УДК 519.218.84 (045)

М.Є. Фриз, к.т.н., ТДТУ ім. І.Пулюя, Тернопіль
Л.М. Щербак, д.т.н., НАУ, Київ

ВЛАСТИВІСТЬ ПЕРЕМІШУВАННЯ ТА ЕРГОДИЧНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Using a characteristic function method the mixing property and ergodicity of strictly stationary linear random sequence driven by infinitely divisible process have been proven.

Вступ

При здійсненні прикладного статистичного аналізу випадкових сигналів важливою й завжди бажаною для дослідника їх властивістю є ергодичність, що дозволяє значно зменшити необхідний обсяг спостережень. На практиці, як правило, ергодичність досліджуваного процесу просто пустулюється, тому важливе значення має застосування таких математичних моделей, для яких ергодичність була б характерною для них властивістю.

Лінійні випадкові процеси поширені в задачах математичного, комп'ютерного моделювання та обробки випадкових сигналів у радіотехніці, гідроакустиці, радіофізиці, геофізиці, технічній та медичній діагностиці, енергетиці та ін. [1, 2]. Можна показати, що стаціонарна у вузькому розумінні гільбертова лінійна випадкова послідовність є ергодичною відносно математичного сподівання, кореляційної функції, одновимірних характеристичної функції та функції розподілу.

В даній статті ми покажемо, що стаціонарна лінійна випадкова послідовність задовольняє умові перемішування, звідки випливає її ергодичність відносно математичного сподівання (якщо тільки воно існує) будь-якої m-вимірної ($m \ge 1$) борелівської функції від цього процесу.

Постановка задачі

Дійсною лінійною випадковою послідовністю (ЛВП) ξ_t, $t \in \mathbf{Z}$ будемо називати випадкову послідовність виду

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t}\zeta_\tau , \qquad (1)$$

де $\varphi_{\tau,t}$, $t, \tau \in \mathbf{Z}$ - дійсна невипадкова функція (ядро ЛВП), для якої виконується умова $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \left|\varphi_{\tau,t}\right| < \infty$, $\forall t \in \mathbf{Z}$; ζ_τ, $\tau \in \mathbf{Z}$ - послідовність дійсних безмежно подільних незалежних випадкових величин (породжуючий білий шум у вузькому розумінні).

Крім того, у цій статті будемо вважати ζ_τ, $\tau \in \mathbf{Z}$ послідовністю однаково розподілених випадкових величин (стаціонарним білим шумом).

Якщо в (1) $\varphi_{\tau,t} = \varphi_{t-\tau}$, то ЛВП буде стаціонарною у вузькому розумінні:

$$\xi_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{t-\tau}\zeta_\tau = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_\tau \zeta_{t-\tau}, \tag{2}$$

де $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_\tau| < \infty$.

Основною задачею даної роботи є обгрунтування властивостей перемішування та ергодичності послідовності (2). Для цього далі ми спочатку розглянемо необхідні властивості ЛВП, поняття, пов'язані з ергодичними властивостями та перемішуванням стаціонарних випадкових послідовностей, а тоді покажемо, що вони є характерними для лінійної випадкової послідовності (2).

Характеристична функція лінійної випадкової послідовності

Породжуюча стаціонарна у вузькому розумінні безмежно подільна випадкова послідовність ζ_τ, $\tau \in \mathbf{Z}$ повністю задається одновимірною характеристичною функцією $f_\zeta(u) = \mathbf{M}e^{iu\zeta_\tau}$, $u \in (-\infty, \infty), i = \sqrt{-1}$, логарифм якої в формі Леві-Хінчина має вигляд [3]:

$$\ln f_\zeta(u) = iau + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x), \tag{3}$$

де $a \in \mathbf{R}$; $G(x), x \in \mathbf{R}$ - дійсна обмежена неспадна функція така, що $G(-\infty) = 0$; підінтегральний вираз при $x = 0$ довизначається за неперервністю й дорівнює $-\frac{u^2}{2}$.

Логарифм одновимірної характеристичної функції ЛВП (1) дорівнює

$$\begin{gathered} \ln f_\xi(u;t) = \ln \prod_{\tau=-\infty}^{\infty} f_\zeta(u\varphi_{\tau,t}) = \\ = iau \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iux\varphi_{\tau,t}} - 1 - \frac{iux\varphi_{\tau,t}}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x). \end{gathered} \tag{4}$$

Збіжність ряду (4) рівномірно за u в кожному скінченному інтервалі випливає з $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\varphi_{\tau,t}| < \infty$, $\forall t \in \mathbf{Z}$. Отже, ряд (1) збігається за розподілом

$\forall t \in \mathbf{Z}$. Більше того, оскільки $\forall t \in \mathbf{Z}$ (1) є рядом незалежних випадкових величин, то його збіжність за розподілом є еквівалентною збіжності з ймовірністю 1 [4].

Логарифм m-вимірної характеристичної функції ЛВП (1) має вигляд:

$$\ln f_{\xi}(u_1, u_2, ..., u_m; t_1, t_2, ..., t_m) = \ln \prod_{\tau=-\infty}^{\infty} f_{\zeta}\left(\sum_{k=1}^{m} u_k \varphi_{\tau,t_k}\right) =$$

$$= ia\sum_{k=1}^{m} u_k \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi_{\tau,t_k} + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ix\sum\limits_{k=1}^{m} u_k \varphi_{\tau,t_k}} - 1 - \frac{ix\sum\limits_{k=1}^{m} u_k \varphi_{\tau,t_k}}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) . \quad (5)$$

Ергодичність та властивість перемішування стаціонарної ЛВП

Задача вивчення стаціонарних (у вузькому розумінні) послідовностей є частинним випадком задачі вивчення взаємнооднозначних зберігаючих міру оборотних перетворень (автоморфізмів) деякого простору з мірою [5]. З цієї точки зору ергодичність стаціонарних послідовностей глибоко вивчено багатьма авторами [4 - 7]. Узагальнюючи теоретико-ймовірнісний зміст цих результатів можна означити поняття ергодичності наступним чином.

Нехай ξ_t, $t \in \mathbf{Z}$ - стаціонарна у вузькому розумінні випадкова послідовність, задана на деякому ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathbf{P}\}$ із значеннями у вимірному просторі $\{X, \mathrm{B}\}$ (де B - σ-алгебра борелівських множин в X); $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, $m \geq 1$ - деяка функція, вимірна в $\{X^m, \mathrm{B}^{\mathrm{m}}\}$, причому існує скінченне математичне сподівання $\mathbf{M}f(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, ..., \xi_{t_m}) < \infty, \forall t_1, t_2, ..., t_m \in \mathbf{Z}$.

Послідовність $\xi_t, t \in \mathbf{Z}$ називається ергодичною, якщо для будь-якої функції $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, що задовольняє наведеним вище умовам, з ймовірністю 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} f(\xi_{t_1+t}, \xi_{t_2+t}, ..., \xi_{t_m+t}) = \mathbf{M}f(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, ..., \xi_{t_m}), \forall t_1, t_2, ..., t_m \in \mathbf{Z} . \quad (6)$$

Найважливішими для практичних застосувань є часткові випадки ергодичності стаціонарної випадкової послідовності відносно математичного сподівання ($m=1, f(x)=x$), кореляційної функції ($m=2$, $f(x_1,x_2)=(x_1-\mathbf{M}\xi_t)(x_2-\mathbf{M}\xi_t)$), одновимірних функції розподілу ($m=1, f(x)=U(y-x)$, де $U(y)=\begin{cases}0, & y\leq 0,\\ 1, & y>0.\end{cases}$ - функція Хевісайда) та характеристичної функції ($m=1,\ f(x)=e^{iux}$).

Нашою задачею далі буде показати, що для стаціонарної лінійної випадкової послідовності характерна властивість перемішування, суть якої полягає в тому, що випадкові вектори $(\xi_{t_1+t},\xi_{t_2+t},...,\xi_{t_m+t})$ і $(\xi_{s_1},\xi_{s_2},...,\xi_{s_n})$, $t_1,t_2,...,t_m,s_1,s_2,...,s_n\in\mathbf{Z}$ (утворені з відліків стаціонарної ЛВП) стають незалежними при $|t|\to\infty$.

Властивість перемішування стаціонарної випадкової послідовності, виражена в термінах її характеристичних функцій має вигляд:

$$\lim_{|t|\to\infty} f_\xi(u_1,u_2,...,u_m,v_1,v_2,...,v_n;t_1+t,t_2+t,...,t_m+t,s_1,s_2,...,s_n)=$$
$$=f_\xi(u_1,u_2,...,u_m;t_1,t_2,...,t_m)f_\xi(v_1,v_2,...,v_n;s_1,s_2,...,s_n), \tag{7}$$
$$u_1,u_2,...,u_m,v_1,v_2,...,v_n\in\mathbf{R},\quad t_1,t_2,...,t_m,s_1,s_2,...,s_n\in\mathbf{Z}.$$

Виходячи із загального вигляду m-вимірної характеристичної функції ЛВП (5) і враховуючи, що для стаціонарної лінійної випадкової послідовності має місце $\varphi_{\tau,t}=\varphi_{t-\tau}$, запишемо:

$$f_\xi(u_1,u_2,...,u_m,v_1,v_2,...,v_n;t_1+t,t_2+t,...,t_m+t,s_1,s_2,...,s_n)=$$
$$\exp\left[ia\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_{t_k-\tau+t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\varphi_{s_k-\tau}\right)+\right.$$
$$+\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ix\left(\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_{t_k-\tau+t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\varphi_{s_k-\tau}\right)}-1-\frac{ix\left(\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_{t_k-\tau+t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\varphi_{s_k-\tau}\right)}{1+x^2}\right)\times$$
$$\left.\times\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\right]=$$
$$=\exp\left[ia\left(\sum_{k=1}^{m}u_k+\sum_{k=1}^{n}v_k\right)\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\varphi_\tau+\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\psi\left(\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_{t_k-\tau+t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\varphi_{s_k-\tau}\right)\right],$$

де $\psi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)$ - логарифм характеристичної функції послідовності ζ_τ, $\tau\in\mathbf{Z}$ в формі Леві-Хінчина при $a=0$ (див. (3)).

Функція $\psi(u)$ є рівномірно неперервною за $u\in\mathbf{R}$, причому $\psi(0)=0$ [3]. Оскільки $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|\varphi_\tau|<\infty$, то $\varphi_\tau\to 0$ при $|\tau|\to\infty$. Звідси випливає, що

$$\lim_{|t|\to\infty}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\psi\left(\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_{t_k-\tau+t}+\sum_{k=1}^{n}v_k\varphi_{s_k-\tau}\right)=$$

$$=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\left(\psi\left(\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_{t_k-\tau}\right)+\psi\left(\sum_{k=1}^{n}v_k\varphi_{s_k-\tau}\right)\right).$$

Звідки, очевидно, отримуємо (7). Отже, стаціонарна ЛВП (2) є послідовністю з перемішуванням.

Найважливішим для практики висновком тут є те, що наслідком властивості перемішування є ергодичність стаціонарної послідовності в розумінні (6) [5 - 8]. Зокрема, ергодичність стаціонарної ЛВП відносно математичного сподівання, кореляційної функції, інших моментних функцій (якщо вони існують), одно- та багатовимірних характеристичних функцій, функцій розподілу випливає з встановленої властивості перемішування.

Висновки

На основі аналізу властивостей стаціонарної лінійної випадкової послідовності методом характеристичних функцій, отримано наступні результати.

1. Показано, що для стаціонарної лінійної випадкової послідовності характерна властивість перемішування.
2. Наслідком властивості перемішування та його важливим прикладним значенням є ергодичність стаціонарної лінійної випадкової послідовності, що дозволяє здійснювати статистичне оцінювання математичного сподівання (якщо тільки воно існує) будь-якої m-вимірної ($m \geq 1$) борелівської функції від цієї послідовності, використовуючи усереднення за часом.

1. *Марченко Б.Г., Щербак Л.Н.* Линейные случайные процессы и их приложения. - К.: Наукова думка, 1975. - 143 с.
2. *Марченко Б.Г., Мулик Н.В., Фриз М.Є.* Обґрунтування математичної моделі газонавантажень // Вісник Тернопільського державного технічного університету ім. І.Пулюя. – 2005. – №2. – С. 138 - 143.
3. *Лукач Е.* Характеристические функции: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
4. *Лоэв М.* Теория вероятностей: Пер. с англ. – М.: Изд-во ин. лит., 1962. – 720 с.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 570 с.
6. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
7. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1987. – 400 с.
8. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Поступила 2.02.2009р.