

Дослідження задачі аналізу лінійних антенних решіток

Леся Клакович

К. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kprog@franko.lviv.ua

Досліджується задача аналізу антенних решіток (АР) із тонких ідеально провідних випромінювачів, математична модель яких дозволяє враховувати взаємний вплив елементів. Використовуючи метод інтегральних рівнянь, задача зводиться до розв'язування систем інтегральних рівнянь Поклінгтона або Халлена. Для числового розв'язування відповідних систем застосовано метод Гальоркіна. Доведено, що наближений розв'язок системи Поклінгтона, знайдений методом Гальоркіна, збігається до точного розв'язку у гільбертовому просторі H . Використовуючи метод саморегуляризації, побудовано числовий алгоритм знаходження стійких розв'язків системи Халлена. Наведено порівняльні результати числових експериментів розв'язування задачі аналізу АР для двох розглянутих моделей.

Ключові слова: антенна решітка, взаємний вплив елементів, рівняння Поклінгтона, рівняння Халлена, метод Гальоркіна.

Вступ. Математичні моделі антенних решіток (АР), одержані на основі розв'язування задач аналізу (прямих задач) у строгих математичних та електродинамічних формулюваннях, дають змогу враховувати взаємний вплив випромінювачів та інших конструктивних елементів АР [1]. В основу постановок прямих задач закладена система рівнянь Максвелла (його скалярний аналог — рівняння Гельмгольца) з відповідними граничними умовами, а їх розв'язування, у більшості випадків, ґрунтується на застосуванні методів граничних інтегральних або інтегродиференціальних рівнянь [2].

Задача аналізу лінійних АР із тонких ідеально провідних випромінювачів із використанням методу інтегральних рівнянь зводиться до розв'язування системи інтегральних рівнянь Поклінгтона чи Халлена [1]. Це системи рівнянь Фредгольма першого роду, а тому виникає питання про існування стійких розв'язків і про побудову числових методів їх знаходження. У даній роботі обґрунтовано застосування методу Гальоркіна до розв'язування відповідних систем інтегральних рівнянь. Метод Гальоркіна дає змогу отримати стійкі розв'язки задачі.

1. Математичне формулювання задачі аналізу лінійної АР із циліндричних випромінювачів

Розглянемо в деякій області $V \in R^3$ необмеженого однорідного ізотропного середовища (зі сталим значенням діелектричної ϵ і магнітної μ проникностей) систему з $2N + 1$ лінійних випромінювачів, яку збуджує стороннє електричне поле \vec{E}^{cm} .

Нехай випромінювачі є ідеально провідні тонкостінні циліндри радіуса a та довжини $2l$, центри яких розміщені вздовж осі OX , а осі циліндрів — паралельні до осі OZ .

У строгій постановці аналіз АР зводиться до розв'язування граничних задач електродинаміки, у яких кількість граничних поверхонь співпадає з кількістю випромінювачів у системі. При виведенні граничних рівнянь застосовують припущення, прийняті в теорії аналізу тонких антен: випромінювачі вважають дуже тонкими, порівняно з їхньою довжиною та довжиною хвилі, тобто поперечними струмами у кожному випромінювачі та зміною повздовжнього струму по периметру поперечного перерізу нехтують [1].

З огляду на зроблені припущення, вектор розподілу струму вздовж кожного випромінювача матиме лише ненульову z -у складову $J_n(P)$ ($n = \overline{-N, N}$) і, відповідно, векторний потенціал, створений цими струмами, теж буде мати ненульову z -у складову [3]

$$A_z(Q) = \sum_{n=-N}^N \iint_{S_n} J_n(P) G(P, Q) dS_n, \quad (1)$$

де $G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp[-ikR(P, Q)]}{R(P, Q)}$ — функція Гріна, $R(P, Q)$ — відстань між точками P та Q , S_n — поверхня n -го випромінювача: $-l \leq z' \leq l$, $r = a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; k — хвильове число.

Враховуючи граничну умову $\vec{E}_\tau = 0$ (тангенціальна складова сумарного електричного поля на ідеально провідній поверхні кожного випромінювача повинна дорівнювати нулю), одержуємо систему

$$\left[\frac{\partial^2 A_z(Q_m)}{\partial z^2} + k^2 A_z(Q_m) \right] - ik \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m^z = 0 \quad (m = \overline{-N, N}). \quad (2)$$

Тут E_m^z — z -та складова стороннього електричного поля на поверхні m -го випромінювача.

Підставляючи вираз (1) у систему (2), отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь Поклінгтона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \left\{ \iint_{S_m} J_m(z') \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dz' d\varphi' + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq m}}^N \int_{-l}^l J_n(z') \frac{\exp[-ik\sqrt{(z-z')^2 + d_{nm}^2}]}{4\pi\sqrt{(z-z')^2 + d_{nm}^2}} dz' \right\} = ik \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m^z(z) \quad (m = \overline{-N, N}) \quad (3)$$

відносно вектора $\vec{J} = (J_{-N}(z), \dots, J_N(z))^T$ повних струмів, які течуть по випромінювачах. Тут d_{nm} — відстань між осями n та m -го випромінювачів.

Поряд із системою (3) для аналізу АР із циліндричних випромінювачів використовують систему інтегральних рівнянь Халлена, яку одержуємо безпосередньо з системи (2), розв'язуючи її як систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно функції $A_z(z)$

$$A_z(z) = 2\pi i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin(k|z - \tilde{z}_m|) U_m + C_m^{(1)} \sin kz + C_m^{(2)} \cos kz \quad (m = \overline{-N, N}). \quad (4)$$

Тут враховано те, що стороннє електричне поле створюється підключеною до кожного випромінювача різницею потенціалів U_m .

Підставляючи вираз (1) у систему (4), одержуємо систему інтегральних рівнянь Халлена відносно невідомих електричних струмів $J_n(t)$

$$\sum_{n=-N-l}^N \int_{-l}^l J_n(t) K_{nm}(z, t) dt = 2\pi i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin(k|z - \tilde{z}_m|) U_m + C_m^{(1)} \sin kz + C_m^{(2)} \cos kz \quad (m = \overline{-N, N}), \quad (5)$$

$$K_{nm}(z, t) = \begin{cases} \frac{\exp[-ik\sqrt{(z-t)^2 + d_{nm}^2}]}{\sqrt{(z-t)^2 + d_{nm}^2}}, & n \neq m, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\exp[-ik\sqrt{(z-t)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}]}{\sqrt{(z-t)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, & n = m. \end{cases} \quad (6)$$

Сталі $C_m^{(1)}$, $C_m^{(2)}$ визначаються з умов рівності нулю струмів на кінцях m -го випромінювача.

Системи рівнянь (3) та (5) є еквівалентними [1] і зв'язують повні струми, що течуть по випромінювачах зі збуджуючими їх потенціалами з урахуванням взаємного впливу елементів. Це системи лінійних інтегральних рівнянь першого роду і, як відомо, задача знаходження їх розв'язків може бути нестійкою щодо збурення правої частини. Проте ядра типу функцій Гріна, які мають особливість, дають змогу застосовувати для знаходження стійких розв'язків методи саморегуляризації [3].

2. Обґрунтування збіжності методу Гальоркіна розв'язування системи інтегральних рівнянь Поклінгтона

Для числового розв'язування системи (3) застосуємо метод Гальоркіна. У просторі $L_2[-l, l]$ виберемо систему базисних функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{+\infty}$ і наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$J_n(t) = \sum_{j=1}^M I_{nj} \varphi_j(t) \quad (n = \overline{-N, N}), \quad (7)$$

а невідомі коефіцієнти I_{nj} ($j = \overline{1, M}, n = \overline{-N, N}$) вибираємо так, щоб розв'язок (7) задовольняв систему (3). У результаті для знаходження коефіцієнтів розкладу (7) отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^M I_{nj} B_{mn}^{ji} = p_{mi} \quad (m = \overline{-N, N}, i = \overline{1, M}), \quad (8)$$

$$B_{mn}^{ji} = \begin{cases} \int_{-l}^l \varphi_i(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \iint_{S_m} \varphi_j(z') \frac{\exp(-ikR)}{4\pi R} dz' d\varphi' dz, & n = m; \\ \int_{-l}^l \varphi_i(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l \varphi_j(z') \frac{\exp\left[-ik\sqrt{(z-z')^2 + d_{nm}^2}\right]}{4\pi\sqrt{(z-z')^2 + d_{nm}^2}} dz' dz, & n \neq m; \end{cases}$$

$$p_{mi} = ik \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-l}^l E_m^z(z) \varphi_i(z) dz.$$

Для обґрунтування збіжності наближеного розв'язку (7) до точного розв'язку системи (3) необхідно дослідити властивості оператора системи (3) у відповідному гільбертовому просторі.

Нехай $H = \underbrace{L_2[-1, 1] \oplus L_2[-1, 1] \oplus \dots \oplus L_2[-1, 1]}_{2N+1}$ — комплексний гільбертів простір

інтегрованих із квадратом функцій, скалярний добуток і норму в якому визначимо так

$$\left(\bar{J}^{(1)}, \bar{J}^{(2)} \right)_H = \sum_{n=-N-1}^N \int_{-1}^1 J_n^{(1)}(t) \overline{J_n^{(2)}(t)} dt, \quad \|\bar{J}\|_H = \left(\bar{J}, \bar{J} \right)_H^{1/2}. \quad (9)$$

Лема. Систему інтегральних рівнянь (3) можна записати в операторному вигляді

$$\bar{J} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{K} \bar{J} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1} \bar{U}, \quad (10)$$

де $\mathbf{A}: H \rightarrow H$ — лінійний самоспряжений і додатно визначений оператор, для якого існує обмежений обернений оператор \mathbf{A}^{-1} ; $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{K}$ — цілком неперервний оператор у просторі H і в енергетичному просторі H_A [4].

Зауважимо, що енергетичний простір H_A вводять на основі додатно визначеного оператора \mathbf{A} [5] і використовують для доведення збіжності наближеного розв'язку, знайденого методом Гальоркіна, до точного.

Із доведеної леми випливає, що оператор задачі (3) задовольняє умови теореми [5, с. 43] про збіжність наближеного розв'язку системи (3), знайденого методом Гальоркіна, до точного. Тобто, якщо система рівнянь (3) має єдиний розв'язок у просторі H_A , а система базисних функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{+\infty}$ повна в H_A , то наближений розв'язок (7), знайдений методом Гальоркіна за функціями $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^M$, буде збіжний до точного розв'язку системи (3) у просторах H_A та H .

3. Числовий алгоритм розв'язування системи інтегральних рівнянь Халлена

Система (5) є системою інтегральних рівнянь Фредгольма I роду та для її розв'язування скористаємося методом саморегуляризації, який розвинутий, зокрема, у роботах [3, 6]. Цей метод дозволяє перейти від системи рівнянь Фредгольма I-го роду (5) до системи рівнянь Фредгольма II-го роду з ядрами, які мають неперервну похідну, тобто до коректної задачі.

Введемо апріорне припущення про розв'язок системи (5), вважаючи, що похідні функцій $J_n(t)$ є обмежені [3]

$$|J'_n(t)| \leq L \quad (n = -\overline{N}, \overline{N}), \quad t \in [-l, l], \quad (11)$$

де $L \geq 0$ — деяка константа.

Ядра $K_{mm}(z, t)$, які визначаються формулою (6), у разі співпадіння точок z і t мають логарифмічну особливість. Для виділення особливості запишемо їх у такому вигляді [3]

$$K_{mm}(|t|) = L_m(|t|) + N_m(|t|), \quad (12)$$

де

$$L_m(|t|) = \begin{cases} K_{mm}(|t|) + \frac{h^2 - t^2}{2h} K'_{mm}(h) - K_{mm}(h), & |t| \leq h; \\ 0, & |t| \geq h; \end{cases}$$

$$N_m(|t|) = \begin{cases} K_{mm}(h) - \frac{h^2 - t^2}{2h} K'_{mm}(h), & |t| \leq h; \\ K_{mm}(|t|), & |t| \geq h. \end{cases}$$

Тут h — параметр виділення особливості, а функція $N_m(|t|)$ є регулярна.

Якщо параметр h взяти таким, щоб виконувалась умова $Lh \ll 1$, тоді

$$\int_{-l}^l J_m(t) K_{mm}(|z-t|) dt \approx \alpha_m(z) J_m(z) + \int_{-l}^l J_m(t) N_m(|z-t|) dt, \quad (13)$$

де

$$\alpha_m(z) = \int_{-l}^l L_m(|z-t|) dt. \quad (14)$$

Підставимо вираз (13) у систему (5) і отримаємо систему інтегральних рівнянь Фредгольма II-го роду

$$\begin{aligned} \alpha_m(z)J_m(z) + \int_{-l}^l J_m(t)N_m(|z-t|)dt + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq m}}^N \int_{-l}^l J_n(t)K_{nm}(z,t)dt = \\ = 2\pi i \sqrt{\varepsilon/\mu} \sin(k|z-\tilde{z}_m|)U_m + C_m^{(1)} \sin kz \quad (m = -N, N). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут h є параметр регуляризації задачі: при $h \rightarrow 0$ маємо, що $\alpha_m \rightarrow 0$, тобто при дуже малих h розв'язок системи (15) буде нестійким, але вже при $h \sim a$ (тобто порядку радіуса випромінювача) параметр α_m є величина порядку одиниці й отримуємо стійкі розв'язки системи (15).

Для числового розв'язування системи (15) теж застосуємо метод Гальоркіна. Функцію струму на кожному випромінювачі запишемо як лінійну комбінацію просторових гармонік (7). Підставляючи (7) у систему (15) і домножуючи скалярно кожне рівняння на $\varphi_i(z)$, отримуємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів I_{nj}

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^M I_{nj} D_{mn}^{ji} = b_{mi} \quad (m = -N, N, i = \overline{1, M}), \quad (16)$$

де

$$D_{mn}^{ji} = \begin{cases} \int_{-l}^l \varphi_i(z) \int_{-l}^l \varphi_j(t) K_{nm}(z,t) dt dz, & n \neq m; \\ \int_{-l}^l \varphi_i(z) \left(\alpha_m(z) \varphi_j(z) + \int_{-l}^l \varphi_j(t) N_m(|z-t|) dt \right) dz, & n = m; \end{cases}$$

$$b_{mi} = \frac{i}{2} \sqrt{\varepsilon/\mu} U_m \int_{-l}^l \sin(k|z|) \varphi_i(z) dz + C_m^{(1)} \int_{-l}^l \sin(kz) \varphi_i(z) dz.$$

Оскільки ядра системи (15) при $h \sim a$ є неперервні, то наближений розв'язок (7) збігається до точного розв'язку системи (15) при $M \rightarrow \infty$ [5].

Зауважимо, що діаграма напрямленості АР із тонких циліндричних випромінювачів має ненульову лише ϑ -ву компоненту та з урахуванням розв'язку задачі аналізу набуває вигляду

$$f(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \sum_{n=-N}^N \sum_{v=1}^M \sum_{m=-N}^N I_{nv} e^{ikd_{nm} \sin \vartheta \cos \varphi} \int_{-l}^l \varphi_v(z) e^{ikz \cos \vartheta} dz. \quad (17)$$

Ця формула наближено описує діаграму напрямленості антенної решітки з урахуванням взаємного впливу елементів.

4. Числові приклади розв'язування задачі аналізу

Розглянемо результати числових експериментів розв'язування задач аналізу АР із тонких циліндричних випромінювачів, в основі математичних моделей яких лежать системи інтегральних рівнянь Поклінгтона (3) та Халлена (5) (рис. 1, 2).

Досліджували АР із 13 напівхвильових циліндричних випромінювачів радіуса $a = 0,005\lambda$, розміщених вздовж осі OX на відстані $d = 0,45\lambda$ один від одного, $kd = 2,8$. Елементи решітки збуджуються деяким розподілом напруг $(U_{-N}, \dots, U_N) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

У результаті розв'язування задачі аналізу за описаними вище числовими алгоритмами знайдено розподіли струмів на випромінювачах. На рис. 1 зображено розподіли амплітуд струмів на випромінювачах із номерами $n = -6, -3$ (крива 1 — результат розв'язування системи (3), а крива 2 — системи (5)). За отриманим розподілом струмів обчислені діаграми напрямленості АР. На рис. 2 подано амплітуди діаграм напрямленості у перерізі $\vartheta = 90^\circ$ відповідними кривими.

Результати числових експериментів підтверджують, що розв'язки задач аналізу, сформульованих у вигляді системи Поклінгтона (3) та системи Халлена (5), незначно різняться між собою. При цьому, діаграми напрямленості (17), обчислені за отриманими розподілами струмів, співпадають для обох моделей. Тобто, для постановки

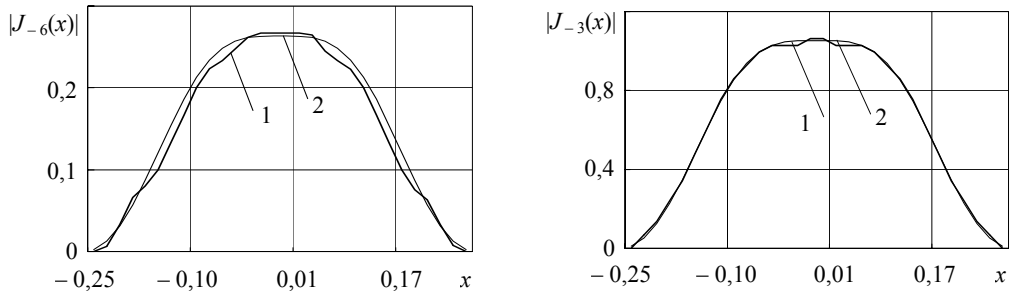


Рис. 1. Розподіл амплітуд струмів на випромінювачах

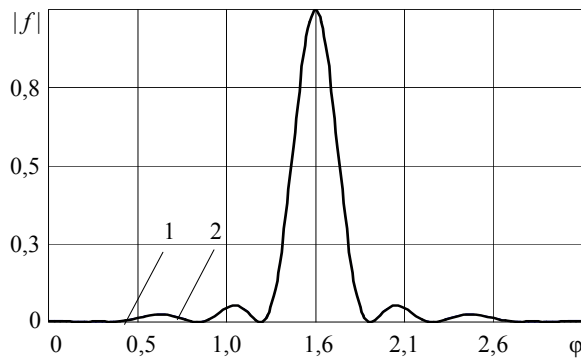


Рис. 2. Перерізи амплітудних діаграм

та розв'язування задачі аналізу АР можна користуватися як математичною моделлю на основі системи Поклінгтона, так і моделлю на основі системи Халлена. Проте обчислення коефіцієнтів матриці системи (8), до розв'язування якої зводиться система (3), вимагає значно більших затрат машинного часу, ніж обчислення коефіцієнтів матриці системи (16) (до розв'язування якої зводиться система (5)).

Висновки. Для отримання точних математичних моделей проектування та синтезу АР, що враховують взаємний вплив випромінювачів, необхідно у постановки задач включати розв'язки відповідних задач аналізу [7, 8]. Задача аналізу АР із тонких циліндричних випромінювачів у строгій математичній постановці зводиться до розв'язування систем інтегральних рівнянь Поклінгтона (3) або Халлена (5). Для знаходження числових розв'язків цих систем, як правило, використовують метод Гальоркіна. Обґрунтовано збіжність наближеного розв'язку системи рівнянь Поклінгтона, знайденого методом Гальоркіна, до точного розв'язку у просторі H . Використовуючи метод саморегуляризації, побудовано числовий алгоритм розв'язування системи рівнянь Халлена, який дозволяє отримати стійкі розв'язки. Враховуючи результати числових розрахунків і вказані вище переваги при реалізації алгоритмів на комп'ютерах, при постановках задач синтезу ефективнішим є використання розв'язку задачі аналізу, в основі якої лежить система рівнянь Халлена.

Література

- [1] Чаплин А. Ф. Анализ и синтез антенных решеток. — Львов: Вища шк., 1987. — 179 с.
- [2] Вычислительные методы в электродинамике; под ред. Митры Р.: пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 485 с.
- [3] Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и ДН этой системы // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1968. — Вып. 10. — С. 3-8.
- [4] Клакович Л. Про збіжність методу Гальоркіна в задачах аналізу лінійних випромінюючих систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2004. — Вип. 9. — С. 157-163.
- [5] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
- [6] Ильинский А. С., Бережная И. В. Исследование распределения тока в системе произвольно расположенных вибраторов // Вычислительные методы и программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — Вып. 20. — С. 263-269.
- [7] Клакович Л., Савенко П. Чисельне розв'язування нелінійних обернених задач стосовно синтезу антенних ґраток // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2002. — Вип. 4. — С. 30-37.
- [8] Клакович Л., Савенко П. Про існування розв'язків одного класу задач синтезу антенних решіток з оптимізацією розміщення випромінювачів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2007. — Вип. 13. — С.104-109.

Investigation of the analysis problem of linear antenna arrays

Lesia Klakovych

The problem of the analysis of antenna arrays (AR) consisting of the ideally conducting radiators is investigated. The mathematical model of AR accounts the mutual coupling of radiators. The problem is reduced to solving the system of Poklington's or Hallen's integral equations, by employing the integral equation method. The Galerkin's method is used for the numerical solution of these systems. It is shown that the numerical solution of the Poklington's system, obtained by the Galerkin's method, is converged to exact solution of the problem in space H . The numerical algorithm of finding the stable solution of Hallen's system is based on the self-regularization method. The comparison results of numerical solution of the problem of AR analysis is given for two systems.

Исследование задачи анализа линейных антенных решеток

Леся Клакович

Исследуется задача анализа антенных решеток (АР), состоящих из тонких идеально проводящих излучателей, математическая модель которых учитывает взаимное влияние элементов. Используя метод интегральных уравнений, задача сводится к решению систем интегральных уравнений Поклингтона или Халлена. Для численного решения соответствующих систем применяется метод Галёркина. Доказана сходимость приближенного решения системы Поклингтона, найденного методом Галёркина, к точному решению в гильбертовом пространстве H . Используя метод саморегуляризации, разработан численный алгоритм нахождения устойчивых решений системы Халлена. Приведены сравнительные результаты численного решения задачи анализа АР для двух рассматриваемых моделей.

Отримано 24.03.08