УДК 681.142 + 519.4

О.Д. Глухов

ПРО ЕКСПАНДЕРИ ІЗ ЗАДАНОЮ СТРУКТУРОЮ

В роботі розглядається задача побудови експандерів із заданою структурою.

В работе рассматривается задача построения экспандеров с заданной структурой.

In this paper we consider the problem of constructing expanders with a given structure.

Експандери (збільшувачі) знаходять широке застосування в обчислювальній техніці, теорії інформації, теорії кодування та інших галузях науки і техніки [1]. Нагадаємо деякі означення. Нехай G - граф з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0|=n, |G^1|=m$,

$$E(A,B)=\{(a,b)\in G^1 : a\in A,\ b\in B\},\ \rho(A,G)=\left|E(A,G^0\setminus A)\right|,$$

Множина ребер $E(A,G^0\setminus A)$ називається кограницею множини $A\subseteq G^0$. Граф G - називається α-експандером для деякого α ($0<\alpha<1$), якщо $\rho(A,G)\ge\alpha\,|A|$ для кожного $A\subset G^0, |A|\le n/2$.

<u>Теорема 3 [2].</u> Якщо група Γ діє на множині U, $U=\sum_{i=1}^{p}U_i$, U_i – Γ-орбіта, *i=1(1)p,* і для деякої підмножини $M\subset U$ виконана умова $\sum_{i=1}^{p}|M\cap U_i|^2/|U_i|<1$, то найдеться таке $\gamma\in\Gamma$, що $\gamma(M)\cap M=\varnothing$.

Перестановочна склейка графів. Нехай H_1, H_2 - два графи, $H_1^0\cap H_2^0=\varnothing$, $\left|H_1^0\right|=\left|H_2^0\right|=n$ і нехай $\varphi: H_1^0\to H_2^0$ - деяка бієкція. Позначимо через $G=H_1\langle\varphi\rangle H_2$ граф, який одержується з графу H_1+H_2 ототожненням кожної вершини $a\in H_1^0$ з вершиною $\varphi(a)\in H_2^0$. Якщо позначити $\tau_1: H_1\to G,\ \tau_2: H_2\to G$ - ін'єктивні вложення графів, то відображення $\varphi^*=\tau_1^{-1}\varphi\tau_2$ буде перестановкою на множині G^0 вершин графа G.

Граф $G=H_1\langle\varphi\rangle H_2$ також можна розглядати як об'єднання по ребрам двох графів з однією множиною вершин. Надалі буде розглядатись випадок, коли графи H_1, H_2 є ізоморфними графами на *n* вершинах, $H_1\approx H_2\approx H$. Нехай $P(G)$ - множина усіх підмножин множини G^0 з числом елементів не більше $n/2$ а $P^k(G)$ - множина *k*–елементних підмножин множини G^0. Позначимо:

$$\rho_i(A,G)=\rho(\tau_i^{-1}(A),H_i),\ i=1,2.$$

$$P_\alpha^k(G)=\{A:A\in P^k(G),\ \rho_1(A)<\alpha k\}\ ,\quad M_\alpha(G)=\bigcup_{1\le k\le n/2}P_\alpha^k\ .$$

$$P_\alpha^k(H)=\{A:A\in P^k(H),\ \rho(A,H)<\alpha k\}\ .$$

Очевидно, що $\left|P_\alpha^k(G)\right|=\left|P_\alpha^k(H)\right|$, $\rho(A,G)=\rho_1(A,G)+\rho_2(A,G)$, тому величини $f_\alpha(k,H)=\left|P_\alpha^k(H)\right|$, $1\le k\le n/2,$ залежать тільки від графа H і не залежать від бієкції $\varphi:H_1^0\to H_2^0$.

Має місце наступне твердження.

Лема 1. Якщо графи H_1,H_2 є зв'язними ізоморфними графами на n вершинах, $H_1\approx H_2\approx H$ і для графа H виконана умова :

$$\sum_{1\le k\le n/2}(f_\alpha(k,H))^2/\binom{n}{k}<1\,,$$

то існує така бієкція φ, що граф $G=H_1\langle\varphi\rangle H_2$ буде α -експандером для деякого $\alpha<1$.

Доведення. Група усіх бієктивних відображень $\varphi:H_1^0\to H_2^0$ ізоморфна групі усіх перестановок $\varphi^*:G^0\to G^0$, тобто симетричній групі S_n. Ця група також діє на множині $P(G)$ і її орбітами є множини $P^k(G)$ k –елементних підмножин.

Тоді маємо $|M_\alpha\cap P^k|=|P_\alpha^k|=f_\alpha(k,H)$, $|P^k|=\binom{n}{k}$ і для доведення леми достатньо застосувати теорему 3 [2] до групи $\Gamma=S_n$, що діє на множині P.

Лема 2 Для кожного зв'язного графа G відображення:

$$\partial:\{A:A\subset G^0,1\le|A|<n/2\}\to\{E:E\subset G^1\}\,,$$

що задається формулою $\partial A=E(A,G^0\setminus A)$ є ін'єктивним.

Доведення. Для доведення леми достатньо показати, що кожних $A,B\subset G^0$, $A\ne B$ з умови $\partial A=\partial B$ випливає, що $B=G^0\setminus A$. Припустимо протилежне і розглянемо наступні випадки.

1) $A\cap B=\varnothing$. Тоді $\partial A\cap\partial B=\varnothing$ і отже $\partial A=\partial B=\varnothing$, а значить граф, що суперечить умові.

2) $A\cap B=D\ne\varnothing$. Тоді хоча б одна з множин $A\setminus D,B\setminus D$ непуста, наприклад, $A\setminus D\ne\varnothing$. З умови $\partial A=\partial B$ випливає, що $\partial(A\setminus D)=\varnothing$, що знову суперечить зв'язності графа G.

Таким чином, лема доведена.

Теорема. Якщо графи H_1,H_2 є зв'язними ізоморфними графами на n

вершинах, $H_1 \approx H_2 \approx H$, то існує така бієкція φ , що граф $G = H_1\langle\varphi\rangle H_2$ буде α -експандером для деякого $\alpha < 1$.

Доведення.

Виберемо у кожному графі H_1, H_2 по ізоморфному остовному дереву $T_1 \subseteq H_1, T_2 \subseteq H_2$, $T_1 \approx T_2 \approx T$. Оскільки при додаванні нових ребер до графа зберігається його властивість бути експандером, то якщо граф $F = T_1\langle\varphi\rangle T_2$ буде α -експандером, то так само α -експандером буде і граф $G = H_1\langle\varphi\rangle H_2$. Крім того, очевидно, що $\rho(A, T_i) \le \rho(A, H_i),\ i = 1, 2,$ і отже $f_\alpha(k, H) \le f_\alpha(k, T)$. Отже, тепер достатньо довести, що для довільного дерева T має місце нерівність:

$$\sum_{1 \le k \le n/2} (f_\alpha(k,T))^2 / \binom{n}{k} < 1.$$

Зауважимо, що із зв'язності графа $G = T_1\langle\varphi\rangle T_2$ і того, що $\alpha < 1$,одразу випливає, що $P_\alpha^k(T) = \varnothing,$ і отже $f_\alpha(1, T) = 0.$

Для біноміальних коефіцієнтів вірні наступні елементарні оцінки:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k,\ 1 \le k \le n.$$

Далі розглянемо величину $w_\alpha(k,T) = |\{E : E \subset T^1, |E| < \alpha k\}|$. Згідно із лемою 2 маємо нерівність: $f_\alpha(k,T) \le w_\alpha(k,T)$. Враховуючи, що $|T^1| = n - 1 < n$, маємо очевидну нерівність:

$$w_\alpha(k,T) \le \sum_{t < \alpha k} \binom{n}{t} < \binom{n}{\lfloor \alpha k \rfloor} \cdot 2^{\lfloor \alpha k \rfloor} < \left(\frac{2en}{\alpha k}\right)^{\alpha k}.$$

Таким чином: $(f(k,T))^2 / \binom{n}{k} < \left((2e/\alpha)^{2\alpha}\right)^k \left(2^{2\alpha - 1}\right)^k$.

Оскільки $\lim\limits_{\alpha \to 0}\left((2e/\alpha)^{2\alpha}\right) = 1$ і отже $\lim\limits_{\alpha \to 0}\left((2e/\alpha)^{2\alpha}\right)\left(2^{2\alpha-1}\right) = 0,5$, то виберемо α так, щоб $\left((2e/\alpha)^{2\alpha}\right)\left(2^{2\alpha-1}\right) \le 0,6$ і тоді буде забезпечена необхідна нерівність:

$$\sum_{1 \le k \le n/2} (f_\alpha(k,T))^2 / \binom{n}{k} < \sum_{k \ge 2} (0,6)^k < 1,$$ що і доводить теорему.

1. *S.Hoory, N.Linial, A. Wigderson*. Expander graphs and their applications
2. Bulletin (New Series) of the AMC, Vol. 43, Number 4, October 2006, Pages 439–561.
3. *Глухов О.Д.* Про застосування груп перестановок в деяких комбінаторних задачах.- Укр. мат. журнал, т.60, №11, 2008р. с.1568-1571.

Поступила 20.09.2010р.