

## Процеси дифузії-конвекції з урахуванням сорбції у двошаровому фільтрі

Віктор Сівак<sup>1</sup>, Євген Чапля<sup>2</sup>, Ольга Чернуха<sup>3</sup>

<sup>1</sup> к. т. н., доцент, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, 33000, Рівне,

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, 79005, Львів, e-mail: chaplia@cmm.lviv.pl; Інститут механіки середовища і прикладної інформатики Університету Казимира Великого в Бидгощі, вул. Ходкевича, 30, 85-064, Бидгощ, Польща, e-mail: czapla@ukw.edu.pl

<sup>3</sup> к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудасва, 15, 79005, Львів, e-mail: cher@cmm.lviv.ua

*Розглянуто контактну-крайову задачу конвективної дифузії для фільтра, що складається з двох шарів різної пористості, насичених водним розчином. На зовнішніх поверхнях задано значення концентрації забруднюючої речовини (що відповідає існуючим можливостям доступного контролю), а на внутрішній поверхні їх контакту — умови неідеально масового контакту. У вихідних рівняннях враховується сорбція домішок на скелеті пористого матеріалу, яка описується в лінеаризованому варіанті. Для побудови аналітичних розв'язків сформульованої задачі конвективної дифузії узагальнено метод, який базується на застосуванні інтегральних перетворень окремо в контактуючих областях. Отримано аналітичні вирази для визначення концентрацій домішки та потоків маси у кожному структурному елементі. Це дало змогу запропонувати схему для знаходження часу насичення забруднюючою речовиною двошарового фільтра та дослідити його залежність від фізико-хімічних властивостей матеріалу і геометричних параметрів.*

**Ключові слова:** конвективна дифузія, двошаровий фільтр, контактну-крайова задача, час насичення.

**Вступ.** В існуючих промислових системах очистки питної води та забруднених стоків широко використовуються багатошарові фільтри з різною пористістю шарів [1]. Ефективність їхньої роботи істотно залежить від сорбційних властивостей окремих шарів, пористості, а також відповідних геометричних параметрів. В інженерній практиці для розрахунку таких фільтрів, як правило, використовують комп'ютерне моделювання, розв'язуючи числовими методами нелінійні задачі фільтрації стічних вод [2].

Разом із тим, для аналізу впливу пористості та геометричних параметрів фільтра на довговічність його роботи доцільно отримати аналітичні розв'язки аналогічних задач у лінеаризованому варіанті опису процесів сорбції. У даній роботі досліджуються процеси масоперенесення частинок домішкової речовини за урахування конвективної складової перенесення та сорбційних процесів у двошаровому фільтрі.

## 1. Вихідні модельні співвідношення

При формулюванні вихідних співвідношень моделі перенесення забруднення в двошаровому фільтрі вважаємо, що довільна область кожного шару складається зі скелета та водного розчину, який заповнює поровий простір. Прийmemo, що в процесі фільтрації скелет не деформується і пористість залишається сталою (не враховуються зміни, пов'язані з сорбцією домішкової речовини). Водний розчин є двокомпонентним і складається з частинок води та забруднюючої субстанції. Частинки забруднення перебувають у двох станах — конвективно рухомому розчині та поверхні скелета.

Основними процесами, що розглядаються, є конвективна дифузія домішок і їхня сорбція скелетом. Ці процеси описуються з використанням наближення континуума центрів мас [3] для рідкої фази, приймаючи швидкість конвективного руху частинок  $\vec{v}_r$  наближено рівною істинній швидкості порового розчину при фільтрації, тобто  $\vec{v}_r \cong \vec{v}_f / \kappa$ , де  $\vec{v}_f$  — швидкість фільтрації,  $\kappa$  — пористість. Значимо, що середовище є ізотропним і поверхнева та об'ємна пористості приймаються рівними.

Рівняння балансу для порового розчину запишемо у вигляді [3]

$$\rho \frac{dc_i(t, \vec{r})}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_i + \sigma_{mi}, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (1)$$

де  $\rho = \sum_i \rho_i$  — сумарна густина розчину;  $\rho_i$ ,  $\sigma_{mi}$  — густина та потужність виробництва маси  $i$ -ої компоненти;  $c_i = \rho_i / \rho$  — масова концентрація компоненти  $i$ ;  $\vec{J}_i$  — дифузійний потік  $i$ -ої складової розчину;  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v}_r \cdot \vec{\nabla}$  — повна похідна за часом;  $\vec{\nabla} = \vec{i}^\alpha \partial / \partial x^\alpha$  — оператор Гамільтона;  $\vec{i}^\alpha$  — базисний одиничний орт;  $x^\alpha$  — координата декартової системи координат, до якої віднесено тіло;  $\vec{r} = x^\alpha \vec{i}_\alpha$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ );  $t$  — час; крапкою позначено скалярний добуток. Компоненті розчину, що відповідає воді, надаємо значення індексу  $i = 0$ , забруднюючій речовині у конвективно рухомому розчині —  $i = 1$ , а у зв'язаному стані —  $i = 2$ . При цьому  $\sigma_{m0} = 0$ .

Вважаємо, що дифузійний потік визначається градієнтами хімічних потенціалів  $\mu_i$ , які лінійно залежать від концентрацій, тобто

$$\vec{J}_i = -L \vec{\nabla} \mu_i = -L^* \vec{\nabla} c_i, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (2)$$

де  $L$ ,  $L^*$  — кінетичні коефіцієнти перенесення.

Потужність виробництва маси компоненти  $i$  є пропорційна до локальної різниці хімічних потенціалів  $\mu_i$  ( $i = 1; 2$ ) і, як наслідок, різниці концентрацій  $c_i$  ( $i = 1; 2$ ). Якщо знехтувати зворотним переходом частинок забруднюючої речовини зі зв'язаного стану в розчин і прийняти лінійну залежність хімічних потенціалів від концентрацій, то  $\sigma_{m1} = -k^* c_1$ ,  $\sigma_{m2} = 0$ ,  $\sigma_{m0} = 0$ , де  $k^*$  — кінетичний коефіцієнт процесу сорбції.

Концентрації  $c_i$  та потоки  $\vec{J}_i$  ( $i = \overline{0,2}$ ) задовольняють умови нормування  $\sum_i c_i = 1$  і  $\sum_i \vec{J}_i = 0$ . Перенесення у зв'язаному стані відсутнє. Густину  $\rho$  і кінетичні коефіцієнти  $L^*$  та  $k^*$  приймаємо сталими. Тоді концентрації  $c_1$  і  $c_2$  визначаємо з рівнянь

$$\frac{\partial c_1(t, \vec{r})}{\partial t} = D\Delta c_1(t, \vec{r}) - \vec{v}_r \cdot \vec{\nabla} c_1(t, \vec{r}) - kc_1(t, \vec{r}), \quad \frac{\partial c_2(t, \vec{r})}{\partial t} = kc_1(t, \vec{r}), \quad (3)$$

де  $D = L^*/\rho_0$  — коефіцієнт дифузії домішки,  $k = k^*/\rho_0$  — приведений кінетичний коефіцієнт процесу сорбції,  $\rho_0$  — стале значення густини розчину,  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  — оператор Лапласа.

Приведемо систему рівнянь (3) до безрозмірного вигляду. З цією метою введемо нові змінні

$$t = k_*\tau; \quad \xi^{(\alpha)} = (k_*/D_*)^{1/2} x^{(\alpha)}. \quad (4)$$

Тут  $k_* = \min\{k_1; k_2\}$ , а  $D_* = \max\{D_1; D_2\}$  для розглядуваних шарів фільтра.

Тоді отримаємо

$$\frac{\partial c_1(\tau, \vec{\xi})}{\partial \tau} = d\Delta_{\xi} c_1(\tau, \vec{\xi}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\xi} c_1(\tau, \vec{\xi}) - ac_1(\tau, \vec{\xi}), \quad \frac{\partial c_2(\tau, \vec{\xi})}{\partial \tau} = ac_1(\tau, \vec{\xi}), \quad (5)$$

де  $d = D/D_*$ ,  $\vec{v} = (k_*D_*)^{1/2} \vec{v}_r$ ,  $a = k/k_*$  — безрозмірні коефіцієнти. При цьому сумарний потік у безрозмірній формі буде

$$\vec{J} = -d\vec{\nabla}_{\xi} c_1 + \vec{v} c_1. \quad (6)$$

## 2. Контактно-крайова задача конвективної дифузії

Розглянемо шар безрозмірної товщини  $\xi_*$ , який складається з двох шарів товщин  $\xi'$  та  $\delta\xi$  ( $\delta\xi = \xi_* - \xi'$ ) відповідно (рис. 1). Система декартових координат вибрана так, щоб вісь  $O\xi$  була перпендикулярна до поверхонь шару з початком відліку на верхній границі та спрямована вглиб тіла. Вважаємо, що на верхній і нижній поверхнях тіла відомі сталі значення концентрації домішки

$$c_1^{(1)}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=0} = c_0 \equiv \text{const}, \quad c_1^{(2)}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=\xi_*} = c_* \equiv \text{const}. \quad (7)$$

Також приймаємо, що в початковий момент часу

$$c_1^{(j)}(\tau, \xi) \Big|_{\tau=0} = c_2^{(j)}(\tau, \xi) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (8)$$

Тут  $j$  — номер шару фільтра:  $j = 1$  — для  $\Omega_1 = ]0; \xi'[, j = 2$  — для  $\Omega_2 = ]\xi'; \xi_*[$ .

У випадку одновимірної (вертикальної) конвективної дифузії масоперенесення домішок описують такі системи рівнянь

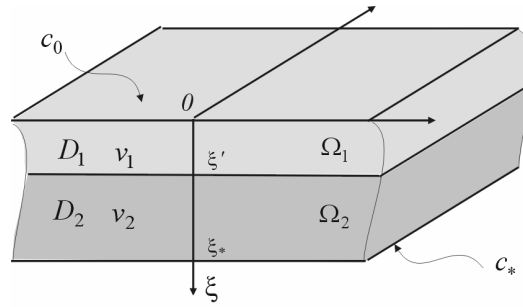


Рис. 1. Двошарове тіло, в якому мігрує домішкова речовина

$$\frac{\partial c_1^{(j)}(\tau, \xi)}{\partial \tau} = d_j \frac{\partial^2 c_1^{(j)}(\tau, \xi)}{\partial \xi^2} - v_j \frac{\partial c_1^{(j)}(\tau, \xi)}{\partial \xi} - a_j c_1^{(j)}(\tau, \xi),$$

$$\frac{\partial c_2^{(j)}(\tau, \xi)}{\partial \tau} = a_j c_1^{(j)}(\tau, \xi), \quad \xi \in \Omega_j \quad (j=1;2), \quad (9)$$

де  $d_j = D_j/D_*$ ,  $v_j = (k_* D_*)^{1/2} v_j$ ,  $a_j = k_j/k_*$ . Зауважимо, що  $v_j = v_r/\kappa_j$ ,  $\kappa_j$  — пористість  $j$ -го шару.

На границі контакту  $\xi = \xi'$  виконується умова рівностей хімічних потенціалів і сумарних потоків маси, які запишемо вигляді

$$\lambda c_1^{(1)}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=\xi'} = c_1^{(2)}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=\xi'}; \quad (10)$$

$$d_1 \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi} - v_1 c_1^{(1)} \Big|_{\xi=\xi'} = d_2 \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \xi} - v_2 c_1^{(2)} \Big|_{\xi=\xi'}, \quad (11)$$

де  $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$  — відношення коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів у станах 1 і 2.

### 3. Схема розв'язування задачі

Значимо, що можемо проінтегрувати другі рівняння систем (9). З урахуванням початкових умов маємо

$$c_2^{(j)}(\tau, \xi) = a_j \int_0^\tau c_1^{(j)}(\tau', \xi) d\tau'. \quad (12)$$

Розв'язок контактної-крайової задачі (7)-(11) будемо шукати з допомогою інтегральних перетворень за просторовою змінною окремо в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  [4]. Для того, щоб застосувати перетворення за змінною  $\xi$ , необхідно знати величину відповідних функцій (або їхніх похідних) на границях області перетворення [5]. Тому на поверхні  $\xi = \xi'$  доозначимо шукані функції з допомогою першої контактної умови (10), тобто прийнемо, що функції  $\lambda c_1^{(1)}$  та  $c_1^{(2)}$  є рівні між собою і дорівнюють деякій функції часу  $g(\tau)$

$$\lambda c_1^{(1)}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=\xi'} = c_1^{(2)}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=\xi'} = g(\tau, \xi') \equiv g(\tau). \quad (13)$$

Тепер можемо виконати інтегральні перетворення за змінною  $\xi$  в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$ . Враховуючи вигляд операторів у перших рівняннях систем (9)

$$L_j \equiv d_j \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - v_j \frac{\partial}{\partial \xi},$$

а також те, що задано граничні умови 1-го роду, в області  $\Omega_1$  застосуємо таке скінченне інтегральне перетворення [6]

$$\bar{c}_1(n, \tau) = \int_0^{\xi'} c_1^{(1)}(\xi, \tau) e^{-\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \sin(y_n \xi) d\xi; \quad (14a)$$

$$c_1^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{2}{\xi'} e^{\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_1(y_n \xi), \quad y_n = n\pi/\xi', \quad n=1, 2, \dots. \quad (14b)$$

Застосуємо перетворення (14a) до виразу  $d_1 \frac{\partial^2 c_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - v_1 \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi}$ . Інтегруючи частинами та враховуючи граничні умови (7), (13), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi'} \left[ d_1 \frac{\partial^2 c_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - v_1 \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi} \right] e^{-\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \sin(y_n \xi) d\xi &= -d_1 y_n e^{-\frac{v_1 \xi}{2d_1}} c_1^{(1)} \cos(y_n \xi) \Big|_0^{\xi'} - \\ &- d_1 y_n^2 \int_0^{\xi'} c_1^{(1)} e^{-\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \sin(y_n \xi) d\xi = d_1 y_n c_0 - \frac{(-1)^n}{\lambda} g(\tau) e^{-\frac{v_1 \xi'}{2d_1}} - d_1 y_n^2 \bar{c}_1(n, \tau). \end{aligned}$$

Тоді крайова задача в зображеннях в області  $\Omega_1$  набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}_1}{dt} &= -(d_1 y_n^2 + a_1) \bar{c}_1 + d_1 y_n c_0 - d_1 y_n \frac{(-1)^n}{\lambda} g(\tau) e^{-\frac{v_1 \xi'}{2d_1}}, \\ \bar{c}_1(n, \tau) \Big|_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Її розв'язок має вигляд [7]

$$\bar{c}_1(n, \tau) = e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)\tau} \int_0^{\tau} d_1 y_n^2 \left[ c_0 - \frac{(-1)^n}{\lambda} g(\tau') \exp\left\{-\frac{v_1 \xi'}{2d_1}\right\} \right] e^{(d_1 y_n^2 + a_1)\tau'} d\tau'. \quad (16)$$

Тепер розглянемо крайову задачу конвективної дифузії в області  $\Omega_2$ . Введемо скінченне інтегральне перетворення за змінною  $\xi$  таким чином

$$\bar{c}_2(m, \tau) = \int_{\xi'}^{\xi_*} c_1^{(2)}(\xi, \tau) e^{-\frac{v_2(\xi-\xi')}{2d_2}} \sin[y_m(\xi-\xi')] d\xi, \quad m=1, 2, \dots; \quad (17a)$$

де  $y_m = m\pi/(\delta\xi)$ . Отримаємо формулу оберненого перетворення до (17a). Для цього зробимо заміну змінних  $r = \xi - \xi'$ . Тоді одержимо

$$\bar{c}_2(m, \tau) = \int_0^{\delta\xi} c_1^{(2)}(r + \xi', \tau) e^{-\frac{v_2 r}{2d_2}} \sin(y_m r) dr, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для такого перетворення обернений перехід здійснюється згідно формули (14б)

$$c_1^{(2)}(r + \xi', \tau) = \frac{2}{\delta\xi} e^{\frac{v_2 r}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_2(m, \tau) \sin(y_m r).$$

Вертаючись до змінної  $\xi$ , остаточно отримаємо

$$c_1^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{2}{\delta\xi} e^{\frac{v_2(\xi-\xi')}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_2(m, \tau) \sin[y_m(\xi-\xi')]. \quad (176)$$

Тепер застосуємо перетворення (17) до виразу  $d_2 \frac{\partial^2 c_1^{(2)}}{\partial \xi^2} - v_2 \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \xi}$ . Маємо

$$\begin{aligned} & \int_{\xi'}^{\delta\xi} \left[ d_2 \frac{\partial^2 c_1^{(2)}}{\partial \xi^2} - v_2 \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \xi} \right] e^{-\frac{v_2(\xi-\xi')}{2d_2}} \sin[y_m(\xi-\xi')] d\xi = \\ & = -d_2 y_m e^{-\frac{v_2(\xi-\xi')}{2d_2}} c_1^{(2)} \cos y_m [(\xi-\xi')] \Big|_{\xi'}^{\xi_*} - d_2 y_m^2 \int_{\xi'}^{\xi_*} c_1^{(2)} e^{-\frac{v_2(\xi-\xi')}{2d_2}} \sin[y_m(\xi-\xi')] d\xi = \\ & = d_2 y_m g(\tau) - d_2 y_m^2 (-1)^m c_* e^{-\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2}} - d_2 y_m^2 \bar{c}_2(m, \tau). \end{aligned}$$

Тоді крайова задача в зображеннях в області  $\Omega_2$  набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}_2}{d\tau} &= -\left(d_2 y_m^2 + a_2\right) \bar{c}_2 + d_2 y_m \left[ g(\tau) - (-1)^m c_* e^{-\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2}} \right], \\ \bar{c}_2(m, \tau) \Big|_{\tau=0} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

розв'язок якої знаходимо у вигляді [7]

$$\bar{c}_2(m, \tau) = e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)\tau} \int_0^{\tau} d_2 y_m^2 \left[ g(\tau') - (-1)^m c_* e^{-\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2}} \right] e^{(d_2 y_m^2 + a_2)\tau'} d\tau'. \quad (19)$$

У співвідношеннях (16) і (19) функція  $g(\tau')$  є невідомою. Шукатимемо її з другої контактної умови рівності потоків маси на границі розділу областей (11). Після виконання обернених перетворень (14б) і (17б) виразів (16) і (19) відповідно, підставляємо формули для концентрацій та їхніх похідних у точці  $\xi = \xi'$  у співвідношення (11). Одержимо рівняння

$$d_1 \int_0^{\tau} \frac{2d_1}{\xi'} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 \left\{ (-1)^n e^{\frac{v_1 \xi'}{2d_1}} c_0 - \frac{g(\tau')}{\lambda} \right\} e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(\tau-\tau')} d\tau' =$$

$$= d_2 \int_0^\tau \frac{2d_2}{\delta\xi} \sum_{m=1}^{\infty} y_m^2 \left\{ (-1)^m g(\tau') - c_* e^{-\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2}} \right\} e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau - \tau')} d\tau', \quad (20)$$

яке розв'язуємо відносно функції  $g(\tau')$ . Зауважимо, що інтегральне рівняння (20)

має неєдиний розв'язок, оскільки існують такі функції  $F(\tau')$ , що  $\int_0^\tau F(\tau') d\tau' = 0$ .

У той же час, розв'язок вихідної задачі є єдиним, незалежно від способу розв'язування рівняння (20), оскільки функція  $g(\tau')$  у співвідношеннях (16) і (19) є тільки під знаком інтеграла за змінною  $\tau'$ .

У результаті отримуємо вираз для функції  $g(\tau')$

$$g(\tau') = \frac{A_1 c_0 e^{\frac{v_1 \xi'}{2d_1} \Sigma_n^-} + A_2 c_* e^{-\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2} \Sigma_m^+}}{A_1 \lambda^{-1} \Sigma_n^+ + A_2 \Sigma_m^-}, \quad (21)$$

де  $A_1 = 2d_1^2 / \xi'$ ,  $A_2 = 2d_2^2 / \delta\xi$ ;  $\Sigma_n^\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n y_n^2 e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(\tau - \tau')}$ ,

$\Sigma_m^\pm = \sum_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^m y_m^2 e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau - \tau')}$ .

У підсумку для концентрації домішкової речовини знайдемо

$$c_1^{(1)} = c_0 e^{\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \left\{ \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi' - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} - \frac{2d_1}{\xi'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n \xi)}{d_1 y_n^2 + a_1} e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)\tau} \right\} - \frac{2d_1}{\lambda \xi'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \sin(y_n \xi) \int_0^\tau g(\tau') e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(\tau - \tau')} d\tau'; \quad (22a)$$

$$c_1^{(2)} = c_* e^{-\frac{v_2(\xi - \xi')}{2d_2}} \left\{ \frac{\text{sh}[\eta_2(\xi - \xi')]}{\text{sh}(\eta_2 \delta\xi)} - \frac{2d_2}{\delta\xi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin[y_m(\xi - \xi')]}{d_2 y_m^2 + a_2} e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)\tau} \right\} - \frac{2d_2}{\delta\xi} e^{-\frac{v_2(\xi - \xi')}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin[y_m(\xi - \xi')] \int_0^\tau g(\tau') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau - \tau')} d\tau'. \quad (22б)$$

Тут  $\eta_j = \sqrt{a_j / d_j}$  ( $j = 1; 2$ ).

Зауважимо, що розв'язки (22a) і (22б) мають однакову структуру. Два доданки у цих виразах залежать тільки від характеристик відповідного шару, а одна інтегральна складова враховує вплив параметрів контактуючої області й умов контакту.

Залежності концентрації домішкової речовини, що мігрує у конвективно рухомому розчині, від параметрів середовища проілюстровані на рис. 2-7. При цьому прийнято такі значення параметрів:  $d_1 = 1$ ;  $d_2 = 0,01$ ;  $v_1 = 1$ ;  $v_2 = 0,01$ ;  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 10$ ;  $c_0 = 1$ ;  $c_* = 0$ ;  $\lambda = 2$ ;  $\xi' = 0,5$ ;  $\xi_* = 1$ ;  $\tau = 1$ .

Проведений числовий аналіз показує, що коли коефіцієнт дифузії є більшим у першому шарі, то у другому — відбувається зростання концентрації в околі границі контакту. У протилежному випадку наявне суттєве збільшення концентрації у першому шарі (див. рис. 2).

Загалом, для  $d_1 < d_2$  з часом концентрація домішки в обох шарах зростає до виходу на усталений режим. У випадку  $d_1 > d_2$  для малих часових проміжків характерна наявність двох локальних максимумів в околі границі контакту. У першому шарі з часом концентрація зростає всередині області, локальний максимум зменшується і функція концентрації поступово набуває монотонно спадного характеру (стаціонарний режим). Водночас у другому шарі приконтатний максимум концентрації спочатку зростає, а потім зменшується і зсувається вглиб області.

Рис. 2. Розподіли концентрацій для різних значень коефіцієнтів дифузії. Криві 1-3 відповідають  $d_1 = 1$ ;  $d_2 = 10^{-3}$ ;  $10^{-2}$ ;  $0,1$ ; 4-6 —  $d_1 = 0,1$ ;  $10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $d_2 = 1$

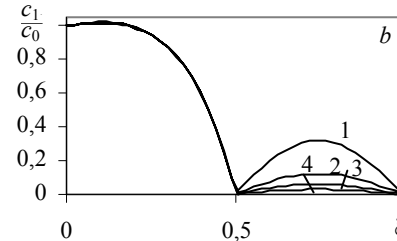
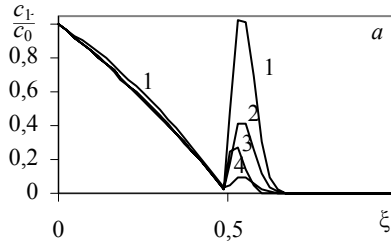
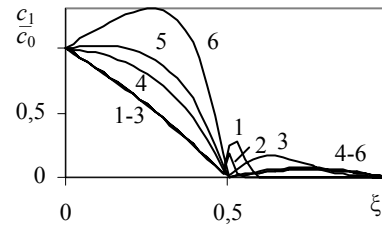


Рис. 3. Розподіли концентрацій для різних значень коефіцієнта  $\lambda$  (рис. a —  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 10^{-2}$ ; рис. b —  $d_1 = 10^{-2}$ ,  $d_2 = 1$ ). Криві 1-4 відповідають значенням  $\lambda = 5$ ;  $2$ ;  $1$ ;  $0,5$

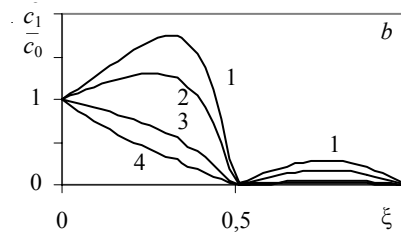
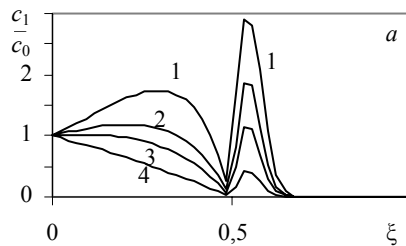


Рис. 4. Розподіли концентрацій для різних значень швидкості конвективного перенесення в першому шарі при  $v_2 = 1$  (рис. a —  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 10^{-2}$ ; рис. b —  $d_1 = 10^{-2}$ ,  $d_2 = 1$ ). Криві 1-4 відповідають значенням  $v_1 = 10$ ;  $5$ ;  $0,5$ ;  $0,1$



Коефіцієнт  $\lambda$ , який відображає стрибок функції концентрації на границі контакту, може істотно (в декілька разів) збільшувати локальний максимум концентрації в околі цієї межі для  $d_1 > d_2$  (рис. 3a) чи всередині другого шару для  $d_1 < d_2$  (рис. 3b). Зміна коефіцієнтів конвективного перенесення може призводити до якісних і кількісних змін у розподілах концентрації частинок домішки (рис. 4). Наприклад, якщо  $d_1 > d_2$ , то зі зростанням різниці між коефіцієнтами конвективного перенесення у двох шарах істотно збільшуються приконтатні максимуми концентрації (рис. 4a). Зазначимо, що числові розрахунки проводилися для значень безрозмірних коефіцієнтів конвективного перенесення, співвимірних із безрозмірними коефіцієнтами дифузії. Також зауважимо, що зі зростанням коефіцієнтів інтенсивності сорбційних процесів суттєво зменшується концентрація частинок домішкової речовини у конвективно рухомому розчині в обох шарах фільтра.

#### 4. Потоки домішкової речовини

Одержання аналітичних виразів для концентрації домішкової речовини, що мігрує у двошаровому тілі, з урахуванням конвективного механізму масоперенесення та сорбційних процесів дає змогу визначити потоки маси забруднюючої речовини  $J_j$  в області  $\Omega_j$  ( $j = 1; 2$ ) через поверхню  $\xi = \bar{\xi}$  [3].

За урахування співвідношення (6) в одновимірному випадку для  $j$ -го шару маємо

$$J_j(\tau)\Big|_{\xi=\bar{\xi}} = -d_j \frac{\partial c_1^{(j)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} + v_j c_1^{(j)}(\xi, \tau)\Big|_{\xi=\bar{\xi}}, \quad j = 1; 2. \quad (23)$$

Підставляючи у формулу (23) вирази для концентрацій (22), отримаємо потоки в області  $\Omega_1$

$$\begin{aligned} J_1(\tau)\Big|_{\xi=\bar{\xi}} = & c_0 e^{\frac{v_1 \bar{\xi}}{2d_1}} \left[ \frac{1}{2} v_1 \left\{ \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi' - \bar{\xi})]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} - \frac{2d_1}{\xi'} e^{-a_1 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n \bar{\xi})}{d_1 y_n^2 + a_1} e^{-d_1 y_n^2 \tau} \right\} + \right. \\ & + \eta_1 d_1 \left. \frac{\text{ch}[\eta_1(\xi' - \bar{\xi})]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} + \frac{2}{\xi'} d_1^2 e^{-a_1 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2 \cos(y_n \bar{\xi})}{d_1 y_n^2 + a_1} e^{-d_1 y_n^2 \tau} \right] - \\ & - \frac{2d_1}{\lambda \xi'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \left[ v_1 \sin(y_n \bar{\xi}) + d_1 y_n \cos(y_n \bar{\xi}) \right] \int_0^{\tau} g(\tau') e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(\tau - \tau')} d\tau' \quad (24a) \end{aligned}$$

та в області  $\Omega_2$

$$J_2(\tau)\Big|_{\xi=\bar{\xi}} = c_* e^{-\frac{v_2(\xi_* - \bar{\xi})}{2d_2}} \left\{ \frac{3}{2} v_2 \left[ \frac{\text{sh}[\eta_2(\bar{\xi} - \xi')]}{\text{sh}(\eta_2 \delta \xi)} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2d_2}{\delta\xi} e^{-a_2\tau} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin[y_m(\bar{\xi} - \xi')]}{d_2 y_m^2 + a_2} e^{-d_2 y_m^2 \tau} \left[ -\eta_2 d_2 \frac{\text{ch}[\eta_2(\bar{\xi} - \xi')]}{\text{sh}(\eta_2 \delta\xi)} + \right. \\
 & \left. + \frac{2d_2^2}{\delta\xi} e^{-a_2\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m^2 \cos[y_m(\bar{\xi} - \xi')]}{d_2 y_m^2 + a_2} e^{-d_2 y_m^2 \tau} \right] - \frac{2d_2}{\delta\xi} e^{\frac{v_2(\bar{\xi} - \xi')}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{2} v_2 \sin[y_m(\bar{\xi} - \xi')] + d_2 y_m \cos[y_m(\bar{\xi} - \xi')] \right\} \int_0^{\tau} g(\tau') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau - \tau')} d\tau'. \quad (24б)
 \end{aligned}$$

З формул (7), (23) та (24) можна визначити потоки маси через зовнішні гра-  
ниці тіла:

потік через поверхню  $\xi = 0$

$$\begin{aligned}
 J_1(\tau) \Big|_{\xi=0} &= -d_1 \frac{\partial c_1^{(1)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + v_1 c_0 = \\
 &= c_0 \left[ \frac{1}{2} v_1 + \eta_1 d_1 \text{cth}(\eta_1 \xi') + \frac{2}{\xi'} d_1^2 e^{-a_1 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2}{d_1 y_n^2 + a_1} e^{-d_1 y_n^2 \tau} \right] - \\
 & - \frac{2d_1^2}{\lambda \xi'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n^2 \int_0^{\tau} g(\tau') e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(\tau - \tau')} d\tau';
 \end{aligned}$$

потік через поверхню  $\xi = \xi_*$

$$\begin{aligned}
 J_2(\tau) \Big|_{\xi=\xi_*} &= -d_2 \frac{\partial c_1^{(2)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_*} + v_2 c_* = \\
 &= c_* \left[ \frac{3}{2} v_2 - \eta_2 d_2 \text{cth}(\eta_2 \delta\xi) + \frac{2}{\delta\xi} d_2^2 e^{-a_2 \tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m y_m^2}{d_2 y_m^2 + a_2} e^{-d_2 y_m^2 \tau} \right] - \\
 & - \frac{2d_2^2}{\delta\xi} e^{\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m y_m^2 \int_0^{\tau} g(\tau') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau - \tau')} d\tau',
 \end{aligned}$$

у тому числі при  $c_* = 0$

$$J_2(\tau) \Big|_{\xi=\xi_*} = -d_2 \frac{\partial c_1^{(2)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_*} = -\frac{2d_2^2}{\delta\xi} e^{\frac{v_2 \delta\xi}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m y_m^2 \int_0^{\tau} g(\tau') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau - \tau')} d\tau',$$

де функція  $g(\tau')$  набуде вигляду

$$g(\tau') = e^{\frac{v_1 \xi'}{2d_1}} \frac{c_0 \Sigma_n^-}{\lambda^{-1} \Sigma_n^+ + \frac{d_2^2 \xi'}{d_1^2 \delta\xi} \Sigma_m^-}.$$

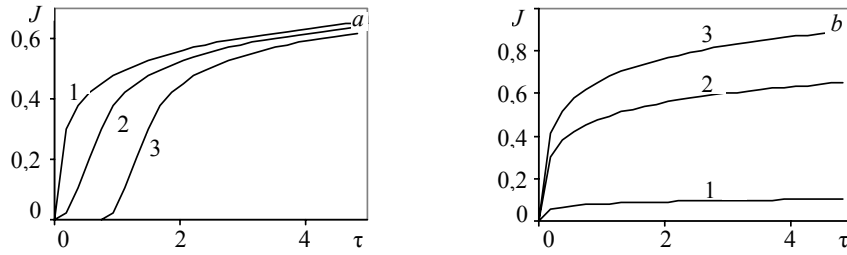


Рис. 5. Розподіли потоків домішки через поверхню  $\bar{\xi} = 0,25$  для різних значень коефіцієнтів дифузії  $d_1$  (рис. а —  $d_1 = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}, d_2 = 1$ ) та швидкості конвективного перенесення  $v_1$  (рис. б —  $v_1 = 0,1; 5; 10, d_1 = 10^{-2}$ )

Зазначимо, що потік через поверхню контакту з урахуванням співвідношення (13) можна подати таким чином

$$J_{\xi'}(\tau) = -d_1 \left. \frac{\partial c_1^{(1)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi'} + \frac{v_1}{\lambda} g(\tau) = -d_2 \left. \frac{\partial c_1^{(2)}(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi'} + v_2 g(\tau).$$

Криві на рис. 5 ілюструють розподіли потоків маси домішкової речовини через поверхню  $\bar{\xi} = 0,25$  (серединна поверхня шару  $\Omega_1$ ) за різних значень відношення коефіцієнтів дифузії та швидкості конвективного перенесення у ньому.

### 5. Концентрація сорбованої домішки та довговічність роботи фільтра

Для визначення концентрації частинок, сорбованих на скелеті фільтра, підставимо вирази (22) для концентрації домішки у розчині у відповідні співвідношення (12). Тоді маємо

$$\begin{aligned} c_2^{(1)} &= c_0 e^{\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \left\{ \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi' - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} \tau + \frac{\xi'}{2\eta_1 d_1} \left[ \frac{\text{sh}(\eta_1 \xi)}{[\text{sh}(\eta_1 \xi')]^2} + \left(1 + \frac{\xi}{\xi'}\right) \frac{\text{ch}[\eta_1(\xi' - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} \right] \right\} + \\ c_2^{(1)} &= c_0 e^{\frac{v_1 \xi}{2d_1}} \left\{ \frac{\text{sh}[\eta_1(\xi' - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} \tau + \frac{\xi'}{2\eta_1 d_1} \left[ \frac{\text{sh}(\eta_1 \xi)}{[\text{sh}(\eta_1 \xi')]^2} + \left(1 + \frac{\xi}{\xi'}\right) \frac{\text{ch}[\eta_1(\xi' - \xi)]}{\text{sh}(\eta_1 \xi')} \right] \right\} + \\ &+ \frac{2d_1}{\xi'} e^{-a_1 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n \xi)}{(d_1 y_n^2 + a_1)^2} e^{-d_1 y_n^2 \tau} \left\{ - \right. \\ &\left. - \frac{2d_1}{\lambda \xi'} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \sin(y_n \xi) \int_0^{\tau} \int_0^{\tau'} g(\tau'') e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(\tau' - \tau'')} d\tau'' d\tau' \right\}; \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned}
 c_2^{(2)} = c_* e^{-\frac{v_2(\xi_* - \xi)}{2d_2}} & \left\{ \frac{\text{sh}[\eta_2(\xi - \xi')]}{\text{sh}(\eta_2 \delta \xi)} \tau + \frac{\delta \xi}{2\eta_2 d_2} \left[ \frac{\text{sh}[\eta_2(\delta \xi + \xi - \xi')]}{[\text{sh}(\eta_2 \delta \xi)]^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 + \frac{\xi - \xi'}{\delta \xi} \right) \frac{\text{ch}[\eta_2(\xi - \xi')]}{\text{sh}(\eta_2 \delta \xi)} \right] + \frac{2d_2}{\delta \xi} e^{-a_2 \tau} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin[y_m(\xi - \xi')]}{(d_2 y_m^2 + a_2)^2} e^{-d_2 y_m^2 \tau} \right\} - \\
 & - \frac{2d_2}{\delta \xi} e^{-\frac{v_2(\xi_* - \xi')}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin[y_m(\xi - \xi')] \int_0^{\tau} \int_0^{\tau'} g(\tau'') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau' - \tau'')} d\tau'' d\tau'. \quad (25b)
 \end{aligned}$$

Зазначимо, що концентрація сорбованої домішки як у першому, так і у другому шарах фільтра містить складові, прямопропорційні часовій змінній  $\tau$ . Така ситуація характерна за умови безмежної сорбційної здатності скелета.

У той же час, якщо відоме максимальне значення концентрації частинок домішкової речовини, спроможної адсорбуватися скелетом тіла, то можна проаналізувати довговічність роботи фільтра. Зокрема, за умови  $a_1 \ll a_2$  знайдемо час насичення  $\tau_*$ , як розв'язок нелінійного рівняння

$$\sup_{\xi \in \Omega_2} c_2^{(2)}(\xi, \tau_*) = N_2, \quad (26)$$

де  $N_2$  — максимальна концентрація частинок домішки, здатних адсорбуватися на скелеті. Рівняння (26) розв'язуємо, наприклад, методом Ньютона, записуючи похідну через скінченні різниці

$$\tau_{i+1} = \tau_i - \frac{f(\tau_i)(\tau_i - \tau_{i-1})}{f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

де

$$\begin{aligned}
 f(\tau) = & \frac{\xi' - \xi - \delta \xi}{2\eta_2 d_2} + \frac{\text{sh}(\eta_2 \delta \xi)}{\text{sh}[\eta_2(\xi - \xi')]} \left\{ -\frac{\delta \xi}{2\eta_2 d_2} \frac{\text{sh}[\eta_2(\delta \xi + \xi - \xi')]}{[\text{sh}(\eta_2 \delta \xi)]^2} - \right. \\
 & - \frac{2d_2}{\delta \xi} e^{-a_2 \tau} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin[y_m(\xi - \xi')]}{(d_2 y_m^2 + a_2)^2} e^{-d_2 y_m^2 \tau} + \frac{1}{c_*} e^{-\frac{v_2(\xi_* - \xi)}{2d_2}} \left[ N_2 + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2d_2}{\delta \xi} e^{-\frac{v_2(\xi_* - \xi')}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin[y_m(\xi - \xi')] \int_0^{\tau} \int_0^{\tau'} g(\tau'') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(\tau' - \tau'')} d\tau'' d\tau' \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

**Висновки.** Таким чином, раніше розвинений метод побудови точних розв'язків контактно-крайових задач дифузії, який базується на застосуванні інтегральних перетворень за просторовими змінними в контактуючих областях, узагальнено на випадок врахування конвективного механізму масоперенесення та сорбційних процесів. Побудовані аналітичні розв'язки задачі конвективної дифузії для двошарового фільтра

дають змогу аналізувати розподіли концентрацій дифундуючої речовини у кожному з елементів структури, визначати потоки маси домішкових частинок та час насичення забруднюючою субстанцією фільтра, а тим самим — час його заміни.

### Література

- [1] Журба М. Г. Основы процессов доочистки сточных вод фильтрованием / В сб.: Доочистка сточных вод. — Кишинев: Молдагропромреклама, 1990. — С. 4-38.
- [2] Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Сівак В. М. Комп'ютерне моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах // Вісник Нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. — Вип. 4(32). — Рівне: НУВГП. — 2005. — С. 164-169.
- [3] Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛОМ, 2003. — 128 с.
- [4] Фізико-математичне моделювання складних систем / Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
- [5] Снеддон И. Преобразования Фурье. — М.: Изд-во иностр. литературы, 1955. — 667 с.
- [6] Мартыненко Н. А., Пустыльников Л. М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1985. — 304 с.
- [7] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

## Diffusion-Advection Processes Allowing for Sorption in a Two-Layered Filter

Viktor Sivak, Evgen Chaplia, Olha Chernukha

*A contact initial-boundary value problem is considered for advective diffusion in a filter consisting of two distinct porosity two layers saturated by water solution. On the external body surfaces the values of pollution concentration are given (that agrees with existing capabilities in valid control) and on the internal surface of layer contact the conditions of non-ideal mass contact are imposed. In the basic equations it is taken into account admixture sorption on a skeleton of porous material, which is described in the linearized variant. For constructing analytical solutions of the formulated contact initial-boundary value problems of advective diffusion the method based on application of integral transformations separately in contacting regions is generalized. The analytical expressions for determining admixture concentration in each of structural elements are found as well as mass fluxes that takes the opportunity to propose a scheme for evaluating time of two-layered filter saturation by polluting substance and to analyze its dependence on physical-chemical material properties and geometrical parameters.*

## Процессы диффузии-конвекции с учетом сорбции в двухслойном фильтре

Виктор Сивак, Евгений Чапля, Ольга Чернуха

*Рассмотрена контактно-краевая задача конвективной диффузии для фильтра, состоящего из двух слоев различной пористости, насыщенных водным раствором. На внешних поверхностях заданы значения концентрации загрязняющего вещества (что соответствует*

*существующим возможностям достоверного контроля), а на внутренней поверхности контакта слоев — условия неидеального массового контакта. В исходных уравнениях учитывается сорбция примесей на скелете пористого материала, которая описывается в линеаризованном варианте. Для построения аналитических решений сформулированной задачи конвективной диффузии обобщен метод, базирующийся на использовании интегральных преобразований отдельно в контактирующих областях. Получены аналитические выражения для определения концентрации примеси в каждом структурном элементе и потоков массы, что дало возможность предложить схему определения времени насыщения загрязняющим веществом двухслойного фильтра и исследовать его зависимость от физико-химических свойств материала и геометрических параметров.*

Отримано 06.11.06