

М.: Радио и связь, 1989. – 352 с.

4. Чернышов В.П., Шейнман Д.И. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства. – М.: Радио и связь, 1989. – 240 с.

5. Страхов А.Ф. Автоматизированные антенные измерения. – М.: Радио и связь, 1985. – 136 с.

*Поступила 8.02.2010р.*

УДК 358.3

В.О.Лаптев, Т.В. Уварова, М.М.Степанов

### **ВИМІР ВІДСТАНЕЙ НА ЦИФРОВИХ КАРТАХ З УРАХУВАННЯМ ЕЛІПСОЇДУ**

Запропоновано новій підхід до виміру відстаней на поверхні відносності (еліпсоїді) обертання з коректуванням для земної поверхні.

При проведенні екологічного моніторингу виникає потреба в обробки більшого об'єму даних. При своєчасному отриманні точних координат небезпечних об'єктів суттєво збільшується вірогідність їх ліквідації при зменшенні кількості витрачених для цього сил та засобів. Тому використання геоінформаційних технологій при розробці нових і модернізації існуючих зразків інформаційних систем приведе до підвищення ефективності їх використання. На цей час в Україні використовуються цифрові карти місцевості, які створені на основі даних паперових карт і запозичили всі їх недоліки. Виходячи з цього задача з уточнення старих та винаходу нових методів обчислення даних на цифрових (електронних) картах є актуальною.

Аналіз існуючих методів виміру відстаней на цифрових картах свідчить про те, що більшість методів створюються за допомогою двох способів [1]:

1) інтегруванням, якщо відстань між пунктами А і В може бути описано функцією  $y = f(x)$ , заданої в явному виді;

2) по ламаної, яка апроксимує криву АВ, якщо функція  $y = f(x)$  невідома.

Потенційні можливості першого (точного) способу дуже обмежені, тому що функція  $y = f(x)$  в більшості практичних задач невідома. Також нелінійна кусочно-функціональна апроксимація кривої АВ буде неточною і, у порівнянні із способом 2) громіздкою. Тому спосіб 2) залишається найбільше широко застосовуваним, але точність розрахунків, що проводяться з використанням 2) способу може складати (враховуючи місцевість) від десятків метрів до декількох кілометрів. Наприклад, при розрахунках відстані

маршу для одиниці бойової техніки помилка в декілька кілометрів больова, але не дуже суттєва, як що врахувати батальйон, ця помилка трансформується в десятки цистерн з паливом які необхідно доставити до машин.

Метою роботи є вирішення задачі із розробці методу який би дозволяв більш точно вимірювати відстані між двома пунктами. Тому пропонується новий підхід до вирішення поставленої задачі з використанням способу 2), але з новим підходом, з використанням еліпсоїду, які максимально наближений до земної поверхні.

Тоді при раціональному завданні координатних крапок на кривій і досить частому розподілу її на ланки - прямолінійні хорди, що складають відповідні дуги, будуть близькими по довжині цим дугам. Отже, ламана, що апроксимує криву АВ, по довжині виявиться близькою до останньої.

Найкоротшою відстанню між сусідніми крапками є пряма, довжина якої елементарно обчислюється, якщо задані координати її кінців. Довжина ламаної (АВ) є сума довжин складових її ланок.

Спосіб 2) може бути застосований для визначення довжин кривих (відстаней), заданих на поверхні відносності. У якості поверхні відносності надалі буде матись на увазі еліпсоїд обертання Красовського. На відміну від плоских кривих тут найкоротша відстань між сусідніми крапками не виражається прямою лінією, довжина якої легко обчислюється, а задається проведеної на поверхні геодезичною лінією [2].

Обчислення довжини цієї лінії виявляється проблематичним. Зі сказаного впливає доцільність розробки методів виміру довжин, що мають точність яких не залежала б ні від типу проєкції, ні від масштабу карти та задовольняла нас в точності обчислень.

Задача проектування поверхні відносності на площину складається у відшуванні функцій

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

що забезпечують мінімальні спотворення [3].

Тобто вираз (1) математично перетворює один простір вимірів в інший при цьому довжини, площі та обсяги - математично інваріанти, значення яких не повинні залежати від простору, у якому вони вимірюються. Але для різних типів проєкцій ці величини, визначені у плоских координатах, не будуть інваріантними. Більш того, навіть для одного типу проєкції, але різних по широтам і довготам районів земної поверхні, де різні масштаби спотворення, інваріантність зазначених величин не зберігається.

У системі координат  $X, Y, Z$  диференціал геодезичної лінії  $l_{\Gamma}$  визначається співвідношенням [3]:

$$dl_{\Gamma} = \frac{1}{c}(ydx - xdy), \quad (2)$$

$$c = a \cos u \sin \alpha \quad (3)$$

де  $a$  - екваторіальна піввісь еліпсоїда Красовського,

$u$  - приведена широта,

$\alpha$  - азимут напрямку диференціала  $dl_{\Gamma}$ .

Здавалося б досить проінтегрувати 2), щоб одержати формулу для обчислення довжини геодезичної лінії. Однак це не так. Щоб показати останнє, попередньо зробимо необхідні проміжні викладення.

Тому що положення крапок (об'єктів) на поверхні відносності фіксується в системі геодезичних координат, від  $X, Y, Z$  необхідно перейти до координат  $B, L$ .

Зв'язок між ними такий:

$$X = \frac{a^2 \cos B \cos L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}, \quad Y = \frac{a^2 \cos B \sin L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}, \quad (4)$$

$$Z = \frac{b^2 \sin B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}.$$

У (4)  $b$  - позначає полярну піввісь еліпсоїда обертання.

Як відомо

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL. \quad (5)$$

З (4) одержуємо

$$\frac{\partial x}{\partial B} = -\frac{a^2 \sin B \cos L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}} + \frac{a^2 (a^2 - b^2) \sin B \cos^2 B \cos L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} = -\frac{a^2 \cos B \sin L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial y}{\partial B} = -\frac{a^2 \sin B \sin L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}} + \frac{a^2 (a^2 - b^2) \sin B \cos^2 B \sin L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{a^2 \cos B \cos L}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}.$$

З огляду на (4), (5) і (6), знайдемо

$$y dx - x dy = -\frac{a^4 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} dL. \quad (7)$$

У (3)

$$\cos u = \frac{a \cos B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}. \quad (8)$$

Тоді

$$\frac{1}{c} = \frac{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}}{a^2 \cos B \sin \alpha}. \quad (9)$$

Підставивши (7) і (9) у (2) та проінтегрувавши по координаті  $L$ , для  $l_\Gamma$  одержимо

$$l_\Gamma = -\frac{1}{\sin \alpha} (L_2 - L_1) \frac{a^2 \cos B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}} \quad (10)$$

У геодезичних задачах, у яких азимутальні кути  $\alpha$  задані, отримане співвідношення (10) і є рішенням питання про обчислення довжин геодезичних ліній. У системі координат  $(B, L)$  дані про кути  $\alpha$  відсутні, тому формула (10) не може бути використана.

Розглянемо квадрат диференціала дуги кривої на поверхні еліпсоїда обертання

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial B} dB + \frac{\partial z}{\partial L} dL \right)^2 \quad (11)$$

У (11)

$$\frac{\partial z}{\partial B} = \frac{b^2 \cos B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}} + \frac{b^2 (a^2 - b^2) \sin^2 B \cos B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = 0.$$

Формулу (11) зручно аналізувати, представивши у виді першої диференціальної форми Гауса

$$dl^2 = E(B, L) dB^2 + 2F(B, L) dBdL + G(B, L) dL^2, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} E(B, L) &= \left( \frac{\partial x}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial B} \right)^2, \\ F(B, L) &= \frac{\partial x}{\partial B} \cdot \frac{\partial x}{\partial L} + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot \frac{\partial y}{\partial L} + \frac{\partial z}{\partial B} \cdot \frac{\partial z}{\partial L}, \\ G(B, L) &= \left( \frac{\partial x}{\partial L} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial L} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial L} \right)^2. \end{aligned}$$

На еліпсоїді обертання меридіани і паралелі взаємно перпендикулярні, тому  $F(B, L) = 0$  (що можна показати, записавши  $F(B, L)$  в явному виді).

Для  $E(L, B)$  і  $G(L, B)$  випишемо остаточні формули, опустивши прості, але громіздкі викладення

$$E(L, B) = \frac{a^4 b^4}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^3}, \quad G(L, B) = \frac{a^4 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}.$$

Для квадрата диференціала геодезичної лінії, як і будь-якої лінії на поверхні еліпсоїда обертання, маємо форму

$$dl_\Gamma^2 = \frac{a^4 b^4}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^3} dB^2 + \frac{a^4 \cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} dL^2.$$

Отже,

$$l_\Gamma = a^2 \int_{B_1}^{B_2} \int_{L_1}^{L_2} \left[ \frac{b^4}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^3} dB^2 + \frac{\cos^2 B}{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B} dL^2 \right]^{1/2}, \quad (13)$$

де  $(B_1, L_1)$  і  $(B_2, L_2)$  - дві крапки на поверхні еліпсоїда обертання, між якими обчислюється довжина геодезичної лінії.

Практичне використання формули (13) надзвичайно утруднено.

Покажемо, що можливо і допустимо наступний, порівняно простий шлях рішення задачі.

Визначається окремо довжина кривої  $l_{\Gamma(L)}$  між координатами  $L_1, L_2$  при незмінному значенні координати  $B$  - довжина проекції геодезичної лінії на паралель. Визначається довжина кривої  $l_{\Gamma(B)}$  між координатами  $B_1, B_2$  при незмінному значенні  $L$  - довжина проекції геодезичної лінії на меридіан. У силу того, що на поверхні еліпсоїда обертання меридіани і паралелі взаємно перпендикулярні, для обчислення  $l_\Gamma$  між двома сусідніми крапками  $(B_1, L_1)$  і  $(B_2, L_2)$  можливе використання формули лінійної геометрії

$$l_\Gamma = \sqrt{l_{\Gamma(B)}^2 + l_{\Gamma(L)}^2} \quad (14)$$

Справді, на площині довжина гіпотенузи прямокутного трикутника є корінь із суми квадратів катетів. Кожен катет є проекцією гіпотенузи на напрямок лінії, на якій лежить цей катет. У нашому випадку проекції  $l_{\Gamma(B)}, l_{\Gamma(L)}$  можна ототожнити з катетами деякого прямокутного трикутника

(кут між  $L_{\Gamma(B)}, L_{\Gamma(L)}$  дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ ), а довжину геодезичної лінії з довжиною його гіпотенузи, тому що  $l_\Gamma$  повинно бути найкоротшою відстанню між

крапками  $(B_1, L_1), (B_2, L_2)$ .

Справа, таким чином, зводиться до відшукування формул для  $l_{\Gamma(B)}, l_{\Gamma(L)}$ .

При  $B = const$  з (13) випливає

$$l_{\Gamma(L)} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{a^2 \cos B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}} dL \quad (15)$$

При  $L = const$

$$l_{\Gamma(B)} = \int_{B_1}^{B_2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{3/2}} dB \quad (16)$$

Інтегрування (15) дає

$$l_{\Gamma(L)} = (L_2 - L_1) \frac{a^2 \cos B}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{1/2}} \quad (15')$$

Різниця  $(L_2 - L_1)$  у формулу (15') повинна підставлятися в радіанах.

Формальне співвідношення (15') дає неоднозначний результат. Для однакових кутових значень  $(L_2 - L_1)$  лінійні розміри цієї різниці залежать від різниці широт крапок, відстань між якими вимірюється. Тому значення  $l_{\Gamma(L)}$  при  $B_1$  буде відмінним від його значення при  $B_2$ , якщо  $B_1 \neq B_2$  (рис.1).

Щоб виключити неоднозначність, скористаємося рис.1.

Нехай, для простоти міркувань, одна з крапок, наприклад  $(B_1, L_1)$ , між якими обчислюється довжина геодезичної лінії, розміщена на екваторі і її положення залишається незмінним. Інша ж крапка  $(B_j, L_2)$  змінює своє положення від екватора до полюса, залишаючись на тому самому меридіані при  $L = L_2$ . Якщо підставляти в (15') широти  $B_j$ , то з їхнім ростом проекція на паралель геодезичної лінії на рівні  $B_j$  буде зменшуватися, прагнучи до нуля при  $B_j \rightarrow 90^\circ$ . В граничній крапці  $(B_j = 90^\circ)$  вона стане рівної нулю, і довжина геодезичної лінії визначиться лише меридіанною проекцією, що і буде найкоротшою відстанню. Якщо ж у (15') підставляти значення  $B_1$ , то довжина  $l_{\Gamma}$ , що обчислена по формулі (14), виявиться більше довжини геодезичної лінії. Отже, формула (14) визначає довжину геодезичної лінії лише тоді, коли в співвідношення для  $l_{\Gamma(L)}$  з двох можливих підставляється значення більшої широти. Іншими словами, при обчисленні відстані між крапками  $(B_j, L_j)$  й  $(B_k, L_k)$  у формулу (15') підставляється  $B_j$ , якщо

$|B_j| > |B_k|$ , і  $B_k$ , коли  $|B_k| > |B_j|$

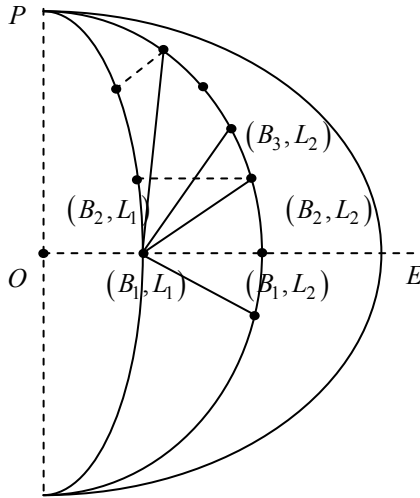


Рис. 1

Виразення (10) при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  дає проєкцію геодезичної лінії на паралель.

Порівнюючи цю проєкцію з (15'), знаходимо, що з точністю до знака вони збігаються. Як впливає з (14), розходження в знаках не має принципового значення.

Інтеграл (16) приводиться до виду

$$l_{\Gamma(B)} = \frac{b^2}{a} \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}, \quad (16')$$

де

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Інтеграл (16') не виражається через елементарні функції в кінцевому виді. Однак функція

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}$$

розкладається в рівномірно і швидко збіжний ряд по ступенях ексцентриситету  $e$

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} e^{2n} \sin^{2n} B, \quad (17)$$

де  $(2n-1)!!$  означає добуток непарних чисел натурального ряду (наприклад  $3!!=1\cdot3$ ), а  $2n!!$  - добуток парних чисел ( $4!!=2\cdot4$ ).

При максимальному значенні  $\sin^{2n} B=1$  вже четвертий член ряду (17) дорівнює усього лише  $9,371\cdot10^{-8}$ ; так що добуток  $\frac{b^2}{a}$  на цю величину складає лише частку метра.

Підтвердженням практичної придатності формул (15') і (21) може служити результат порівняння розрахованих по них довжин  $l_{\Gamma(L)}$  (дуга в  $1^\circ$  при  $B=46^\circ$ ) і  $l_{\Gamma(B)}$  ( $B_1=45^\circ$  і  $B_2=46^\circ$ ) з довідковими даними [4].

Проекції	Довідкові значення	Розрахункові значення
$l_{\Gamma(L)}$ (м)	77465	77464,5944
$l_{\Gamma(B)}$ (м)	111144	111143,05024

Видно, що при значних довжинах дуг розбіжність складає лише частки метра.

Довжина відрізка кривої на еліпсоїді обертання, заданої координатами  $(B_1, L_1), (B_2, L_2), \dots, (B_j, L_j), (B_k, L_k), \dots, (B_n, L_n)$ , обчислюється по формулі

$$l_{\Gamma n} = \sum_{j=1}^{n-1} l_{j,j+1},$$

де

$$l_{j,j+1} = \sqrt{l_{\Gamma(B_{jk})}^2 + l_{\Gamma(L_{jk})}^2},$$

$l_{\Gamma(B_{jk})}, l_{\Gamma(L_{jk})}$  - проекції геодезичної лінії, що з'єднає дві сусідні крапки  $(B_j, L_j), (B_k, L_k)$ .

На земній поверхні положення крапки фіксується трьома координатами:  $B$  - широтою,  $L$  - довготою,  $H$  - висотою над рівнем моря. Відстані, що обмірювані на поверхні еліпсоїда, будуть відрізнятися від обмірюваних на землі. Тому визначені між  $j$ -й і  $k$ -й крапками довжини геодезичних ліній  $l_{j,k}$  мають потребу в коректуванні.

Коригувальним елементом є перевищення крапок одна над іншою.

$$\Delta H_{jk} = |H_k - H_j|$$

Прийнявши  $l_{\Gamma(jk)} = l_{j,j+1}$  і  $\Delta H_{jk}$  за катети деякого прямокутного трикутника, можемо визначити тангенс кута  $\gamma$ , що лежить проти  $\Delta H_{jk}$ ,



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta H_{jk}}{l_{\Gamma(jk)}},$$

відкiля

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left( \frac{\Delta H_{jk}}{l_{\Gamma(jk)}} \right).$$

Скоректована довжина геодезичної лiнii буде дорiвнює

$$l_{\Gamma(jk)}^* = \frac{l_{\Gamma(jk)}}{\cos \gamma}.$$

Таким чином, задача щодо знаходження способу вимiру на цифровiй (електроннiй) картi вирiшена. Запропоновано теоретично бiльш строгий i бiльш точний метод вимiру вiдстаней мiж об'єктами земної поверхнi, точнiсть якого не залежить вiд виду проєкцiї.

1. *Цветков В.Я.* Геоинформационные системы и технологии. – М. Финансы и статистика 1998. - 234 с.
2. *Бугаевский Л.М., Вахромеева Л.А.* Картографические проекции. – М. Надра, 1992. – 239с.
3. *Закатов П.С.* Курс вищої геодезії. - М.: Надра, 1976.- 510 с.
4. *Берлянт А.М., Гедимiн А.В., Кельнер Ю.Г. та iн.* Довiдник з картографiї. – М.:Надра, 1988. – 427 с.

*Поступила 28.01.2010р.*

УДК 621.391

С.Т. Черепков, С.Н. Шевкун

## **СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

В статье рассматриваются вопросы построения оптимальной пространственно-временной системы обработки сигналов. Предлагается оптимальный способ обработки сигнала, потенциальную точность измерения угловых координат.

**Ключевые слова:** измерительная радиосистема пространственно-временная система, оптимальный алгоритм обработки

**Введение.** При обработке сигналов точечных объектов оказывается, что антенна, осуществляющая пространственную обработку, должна иметь