінні від нуля. Для цього оцінимо значення виразів

$$\frac{D_k\left(s_{k+1}; z_j, z_{j+1},\dots, z_{j+k+1}\right)}{D_k\left(s_k; z_j, z_{j+1},\dots, z_{j+k+1}\right)},\quad j=\overline{1,\, n-k+2}\,. \tag{12}$$

Для $k = 1$ і $j=\overline{3,\, n}$ значення виразу (12) дорівнює відношенню приростів функції $s_2(x) = x^2$ до приростів аргументу

$$\frac{D_1\left(s_2;\ z_j,\ z_{j+2}\right)}{D_1\left(s_1;\ z_j,\ z_{j+2}\right)} = \frac{z_{j+2}^2 - z_j^2}{z_{j+2} - z_j}\,.$$

За теоремою Лагранжа [6] про кінцеві прирости значення цього відношення дорівнює похідній функції $s_2(x) = x^2$ в деякій середній точці ζ_j з інтервалу (z_j, z_{j+2}).

У випадку $j = 2$ або $j = n + 1$ значення виразу (12) дорівнює відповідно

$$\frac{D_1(s_2;\, z_2,\, z_4)}{D_1(s_1;\, z_2,\, z_4)} = \frac{z_4^2 + z_3^2 - 2z_2^2}{z_4 + z_3 - 2z_2} \tag{13}$$

або

$$\frac{D_1(s_2;\, z_{n+1},\, z_{n+3})}{D_1(s_1;\, z_{n+1},\, z_{n+3})} = \frac{2z_{n+3}^2 - z_{n+2}^2 - z_{n+1}^2}{2z_{n+3} - z_{n+2} - z_{n+1}}\,. \tag{14}$$

Значення цих виразів на підставі теореми про відношення комбінацій приростів [7] дорівнює похідній функції $s_2(x) = x^2$ в середній точці відповідних інтервалів: відношення (13) — похідній у точці ζ_2 з інтервалу (α, z_4), а відношення (14) — в точці ζ_{n+1} із (z_{n+1}, β).

І, нарешті, у випадку $j = 1$ або $j = n + 2$ значення виразу (12) також дорівнює похідній функції $s_2(x) = x^2$, але вже у конкретних точках, а саме, в точці z_1, якщо $j = 1$, і точці z_{n+4}, якщо $j = n + 2$.

Отже, у випадку $k = 1$ значення виразу (12) дорівнює похідній функції $s_2(x) = x^2$ в середніх точках ζ_j інтервалів (z_j, z_{j+2}) для $j = \overline{2, n+1}$, а для $j = 1$ або $j = n + 2$ точки ζ_1 і ζ_{n+2} співпадають відповідно з точками z_1 і z_{n+4}. Це означає, що коефіцієнти біля невідомого a_2 в усіх рівняннях системи (11) дорівнюють значенню похідної функції $s_2(x) = x^2$ в точках ζ_j $\left(j = \overline{1, n+2}\right)$, тобто

$$D_2(s_2;\, z_j,\, z_{j+1},\dots,\, z_{j+3}) = 2(\zeta_{j+1} - \zeta_j),\ \ j = \overline{1, n+1}\,. \tag{15}$$

Оскільки числа z_j $\left(j = \overline{2, n+3}\right)$ упорядковані за зростанням, то точки ζ_j $\left(j = \overline{2, n+1}\right)$ також будуть упорядкованими за зростанням. Окрім того, ці точки належать інтервалу (α, β). Отже коефіцієнти біля невідомого a_2 в усіх рівняннях системи (11) набувають лише додатних значень. Тому невідоме a_2 також можна виключити з системи рівнянь (11).

Аналогічно, можна переконатися у тому, що коефіцієнти біля решти невідомих a_i $\left(i = \overline{3, n}\right)$ також не набувають нульових значень у процесі їхнього послідовного виключення з системи рівнянь. Так, під час виключення невідомого a_k коефіцієнти біля нього будуть такими

$$D_k\left(s_k;\ \ z_j,\ z_{j+1},\dots,\ \ z_{j+k+1}\right) = \frac{D_{k-1}\left(s_k;\ \ z_{j+1},\ \ z_{j+2},\dots,\ \ z_{j+k+1}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1};\ \ z_{j+1},\ \ z_{j+2},\dots,\ \ z_{j+k+1}\right)} -$$
$$- \frac{D_{k-1}\left(s_k;\ z_j,\ z_{j+1},\dots,\ z_{j+k}\right)}{D_{k-1}\left(s_{k-1};\ z_j,\ z_{j+1},\dots,\ z_{j+k}\right)},\ \ j = \overline{1, n-k+3}\,. \tag{16}$$

Послідовно $(k - 1)$ раз застосувавши до кожного з доданків у правій частині виразу (16) теорему Коші про відношення приростів функцій [6], можна переконатися, що коефіцієнти біля невідомого a_k дорівнюють різниці $(k - 1)$-их похідних степеневої функції $s_k(z) = z^k$ у деяких середніх точках відповідних інтервалів, тобто

$$D_k\left(s_k;\ z_j,\ z_{j+1},...,\ z_{j+k+1}\right) = k\left(\xi_{j+1} - \xi_j\right),\ j = \overline{1,\ n-k+3},$$

де $\xi_j \in \left(z_j,\ z_{j+k}\right),\ j = \overline{1,\ n-k+4}$.

Оскільки $(k-1)$-а похідна степеневої функції $s_k(z) = z^k$ строго монотонна та точки z_j $\left(j = \overline{2,\ n+3}\right)$ упорядковані за зростанням, то числа ξ_j $\left(j = \overline{1,\ n-k+4}\right)$ також будуть упорядкованими за зростанням, тобто $\xi_j < \xi_{j+1}$. Звідси випливає, що коефіцієнти біля невідомого a_k в усіх рівняннях відповідної системи рівнянь набувають лише додатних значень.

Після виключення з системи рівнянь (11) усіх невідомих параметрів a_i $\left(i = \overline{0,n}\right)$ отримаємо систему рівнянь щодо невідомих A і p

$$\begin{cases} AD_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right) = D_{n+1}\left(f; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right), \\ AD_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right) = D_{n+1}\left(f; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right) \end{cases}. \tag{17}$$

Дослідимо вільні члени рівнянь цієї системи та коефіцієнти біля невідомого A. Для цього розглянемо вирази

$$\frac{D_n\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)}{D_n\left(S_n; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)},\quad j = \overline{1,3}. \tag{18}$$

Аналогічно, як і у випадку (16), послідовно n разів застосувавши теорему Коші [6], можна показати, що вирази (18) є розділеними різницями n-го порядку функції $U(z)$ на множині точок $\left\{z_i\right\}_{i=j}^{j+n+1}$. Отже, кожен із цих виразів дорівнює n-й похідній функції $U(z)$ у деякій середній точці ς_j з інтервалу (z_j, z_{j+n+1}), тобто

$$\frac{D_n\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)}{D_n\left(s_n; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)} = U^{(n)}\left(\varsigma_j\right),\quad j = \overline{1,3}, \tag{19}$$

де $\varsigma_j \in \left(z_j, z_{j+n+1}\right),\ j = \overline{1,3}$. Це означає, що коефіцієнти біля невідомого A у системі рівнянь (17) дорівнюють приросту n-ої похідної функції $\varphi(p, x) = e^{px}$ по x. Оскільки похідні експоненти e^{px} для $p \neq 0$ є строго монотонними функціями по x, то коефіцієнти біля A в рівняннях системи (17) для $p \neq 0$ не набувають нульового значення. Тому система рівнянь (17) для від'ємних ($p < 0$) і додатних ($p > 0$) значень параметра p матиме дійсний відмінний від нульового розв'язок щодо невідомого A, якщо вільні члени її рівнянь також не набувають нульового значення. З урахуванням рівності (19) вільні члени рівнянь системи (17) дорівнюють приростам n-ої похідної функції $f(x)$, тобто

$$D_{n+1}\left(f; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+2}\right) = f^{(n)}\left(\xi_{j+1}\right) - f^{(n)}\left(\xi_j\right),\quad j = 1,\ 2, \tag{20}$$

де $\xi_j \in \left(z_j, z_{j+n+1}\right)$.

Оскільки за умовою теореми

$$W^{(n)} > 0\,, \tag{21}$$

то відношення приростів n-их похідних функції $f(x)$ додатне. Тому відповідно й самі прирости функції $f(x)$ відмінні від нуля. Це означає, що вільні члени рівнянь системи (17) також не набувають нульових значень. Поділивши перше рівняння системи (17) на друге, отримаємо трансцендентне рівняння відносно p

$$\omega_n\left(p\right) = W^{(n)}\,, \tag{22}$$

де $\omega_n\left(p\right) = \dfrac{D_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right)}$, а значення $W^{(n)}$ визначається за формулою (3) з урахуванням виразів (5)-(7).

Ліву частину цього рівняння з урахуванням (19) подамо у вигляді

$$\omega_n\left(p\right) = \frac{\varphi^{(n)}\left(p, \tau_3\right) - \varphi^{(n)}\left(p, \tau_2\right)}{\varphi^{(n)}\left(p, \tau_2\right) - \varphi^{(n)}\left(p, \tau_1\right)}, \tag{23}$$

де $\tau_i \in \left(z_i, z_{i+n+1}\right)\left(i = \overline{1,3}\right)$. Підставивши замість $\varphi^{(n)}(p, x)$ n-у похідну функції $\varphi(p, x) = e^{px}$, отримаємо

$$\omega_n\left(p\right) = \frac{e^{p\tau_3} - e^{p\tau_2}}{e^{p\tau_2} - e^{p\tau_1}}\,. \tag{24}$$

Оскільки згідно з [8] для чисел τ_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ справджуються співвідношення $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$, то у лівій частині рівняння (22) можна сформувати відношення розділених різниць приростів експоненти. Для цього ліву частину рівняння (22) помножимо та поділимо на відповідні різниці приростів аргументу — $(\tau_2 - \tau_1)/(\tau_3 - \tau_2)$. Замінивши отримані розділені різниці відповідними похідними в середніх точках, отримаємо

$$\omega_n\left(p\right) = Ke^{p\left(\zeta_2 - \zeta_1\right)}, \tag{25}$$

де

$$K = \frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad \zeta_1 \in \left(z_1, z_{n+3}\right), \quad \zeta_2 \in \left(z_2, z_{n+4}\right).$$

Оскільки ліва частина рівняння (22) є експоненційною функцією та коефіцієнт K додатний, то рівняння (22) має єдиний розв'язок щодо p, якщо його права частина додатна та її значення охоплюється множиною можливих значень функції $\omega_n(p)$, заданою виразом (22), для $p \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$.

Визначимо множину допустимих значень функції $\omega_n(p)$. Відповідно до (25) функція $\omega_n(p)$ строго монотонна на інтервалах $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$ і набуває таких граничних значень

$$\lim_{p\to-\infty}\omega_n(p)=0, \qquad \lim_{p\to 0}\omega_n(p)=W_0^{(n)}, \qquad \lim_{p\to\infty}\omega_n(p)=\infty .$$

Це означає, що для від'ємних p ліва частина рівняння (22) може набувати значення з інтервалу $(0,\ W_0^{(n)})$, а для додатних — з $(W_0^{(n)},\ \infty)$.

Отже, у разі виконання умов теореми, система рівнянь (8) має єдиний розв'язок щодо невідомих $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$, A, p та μ для будь-яких упорядкованих за зростанням чисел $z_j\left(j=\overline{3,n+2}\right)$ з інтервалу (α, β). Таким чином, достатньою умовою існування для функції $f(x)$ рівномірного наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка є виконання умов пункту *а* теореми.

Оскільки у разі задоволення функцією $f(x)$ умов (2)-(7) система рівнянь (8) має єдиний розв'язок, то відповідно до теореми про існування та єдиність рівномірного наближення функції нелінійним виразом з ермітовим інтерполюванням у зовнішніх точках [5] параметри рівномірного наближення $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка α та β визначаються з системи рівнянь (8), у якій $z_j\left(j=\overline{3,n+2}\right)$ — упорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу. *Теорему доведено*.

Проаналізуємо умови (2)-(7). Неважко переконатися (шляхом підстановки), що для полінома $(n+1)$-го степеня, величина $W^{(n)}$ набуває значення рівного $W_0^{(n)}$. Отже, друга нерівність $W^{(n)} \neq W_0^{(n)}$ умови (2) справджується, зокрема, для функцій $f(x)$, відмінних від полінома $(n+1)$-го степеня.

Під час доведення теореми було встановлено, що перша нерівність умови (2) виконується для функцій $f(x)$, n-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тому достатній умові існування рівномірного наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворення значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ ($f(x)\in C^n[\alpha, \beta]$) відмінні від полінома $(n+1)$-го степеня, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Умови (2)-(7) не є необхідними для існування рівномірного наближення функції $f(x)$ з абсолютною похибкою виразом (1) і точним відтворення значення функції та її похідної у крайніх точках. Їх виконання необхідне лише в точках рівномірного альтернансу. У разі використання алгоритму Ремеза [4] для знаходження параметрів рівномірної апроксимації виразом (1) виконання умов (9) необхідне в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

Подібні властивості має рівномірне наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної в одній із крайніх точок відрізка α чи β.

2. Рівномірне наближення сумою полінома й експоненти з найменшою абсолютною похибкою та точним відтворенням значення функції та її похідної в одній із крайніх точок відрізка

Достатню умову існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у точці α сформулюємо у вигляді теореми 2.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді:

а) достатньою умовою існування рівномірного наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у точці α є справдження нерівностей (2), у яких

$$D_2\left(U;\, z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}\right)=\begin{cases}\dfrac{D_1\left(U; z_2, z_4\right)}{D_1\left(s_1; z_2, z_4\right)}-U'\left(z_1\right), & \text{якщо } j=1;\\[2ex] \dfrac{D_1\left(U; z_{j+1}, z_{j+3}\right)}{D_1\left(s_1; z_{j+1}, z_{j+3}\right)}-\dfrac{D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(s_1; z_j, z_{j+2}\right)}, & \text{якщо } 1<j\le n+1;\end{cases} \tag{26}$$

$$D_1\left(U;\, z_j, z_{j+2}\right)=\begin{cases}U'\left(z_1\right), & \text{якщо } j=1;\\ U\left(z_4\right)+U\left(z_3\right)-2U\left(z_2\right), & \text{якщо } j=2;\\ U\left(z_{j+2}\right)-U\left(z_j\right), & \text{якщо } 2<j\le n+2;\end{cases} \tag{27}$$

$U'(x)$ — похідна функції $U(x)$, $z_j\left(j=\overline{3, n+4}\right)$ — довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з $(\alpha, \beta]$, $z_1 = z_2 = \alpha$;

б) у випадку виконання умов пункту *а* існує єдине рівномірне наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у точці α, а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$f\left(\alpha\right)-\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - Ae^{p\alpha}=0,$$

$$f'\left(\alpha\right)-\sum_{i=1}^{n} i a_i \alpha^{i-1} - Ape^{p\alpha}=0,$$

$$f\left(z_j\right)-\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - Ae^{pz_j}=\left(-1\right)^j \mu, \qquad j=\overline{3, n+4}, \tag{28}$$

у якій $z_j\left(j=\overline{3, n+4}\right)$ — упорядковані за зростанням точки чебишовського альтернансу з $(\alpha, \beta]$.

Доведення. Довести цю теорему можна аналогічно до теореми 1, опираючись на характеристичну теорему існування та єдиності рівномірного наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом і точним відтворенням значення функції та її похідної у зовнішніх точках [5].

Аналогічно можна встановити, що достатньою умовою існування рівномірного наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у точці β є справдження нерівностей (2), у яких

$$D_2\left(U; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}\right) = \begin{cases} \dfrac{D_1\left(U; z_{j+1}, z_{j+3}\right)}{D_1\left(s_1; z_{j+1}, z_{j+3}\right)} - \dfrac{D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(s_1; z_j, z_{j+2}\right)}, & \text{якщо } 1 \le j < n+1; \\ U'\left(z_{n+4}\right) - \dfrac{D_1\left(U; z_{n+1}, z_{n+3}\right)}{D_1\left(s_1; z_{n+1}, z_{n+3}\right)}, & \text{якщо } j = n+1, \end{cases} \tag{29}$$

$$D_1\left(U; z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} U\left(z_{j+2}\right) - U\left(z_j\right), & \text{якщо } 1 \le j \le n; \\ 2U\left(z_{n+3}\right) - U\left(z_{n+2}\right) - U\left(z_{n+1}\right), & \text{якщо } j = n+1; \\ U'\left(z_{n+4}\right), & \text{якщо } j = n+2, \end{cases} \tag{30}$$

z_j $\left(j = \overline{1, n+2}\right)$ — довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з $[\alpha, \beta)$, а $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$.

3. Визначення параметрів рівномірного наближення сумою полінома й експоненти з найменшою абсолютною похибкою та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка

Відповідно до теореми про існування та єдиність рівномірного наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом із точним відтворенням значення функції та її похідної у зовнішніх точках [5], параметри рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1), якщо воно існує, можна визначити за схемою Ремеза. Таке наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка α та β має n точок альтернансу, а в разі ермітового інтерполювання лише в одній із крайніх точок — $(n + 1)$-у точку альтернансу.

Нехай $z_j\left(j = \overline{3, n+2}\right)$ — точки альтернансу у випадку наближення з ермітовим інтерполюванням в обох крайніх точках відрізка, $z_j\left(j = \overline{3, n+4}\right)$ — точки альтернансу в разі наближення з ермітовим інтерполюванням лише у точці α, а $z_j\left(j = \overline{1, n+2}\right)$ — відповідно у точці β. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теорем і точки альтернансу відомі, то параметри $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ і A рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках відрізка α та β або одній із них визначаються за формулами

$$A = D_{n+1}\left(f;\, z_1,\, z_2,\ldots,\, z_{n+3}\right) / D_{n+1}\left(\varphi; z_1,\, z_2,\ldots,\, z_{n+3}\right); \tag{31}$$

$$a_k = \frac{D_k\left(f;\, z_1, z_2,\ldots,\, z_{k+2}\right) - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i D_k\left(s_i;\, z_1, z_2,\ldots, z_{k+2}\right) - A D_k\left(\varphi;\, z_1, z_2,\ldots, z_{k+2}\right)}{D_k\left(s_k;\, z_1,\, z_2,\ldots,\, z_{k+2}\right)},$$

$$k = \overline{1,\ n}; \tag{32}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[f\left(z_3\right) + f\left(z_4\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i\left(z_3^i + z_4^i\right) - A\left(e^{pz_3} + e^{pz_4}\right)\right], \tag{33}$$

де $\varphi(p, x) = e^{px}$, а значення виразів визначаються формулою (5), у якій залежно від точок інтерполювання для $k = 1$ і $k = 2$ використовуються відповідно формули (6) і (7), (26) і (27) або (29) і (30).

Значення параметра p є розв'язок рівняння (17). Розв'язок цього рівняння шукатимемо з урахуванням його властивостей, встановлених під час доведення теореми 1. Оскільки ліва частина рівняння (17) є експоненційною функцією, то його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння $g_n\left(p\right) = V^{(n)}$, де $g_n\left(p\right) = \ln\left(\omega_n\left(p\right)\right)$, $V^{(n)} = \ln\left(W^{(n)}\right)$.

Корінь цього рівняння можна обчислити за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n\left(p_i\right) - V^{(n)}}{g_n'\left(p_i\right)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

де

$$g_n'\left(p\right) = \frac{D_{n+1}\left(\bar{\varphi}; z_2,\, z_3,\ldots,\, z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3,\ldots, z_{n+4}\right)} - \frac{D_{n+1}\left(\bar{\varphi}; z_1,\, z_2,\ldots,\, z_{n+3}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi; z_1,\, z_2,\ldots,\, z_{n+3}\right)}; \tag{35}$$

$$\bar{\varphi}\left(p; z\right) = z e^{pz}; \quad \varphi\left(p,\, z\right) = e^{pz};$$

$$p_0 = sign\left(W^{(n)} - W_0^{(n)}\right)\frac{2\left|V^{(n)}\right|}{z_{n+4} - z_{n+2} + z_3 - z_1}; \tag{36}$$

а значення виразів $W^{(n)}$, $W_0^{(n)}$ і $D_k(U; z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k+1})$ визначаються формулами (3)-(5), у яких залежно від точок інтерполювання для $k = 1$ і $k = 2$ використовуються відповідно формули (6)-(7), (26)-(27) або (29)-(30).

Початкове значення наближення p_0 до шуканого кореня рівняння (17) визначається, виходячи з вигляду (25) лівої частини цього рівняння. З міркувань, викладених під час доведення теореми 1 випливає, що у разі такого вибору значення p_0 його знак завжди співпадає зі знаком шуканого розв'язку. Співпадання знаків необхідне для забезпечення стійкості ітераційного методу (34) тому, що функція $g_n(p)$ має розрив у точці $p = 0$. При такому виборі початкового значення p_0 проміжні значення p_i завжди будуть одного знаку з шуканим розв'язком і, зрозуміло, не переходитимуть через нуль. Під час розв'язування тестових задач ітераційний процес (34) збігався за три-чотири ітерації.

У програмній реалізації алгоритму рівномірної апроксимації з інтерполюванням виразом (1) для довільного n процедуру отримання значень величин, що входять у трансцендентне рівняння (17) і формули (31)-(33) для обчислення значень параметрів зручно реалізувати за схемою послідовного виключення, використаною під час доведення теореми 1.

Висновки. Достатньою умовою існування рівномірного наближення функції $f(x)$ сумою полінома й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка є виконання нерівностей (2), у яких залежно від точок інтерполювання для $k = 1$ і $k = 2$ застосовуються відповідно формули (6), (7), (26), (27) або (29), (30). Цим умовам задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ ($f(x) \in C^n[\alpha, \beta]$), відмінні від полінома $(n + 1)$-го степеня, n-на похідна яких строго монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Параметри $a_i \left(i = \overline{0, n}\right)$ і A такого наближення визначаються за формулами (31)-(33). Значення параметра p є коренем трансцендентного рівняння (17), розв'язок якого можна знайти за ітераційною схемою (34).

Рівномірне наближення виразом (1) із точним відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка окрім побудови неперервних і гладких мінімаксних сплайн-наближень використовується ще для апроксимації розв'язків диференціальних рівнянь.

Література

[1] *Попов Б. А*. Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.

[2] *Dunham C., Zhu C*. Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical mathematics and computing, Proc. 20 th Manitoba Conf., Winnipeg. — Can. 1990, Congr. Numerantium 80, 1991. — P. 161-169.

[3] *Meinardus G., Walz G*. Best Approximation By Free Knot Splines // BIT. — 2001. — Vol. 41, № 1. — P. 158-178.

[4] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — К.: Наук. думка, 1980. — 352 с.

[5] *Малачівський П. С.* Рівномірне наближення нелінійним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в зовнішніх точках // Волинський математичний вісник. — 2007. — Вип. 4 (13). — С. 109-118.

[6] *Корн Г., Корн Т*. Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.

[7] *Малачівський П. С.* Рівномірне наближення сумою многочлена й експоненти з інтерполюванням у крайніх точках // Доп. НАН України. — 2008. — № 2. — С. 54-58.

[8] *Малачівський П.* Рівномірне наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 134-145.

Uniform approximation by sum of a polynomial and exponential with exact reproduction of function and its derivative values at the end points of interval

Petro Malachivskyy

The properties of uniform (Chebyshev, minimax) function approximation by a sum of polynomial and exponential with exact reproduction of function and its derivative values at the end points are investigated. The sufficient conditions of such approximation are established and the Remez's algorithm to determine the parameters of this approximation is proposed.

Равномерное приближение суммой многочлена и экспоненты с точным восстановлением значения функции и ее производной в крайних точках отрезка

Петро Малачивский

Исследованы свойства равномерного (чебишевского, минимаксного) приближения суммой многочлена и экспоненты с наименьшей абсолютной погрешностью и точным восстановлением значения функции и ее производной в крайних точках отрезка. Установлены достаточные условия существования такого чебишевского приближения и предложен алгоритм для определения его параметров по схеме Ремеза.

Отримано 11.03.08