УДК 517.958:536.2

# Математичний опис процесів теплопровідності за дії випадкових теплових джерел

Павло Пелех

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: ppavlo@gmail.com

*У роботі запропоновано математичний опис процесів теплопровідності, спричинених випадковими тепловими джерелами. Записано розв'язок і функцію Гріна неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковим полем джерел в однорідному та стаціонарному середовищі. Розглянуто два типи випадкових теплових джерел температурного поля при заданих статистиках джерел і первинного поля. Отримано наближене співвідношення для визначення температурного поля у випадках, якщо джерела тепла перебувають в обмеженій області. Записано просторові спектральні розклади для однорідних випадкових температурних полів для нестаціонарного та стаціонарного випадків.*

**Ключові слова:** поле температури, випадкові теплові джерела, спектральні розклади, первинне поле, просторова спектральна амплітуда.

**Вступ.** У практичній діяльності часто виникає необхідність досліджувати випадкові температурні поля, оскільки вони можуть виявитися визначальними для умов функціонування та термінів експлуатації елементів конструкцій із композиційних матеріалів, магнетодіелектриків, які широко використовують в електро- та радіотехнічних приладах [1].

При дослідженні температурних полів у випадково неоднорідних тілах, як правило, застосовують метод гомогенізації гетерогенного середовища [1-3], згідно з яким неоднорідному середовищу за певним алгоритмом ставлять у відповідність однорідну структуру. У таких випадках приймають, що характерні віддалі, на яких відбуваються зміни теплофізичних параметрів, є значно більші від характерних розмірів неоднорідностей тіла. Це дає можливість ввести середні за елементарними макрооб'ємами параметри й описати теплові процеси в просторі, точки якого містять одночасно дві компоненти, пропорційно до їхнього об'ємного вмісту [1].

Іншою причиною випадковості температурних полів може бути дія випадкових теплових джерел. У таких випадках треба враховувати задання статистики джерел, або статистики первинного поля. Математичний опис таких процесів як для стаціонарного, так і нестаціонарного випадків є метою даного дослідження.

## 1. Випадкові джерела

Випадкові реальні або віртуальні джерела поля можуть бути двох типів: із заданням «статистики джерел» $f$ або теплові джерела із заданням «статистики первинного поля» $v$ [7].

У першому випадку, якщо наявні реальні джерела, то процес теплопровідності підпорядковується неоднорідному рівнянню

$$\hat{L}T = f \tag{1}$$

($\hat{L}$ — лінійний просторово-часовий диференціальний оператор; $T(\vec{r},t)$ — температурне поле; функція $f(\vec{r},t)$ описує джерела тепла), в якому статистично задана права частина $f$. Однорідні крайові умови детерміновані.

У другому випадку просторова область, в якій розглядається поле $T(\vec{r},t)$, обмежена деякою поверхнею $S_0$, не містить джерел ($f = 0$), але задано первинне випадкове зовнішнє поле температури $T_0$. Тоді рівняння (1) є однорідне

$$\hat{L}T = 0\,, \tag{2}$$

але на $S_0$ задані значення первинного поля, наприклад,

$$v \equiv T_0\left(\vec{r},t\right)\Big|_{\vec{r}\in S_0}. \tag{3}$$

Зазвичай, у цьому випадку говорять, що на $S_0$ задані «віртуальні» джерела поля.

Приймаємо, що однорідне рівняння (2) й усі необхідні умови детерміновані, за винятком випадкового первинного поля $T_0$.

При збуренні поля реальними джерелами в силу (1) будь-які моменти поля можуть бути отримані шляхом усереднення добутків типу $T\left(\vec{r}_1,t_1\right)T\left(\vec{r}_2,t_2\right)...\times$ $\times T\left(\vec{r}_n,t_n\right)$ тільки за ансамблем випадкових джерел $f$ [4]. Для двох перших моментів маємо

$$\left\langle T\right\rangle = \hat{G}\left\langle f\right\rangle, \quad \left\langle T_1T_2\right\rangle = \hat{G}\left\langle f_1f_2\right\rangle, \tag{4}$$

де дужки $\langle\cdot\rangle$ позначають відповідні усереднені поля, $T_i = T\left(\vec{r}_i,t_i\right)$, $f_i = f\left(\vec{r}_i,t_i\right)$, $i=\overline{1,n}$; $\hat{G}$ — функція Гріна.

Зазначимо, що момент $n$-го порядку поля температури при усереднені за ансамблем джерел має вигляд

$$\left\langle T\left(\vec{r}_1,t_1\right)T\left(\vec{r}_2,t_2\right)...T\left(\vec{r}_n,t_n\right)\right\rangle = \int_0^t\int_{(V)}..(n)..\int_0^t\int_{(V)} T\left(\vec{r}_1',t_1'\right)T\left(\vec{r}_2',t_2'\right)...T\left(\vec{r}_n',t_n'\right)\times$$
$$\times\psi_n\left(\vec{r}_1',t_1',...,\vec{r}_n',t_n'\right)d^3\vec{r}_1'dt_1'...(n)...d^3\vec{r}_n'dt_n', \tag{5}$$

де $\psi_n\left(\vec{r}_1',t_1',...,\vec{r}_n',t_n'\right)$ — кумулянтні (або кореляційні) функції порядку $n$, які визначаються похідними $n$-го порядку від логарифма характеристичної функції заданого розподілу [5], $(V)$ — область, яку займає тіло. Зазначимо, що в точках за якими проводиться інтегрування розташовані випадкові джерела, які діють у випадкові моменти часу $t_i$, $i=\overline{1,n}$. Якщо теплові джерела за часом є детермінованими функціями, то співвідношення (5) набуде вигляду

$$\left\langle T\left(\vec{r}_1,t\right)T\left(\vec{r}_2,t\right)...T\left(\vec{r}_n,t\right)\right\rangle = \int_{(V)}..(n)..\int_{(V)} T\left(\vec{r}_1',t'\right)T\left(\vec{r}_2',t'\right)...T\left(\vec{r}_n',t'\right)\times$$

$$\times\psi_n\left(\vec{r}_1',...,\vec{r}_n'\right)d^3\vec{r}_1'...(n)...d^3\vec{r}_n'. \quad (6)$$

У випадку віртуальних джерел, коли відповідно до умов (3) на деякій поверхні $S_0$ задано значення $v$ первинного поля, а шукане поле визначається через первинне $v$ з допомогою лінійного детермінованого в загальному просторово-часового оператора $\hat{P}$

$$T=\hat{P}v. \quad (7)$$

Шукані моменти поля температури $T$ пов'язані з відомими моментами первинного поля $v$ лінійними співвідношеннями, подібними до (4), а саме [5]

$$\langle T\rangle=\hat{P}\langle v\rangle, \quad \langle T_1T_2\rangle=\hat{P}\langle v_1v_2\rangle, ..., \quad (8)$$

де $v_i=v\left(\vec{r}_i,t_i\right)$, $i=\overline{1,n}$.

Співвідношення типу (4) або (8) дають повний розв'язок статистичних задач (1) або (2), (3), оскільки сукупність усіх статистичних моментів однозначно визначає всю сукупність $n$-вимірних густин ймовірностей випадкового поля [6]. Однак, ця формально проста процедура фактично реалізується дуже рідко. Зручні для фізичного аналізу вирази для моментів поля $T$ в більшості випадків отримуємо тільки для перших моментів за умови використання певних наближень для обернених операторів $\hat{G}$ або $\hat{P}$. Зазвичай, густини ймовірностей поля можна знайти тільки за умови застосовності центральної граничної теореми.

В однорідному та стаціонарному середовищі скалярне поле $T$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$\hat{L}T\equiv\left(\lambda\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)T\left(\vec{r},t\right)=f\left(\vec{r},t\right), \quad (9)$$

де $\lambda$ — коефіцієнт теплопровідності, $\Delta$ — оператор Лапласа.

Функція Гріна рівняння (9) для безмежного середовища є такою [8]

$$G\left(\vec{r},\vec{r}',t,t'\right)=\frac{1}{\left[2\sqrt{\lambda\pi\left(t-t'\right)}\right]^m}e^{-\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}{4\lambda\left(t-t'\right)}}, \quad (10)$$

тут $m$ — кількість просторових змінних задачі, $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j-x'\right)_j^2$, $x_j$, $x_j'$ — відповідні декартові координати.

Тоді розв'язок рівняння (9), що заникає на нескінченності має вигляд

$$T\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\lambda\pi}\right)^m}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\vec{r}',t'\right)}{\left(\sqrt{t-t'}\right)^m}e^{-\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}{4\lambda\left(t-t'\right)}}\,d^3\vec{r}'dt'. \quad (11)$$

Співвідношення (11) є частковим випадком лінійного зв'язку $T=\hat{G}*f$ температурного поля з джерелами.

Якщо функція джерел не залежить від часу, тобто $f(\vec{r},t)=f(\vec{r})$, то співвідношення (11) набуде вигляду

$$T(\vec{r},t)=\frac{1}{\left(2\sqrt{\lambda\pi}\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}')d^3\vec{r}'\int_0^t \frac{dt'}{\left(\sqrt{t-t'}\right)^3} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4\lambda(t-t')}} .$$

Обчислимо останній інтеграл. Зробимо заміну змінної $\tau = 1/(t-t')$ і врахуємо, що [9]

$$\int_{\xi}^{\infty}\frac{e^{-a\xi}}{\sqrt{\xi}}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{a\xi}\right)\ (a>0),$$

де erfc(ξ) — додатковий інтеграл ймовірності [10]. Одержимо

$$\int_{1/t}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4\lambda}\tau}d\tau=\sqrt{\frac{4\lambda\pi}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4\lambda t}}\right).$$

Тоді для визначення температурного поля отримаємо таку формулу

$$T(\vec{r},t)=\frac{1}{4\lambda\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{erfc}\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{2\sqrt{\lambda t}}\right)d^3\vec{r}' . \tag{12}$$

## 2. Просторові спектральні розклади для однорідних випадкових полів

Подамо просторову спектральну амплітуду $T(\vec{k})$ через розклад випадкового поля температури $T(\vec{r},t)$ у трикратний інтеграл Фур'є

$$\tilde{T}(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}T(\vec{k},t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d^3\vec{k} . \tag{13}$$

Тут $\tilde{T}\equiv T-\langle T\rangle$ — флуктуаційна частина випадкового поля $T(\vec{r},t)$.

Просторова спектральна амплітуда (або *k*-амплітуда) випадкового поля $T$ визначається через $T(\vec{r},t)$ з допомогою оберненого перетворення Фур'є [7]

$$T(\vec{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{T}(\vec{r},t)\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d^3\vec{r} . \tag{14}$$

Із рівняння (9) отримаємо таке звичайне диференціальне рівняння для визначення *k*-амплітуди

$$\left(\lambda k^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)T(\vec{k},t)=f(\vec{k},t), \tag{15}$$

де $f(\vec{k},t)$ — просторова спектральна амплітуда поля джерел *f*.

Розв'язком диференціального рівняння (15) є [11]

$$T\left(\vec{k},t\right)=e^{\lambda k^2 t}\left[C-\int_0^t f\left(\vec{k},t'\right)e^{-\lambda k^2 t'}\,dt'\right], \tag{16}$$

де $C$ — невідома стала, яка визначається з початкової умови. Зокрема, якщо

$$T\left(\vec{r},t\right)\Big|_{t=0}=b\left(\vec{r}\right)$$

і для спектральної амплітуди справджується умова

$$T\left(\vec{k},t\right)\Big|_{t=0}=b\left(\vec{k}\right),$$

де $b\left(\vec{k}\right)$ — $k$-амплітуда поля $b\left(\vec{r}\right)$, то отримаємо $C=C\left(\vec{k}\right)=b\left(\vec{k}\right)$. Формула (16) набуде вигляду

$$T\left(\vec{k},t\right)=e^{\lambda k^2 t}\left[b\left(\vec{k}\right)-\int_0^t f\left(\vec{k},t'\right)e^{-\lambda k^2 t'}\,dt'\right]. \tag{17}$$

Для нульових початкових умов отримаємо

$$T\left(\vec{k},t\right)=-\int_0^t f\left(\vec{k},t'\right)e^{\lambda\left|\vec{k}\right|^2(t-t')}\,dt'.$$

## 2. Стаціонарний випадок процесу теплопровідності з випадковими джерелами

У стаціонарному випадку поле температури $T\left(\vec{r}\right)$ задовольняє рівняння

$$\hat{L}T\equiv\lambda\Delta T\left(\vec{r}\right)=f\left(\vec{r}\right). \tag{18}$$

Заникаюча на нескінченності функція Гріна для рівняння (18) має вигляд [8]

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=-\frac{1}{\sigma_3}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{-1}, \tag{19}$$

де $\sigma_3$ — площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^3$ ($\sigma_3=4\pi$). Тоді розв'язком рівняння (18) є

$$T\left(\vec{r}\right)=-\frac{1}{\lambda\sigma_3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\,\vec{r}'=\frac{1}{\lambda\sigma_3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}'\right|}d\,\vec{r}'. \tag{20}$$

Якщо область, у якій розташовані джерела є обмеженою, наприклад, сфера радіуса $a$, а нас цікавить поле $T$ у дальній (фраунгоферовій) зоні розподілу джерел, то формула (20) спроститься. Віднесемо початок системи координат в область, зайняту джерелами. При $r\gg a$ у співвідношенні (20) величину $R=\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ можна наближено замінити на $r$. Тоді отримаємо

$$T\left(\vec{r}\right)\approx-\frac{1}{T\sigma_3 r}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\vec{r}'\right)d\,\vec{r}'=-\frac{1}{\lambda\sigma_3 r}\iiint_{\vec{r}'\le a}f\left(\vec{r}'\right)d\,\vec{r}'.$$

Для стаціонарного випадку розглянемо спектральну амплітуду. З рівняння (18) для *k*-амплітуди маємо

$$-\lambda\left|\vec{k}\right|^2 T\left(\vec{k}\right)=f\left(\vec{k}\right), \tag{21}$$

де $f\left(\vec{k}\right)$ — просторова *k*-амплітуда поля джерел $f\left(\vec{r}\right)$. Звідси знаходимо

$$T\left(\vec{k}\right)=-\frac{f\left(\vec{k}\right)}{\lambda\left|\vec{k}\right|^2}. \tag{22}$$

Якщо розв'язок динамічної задачі для поля $T$ відомий, то зручно визначати моменти за формулами (4) та (8). Одна з важливих властивостей статистичних моментів поля $T$ полягає в тому, що їхні значення на деякій поверхні $S_0$ визначають поведінку моментів в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.

**Висновки.** У роботі запропоновано математичний опис випадкових температурних полів при дії теплових джерел, які є випадковими функціями просторових координат і часу. Отримано розв'язок і функцію Гріна неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковим полем джерел в однорідному та стаціонарному середовищі. З допомогою оберненого перетворення Фур'є визначено просторову спектральну амплітуду випадкового температурного поля та диференціальне рівняння, якому ця амплітуда задовольняє. Розглянуто стаціонарний випадок процесу теплопровідності, спричиненого випадковими джерелами. Знайдено заникаючий на нескінченності розв'язок. Отримано наближене співвідношення для визначення температурного поля, джерела тепла якого перебувають в обмеженій області, зокрема, в межах сфери заданого радіуса. Одержано формулу для просторової спектральної амплітуди та рівняння, якому вона задовольняє.

У розвиток проведених тут досліджень надалі планується ввести характеристичний функціонал і кумулянтні функції для випадкових теплових полів, вивчити кореляції відповідних полів, які породжені точковими джерелами, та визначити ядра оператора інтенсивності для процесів теплопровідності.

### Література

[1] *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. — К.: Наук. думка, 1984. — 112 с.

[2] *Гамбин Б., Назаренко Л. В., Телега Е.* Стохастическая гомогенизация уравнений стационарной термоупругости // Доповіді НАН України. — 2002. — № 10. — С. 37-44.

[3] *Lidzba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics // J. Theor. and Appl. Mechanics. — 1998. — Vol. 36, № 3. — P. 657-679.

[4] *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.

[5] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В.* и др. — М.: Наука, 1985. — 640 с.
[6] *Chaplia Y., Chernukha O.* Three-dimensional diffusion in a multiphase body with randomly disposed inclusions of a spherical form // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2003. — Vol. 46. — P. 3323-3328.
[7] *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. — М.: Наука, 1978. — 436 с.
[8] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
[9] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 106 с.
[10] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1984. — 831 с.
[11] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1985. — 304 с.

## Mathematical description of heat transfer processes under action of random thermal sources

Pavlo Pelekh

*The mathematical description for heat transfer processes caused by random thermal sources is proposed. The solution and the Green function for a non-homogeneous heat transfer equation with random field of sources in a homogeneous and stationary medium are written. Two kinds of random thermal sources are considered at the given source statistics and of the primary field. The approximate relationship for determining the temperature field is obtained in the case when sources occupy a limited area. Space-spectral decompositions are written for homogeneous random temperature fields in both the stationary and non-stationary cases.*

## Математическое описание процессов теплопроводности при действии случайных тепловых источников

Павел Пелех

*В работе предложено математическое описание процессов теплопроводности, обусловленных случайными тепловыми источниками. Записаны решение и функция Грина неоднородного уравнения теплопроводности со случайным полем источников в однородной и стационарной среде. Рассмотрены два типа случайных тепловых источников при заданных статистиках источников и первичного поля. Получено приближенное соотношение для определения температурного поля в случае, если источники находятся в заданной ограниченной области. Записаны пространственные спектральные разложения для однородных случайных температурных полей как в нестационарном, так и стационарном случаях.*

Отримано 02.12.07