

Математична модель термомеханіки ідеальної рідини

Олександр Гачкевич¹, Михайло Солодяк²

¹ д. ф.-м. н., професор, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, Україна, e-mail: dept3@iapmm.lviv.ua, Політехніка Опольська, вул. Любошицька, 3, Ополь, Польща, e-mail: garlu@po.opole.pl

² к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, e-mail: dept3@iapmm.lviv.ua

На основі інтегрування відомих виразів для теплових і механічних характеристик середовища (ідеальної рідини) як функцій вибраних параметрів стану (у довільних заданих інтервалах зміни цих параметрів) встановлено структуру термодинамічних функцій, рівнянь стану та балансу теплової енергії (рівняння теплопровідності). З використанням структури цих виразів, термодинаміки станів і процесів, а також механіки суцільних середовищ побудовано математичну модель термомеханіки ідеальної рідини за відсутності умови малості відхилень термодинамічних параметрів від рівноважних і вихідних виразів для термодинамічних потенціалів.

Ключові слова: взаємозв'язані термомеханічні процеси, ідеальна рідина, формалізм нерівноважної термодинаміки.

Вступ. У літературі [1-5] відомо достатньо багато робіт, які присвячені розробці математичних моделей опису у взаємозв'язку механічних і теплових процесів у рідинах. У більшості таких моделей характеристики середовища приймаються сталими.

Одним із найважливіших питань при побудові згаданих моделей є знаходження термодинамічних потенціалів, необхідних для отримання матеріальних рівнянь (залежностей між вибраними параметрами стану) і конкретних числових значень фізико-механічних характеристик матеріалу. Можна виділити два основних підходи до побудови термодинамічних потенціалів:

- записують явний вираз потенціалів, що базуються на розгляді конкретної фізичної моделі будови тіла;
- застосовують розвинення виразу для термодинамічного потенціалу системи як аналітичної функції параметрів стану в околі розглядуваного рівноважного стану у вигляді степеневого ряду за відхиленнями параметрів від рівноважних при обмеженні (у разі малих відхилень від вихідного стану) певною кількістю членів ряду (здебільшого до квадратичних, із метою отримання лінійних рівнянь стану) та подальшою конкретизацією коефіцієнтів у цьому розвиненні.

Перший підхід характерний для фізики твердого тіла й обмежується незначною кількістю моделей. Другий підхід дозволяє отримати відносно просте та зрозуміле формулювання лінійних рівнянь стану для задач термомеханіки. Проте він має суттєві недоліки, а саме:

- розвинення за малими відхиленнями від рівноважного стану не є ефективним, якщо значення параметра в рівноважному стані є малим;
- термодинамічні потенціали (функції) будуються з точністю до адитивних сталих для кожного матеріалу, що створює проблеми при формулюванні умов контакту між тілами з різних матеріалів.

У цій роботі при побудові математичної моделі кількісного опису термомеханічних процесів в ідеальній рідині будемо виходити з відомих виразів для характеристик матеріалу, на основі яких, із врахуванням термодинамічного формалізму (з використанням виразів для функцій стану через часткові похідні від термодинамічних функцій), шляхом інтегрування виразів для характеристик у довільних заданих інтервалах зміни параметрів стану, встановлено структуру термодинамічних функцій (ентропії, внутрішньої енергії тощо), рівняння стану та балансу теплової енергії (рівняння теплопровідності). Це дозволило побудувати варіант теорії термомеханіки за відсутності обмежень на малість відхилень вибраних параметрів термодинамічних процесів від рівноважних без отримання на основі фізики твердого тіла, статистичної фізики чи трудомістких експериментальних досліджень виразів для відповідних термодинамічних потенціалів.

1. Вихідні співвідношення термомеханіки ідеальних рідин

Для опису термомеханічної поведінки рідини скористаємося підходом Ейлера [6]. Нехай деформівна рідина займає об'єм V , обмежений гладкою поверхнею Σ , і в початковий момент часу $t = 0$ перебуває в природному (ненавантаженому) стані. Введемо в розгляд прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) . Довільній точці P із координатами x_α ($\alpha = \overline{1,3}$) ставимо у відповідність радіус-вектор \vec{r} . Рух рідини визначаємо шляхом задання поля швидкостей рідини в просторі у кожний момент часу, тобто

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t).$$

Приймаємо, що всі величини φ , які описують рух рідини у вибраному об'ємі V , а саме — густина маси ρ , тиск p , температура T та інші, є функціями змінних Ейлера \vec{r} , t , тобто $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$.

При описі руху середовищ використовують закони збереження (маси, імпульсу та енергії), які виражають фундаментальне положення фізики: зміна в часі будь-якої величини, розподіленої у фіксованій області (V), спричиняється потоком цієї величини через його поверхню та наявністю джерел чи стоків цієї величини у цій області [2, 4, 7].

Закон збереження маси речовини, яку означають інтегралом

$$m = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV,$$

у припущенні, що в довільній фіксованій області (V) маса не виробляється, в інтегральній формі має вигляд [2, 7]

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0. \quad (1)$$

Тут \vec{n} — одинична зовнішня нормаль до поверхні Σ , крапка між векторами означає їх скалярний добуток. Використовуючи відомий у літературі підхід, а саме перетворюючи в (1) поверхневий інтеграл на об'ємний за теоремою Гаусса-Остроградського та враховуючи, що підобласть V довільна, отримаємо

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Тут і надалі [6]

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varphi \quad (3)$$

— повна похідна, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ — локальна похідна, зумовлена зміною поля $\varphi(\vec{r}, t)$ за часом, $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \varphi$ — конвективна складова, зумовлена неоднорідністю поля φ , $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона.

Сформулюємо закон збереження імпульсу. Враховуючи, що відповідно до другого закону Ньютона для матеріального континууму, зміна за часом кількості руху речовини, яка міститься у довільному об'ємі V обмеженому поверхнею Σ , дорівнює сумі всіх масових сил \vec{F} і поверхневих зусиль \vec{f} [2], матимемо

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_{\Sigma} \vec{f} d\Sigma. \quad (4)$$

Зауважимо, що поверхневі зусилля \vec{f} — це сили тиску з розрахунку на одиницю площі з зовнішньою нормаллю \vec{n} . Для ідеальної (нев'язкої) рідини їх пов'язують із тиском p співвідношенням [1, 2]

$$\vec{f} = -p\vec{n}. \quad (5)$$

Аналогічно до рівняння (2) отримаємо аналітичний вираз закону збереження імпульсу в локальній формі, яке називають також законом руху або рівнянням Ейлера,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \quad (6)$$

Домноживши рівняння Ейлера (6) скалярно на \vec{v} , отримаємо рівняння балансу кінетичної енергії [2, 3, 7]

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) = \rho \bar{F} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} p. \quad (7)$$

У розглядуваному випадку зміна за часом повної енергії E тіла визначається потужністю масових сил \bar{F} і поверхневих зусиль \bar{f} та потоком тепла \bar{J}_Q , пов'язаним із тепловою формою руху, а також питомою потужністю джерел тепла w_Q (тепло, яке виробляється за одиницю часу в одиниці об'єму внутрішніми джерелами тепла).

Густина повної енергії E (із розрахунку на одиницю об'єму тіла) складається з густини внутрішньої u та кінетичної $\bar{v}^2/2$ енергій, тобто

$$E = \rho(u + \bar{v}^2/2).$$

Враховуючи це, закон збереження енергії для довільної підобласті V рідини запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(u + \bar{v}^2/2) dV = \int_V \rho \bar{F} \cdot \bar{v} dV + \int_{\Sigma} \bar{f} \cdot \bar{v} d\Sigma - \int_{\Sigma} \bar{J}_Q \cdot \bar{n} d\Sigma + \int_V w_Q dV.$$

Використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, а також співвідношення (5), отримаємо закон збереження повної енергії у локальній формі

$$\rho \frac{d}{dt} (u + \bar{v}^2/2) = \rho \bar{F} \cdot \bar{v} - \bar{\nabla} \cdot (p\bar{v}) - \bar{\nabla} \cdot \bar{J}_Q + w_Q. \quad (8)$$

Приймаючи до уваги рівняння балансу кінетичної енергії (7), а також рівняння балансу маси (2), співвідношення (8) можна звести до рівняння балансу внутрішньої енергії

$$\rho \frac{du}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{J}_Q + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + w_Q. \quad (9)$$

Другу складову у правій частині рівняння (9) інтерпретуватимемо як потужність елементарної роботи L , виконаної зовнішніми силами над системою, тобто

$$\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (10)$$

Рівняння балансу маси (2), імпульсу руху (6) та внутрішньої енергії (9) у проекціях на осі координат утворюють систему з п'яти рівнянь, тоді як введені польові параметри u , T , ρ , p , \bar{v} і \bar{J}_Q характеризуються десятьма невідомими компонентами. Співвідношення, які необхідні для доповнення системи рівнянь моделі, отримаємо з використанням методів термодинаміки. При цьому використаємо відомий термодинамічний формалізм побудови моделей опису взаємодії теплових процесів із процесами іншої природи при означених у класичній термомеханіці базових фізико-механічних і теплофізичних характеристиках середовища.

2. Рівняння стану та теплопровідності

У розглядуваній моделі ідеальної рідини основою побудови термодинамічних потенціалів є означення теплових і механічних характеристик матеріалу за вибраних параметрів стану. Інтегруючи ці функції у довільних вибраних інтервалах зміни параметрів стану, а також використовуючи основне рівняння термодинаміки та наслідки, що з нього випливають, отримуємо вирази термодинамічних потенціалів для ідеальної рідини.

Для знаходження термодинамічних потенціалів будемо виходити з основних законів термодинаміки [7-9]. Відповідно до першого закону (який є наслідком закону збереження енергії) існує функція параметрів стану — внутрішня енергія u , зміна якої du визначається кількістю теплоти δQ , переданої системі, та роботою δL , виконаною над системою зовнішніми силами, тобто

$$du = \delta Q + \delta L, \quad (11)$$

де величини u , Q і L віднесені до одиниці маси тіла. На відміну від внутрішньої енергії u , величини Q і L не є функціями стану, тобто диференціальні форми δQ і δL (потужність для якої задається формулою (10)) не є повними диференціалами.

Згідно з другим законом термодинаміки, що постулює існування функції стану — ентропії s , яка пов'язана з температурою співвідношенням [7-9]

$$ds = \delta Q / T,$$

з (11) отримаємо рівняння Гіббса [8]

$$du = Tds - pdv, \quad (12)$$

де $v = \rho^{-1}$ — питомий об'єм.

Приймемо гіпотезу локальної термодинамічної рівноваги, згідно якої будемо вважати, що фундаментальне рівняння Гіббса (12) виконується також у малих інтервалах зміни часу dt . Тоді воно набуває вигляду

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (13)$$

Таким чином, питома внутрішня енергія $u(s, v)$ є термодинамічним потенціалом. Величини T і p є спряженими параметрами відповідно до s і v . Співставляючи формули (9) і (13), отримаємо балансове рівняння для ентропії

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_Q + w_Q. \quad (14)$$

Приймемо, що вектор густини потоку тепла в середовищі є окреслений відповідним фізичним зв'язком, вигляд якого залежить головним чином від природи розглядуваної проблеми та можливості проведення відповідних експериментальних

досліджень. У задачах теплоперенесення зазвичай виходять із найпростішого вигляду такого зв'язку, а саме — закону Фур'є

$$\vec{J}_Q = -\alpha \vec{\nabla} T, \quad (15)$$

який виражає фізичний факт, що тепло передається з місць тепліших до холодніших, а тим самим вектор густини потоку тепла \vec{J}_Q є пропорційний до градієнта температури $\vec{\nabla} T$ і має протилежний до нього напрям. Головною перевагою даного фізичного закону є те, що існує ряд добре розроблених експериментальних процедур, необхідних для визначення в (15) коефіцієнта теплопровідності α .

Зауважимо, що хоча тверді тіла, рідини чи гази значно різняться між собою за структурою, їх теплопровідність вдається описати за допомогою одного і того самого закону (15). Це підтвердили експериментальні дослідження, які показали, що цей закон добре описує теплопровідність, якщо градієнт температури не перевищує у випадку твердих тіл $3 \cdot 10^4$ К/м, а у випадку розріджених газів — 10^8 К/м [10-11].

Підставляючи формулу (15) у співвідношення (14), отримаємо таке рівняння для ентропії

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} T) + w_Q. \quad (16)$$

Приймемо, що у природному (початковому) стані введені вище параметри набувають значень

$$T_0 \leftrightarrow s_0 = 0; \quad p_0 \leftrightarrow v_0 = 1/\rho_0. \quad (17)$$

Слід відзначити, що із практичної точки зору функція $u(s, v)$ як термодинамічний потенціал є незручною, тому що одна з її незалежних змінних — ентропія s — безпосередньо, подібно до величин T , p і v , не може бути виміряна [9]. Тому за незалежні змінні доцільно вибирати T і v або T і p .

Для цього введемо у розгляд питому енергію Гельмгольца

$$f = u - Ts. \quad (18)$$

Використавши (18), із співвідношення (12) отримаємо

$$df = -s dT - p dv. \quad (19)$$

Врахувавши, що df є повним диференціалом, із формули (19), як наслідок, прийдемо до узагальнених рівнянь стану [8]

$$s = -\partial f / \partial T, \quad p = -\partial f / \partial v. \quad (20)$$

Використовуючи рівність змішаних похідних, із рівнянь (20) приходимо до співвідношення Максвелла

$$\partial s / \partial v = \partial p / \partial T. \quad (21)$$

Вигляд рівнянь стану (20) будемо встановлювати з використанням відомих у термомеханіці характеристик для ідеальної рідини [12-15]:

- питомої теплоємності за сталого об'єму

$$c_v = T(\partial s / \partial T)_v = -T(\partial^2 f / \partial T^2)_v; \quad (22)$$

- ізотермічного модуля пружності

$$K_T = -v_0(\partial p / \partial v)_T = v_0(\partial^2 f / \partial v^2)_T; \quad (23)$$

- термічного коефіцієнта тиску

$$\gamma_T = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = -\frac{1}{p_0} \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial v}. \quad (24)$$

Зауважимо, що з врахуванням означення (24), співвідношення Максвелла (21) запишемо так

$$\partial s / \partial v = p_0 \gamma_T, \quad (25)$$

а із рівності змішаних похідних для s і p отримаємо додаткові умови на величини (22)-(24)

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{T} \right) = p_0 \frac{\partial \gamma_T}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K_T}{v_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} (\gamma_T p)_0. \quad (26)$$

Прийmemo, що характеристики середовища (22)-(24) є заданими функціями від вибраних параметрів стану (T і v).

Використаємо співвідношення (22)-(24) для встановлення структури залежностей функцій s і p від спряжених їм параметрів стану T і v . Для цього проінтегруємо дані співвідношення в розглядуваних інтервалах зміни температури (T_0, T) й об'єму (v_0, v). Так, проінтегрувавши рівняння (22) і (24) за температурою T , отримаємо такі залежності ентропії та тиску від температури

$$s(T, v) = \int_{T_0}^T \frac{c_v(T, v)}{T} dT + s'(v), \quad p(T, v) = p_0 \int_{T_0}^T \gamma_T(T, v) dT + p'(v). \quad (27)$$

Підставивши формули (27) у (23) і (25) і використавши додаткові умови (26), прийдемо до наступних співвідношень $s'(v)$ та $p'(v)$

$$\frac{\partial s'}{\partial v} = p_0 \gamma_T(T_0, v); \quad \frac{\partial p'}{\partial v} = \frac{K_T(T_0, v)}{v_0}. \quad (28)$$

Інтегруючи співвідношення (28) по v в інтервалі (v_0, v) , маємо

$$s'(v) = p_0 \int_{v_0}^v \gamma_T(T_0, v) dv + s'', \quad p'(v) = \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^v K_T(T_0, v) dv + p''. \quad (29)$$

Тоді з (27) і (29) за початкових умов (17) отримаємо такі вирази для ентропії s і тиску p , залежних від параметрів T і v

$$s(T, v) = \int_{T_0}^T \frac{c_v(T, v)}{T} dT - p_0 \int_{v_0}^v \gamma_T(T_0, v) dv, \quad (30)$$

$$p(T; v) = p_0 \left[1 + \int_{T_0}^T \gamma_T(T, v) dT \right] - \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^v K_T(T_0, v) dv. \quad (31)$$

Зауважимо, що при інтегруванні в оберненій послідовності: спочатку по v , а потім по T , аналогами формул (30) і (31) будуть

$$s(T, v) = \int_{T_0}^T \frac{c_v(T, v_0)}{T} dT - p_0 \int_{v_0}^v \gamma_T(T, v) dv, \quad (32)$$

$$p(T, v) = p_0 \left[1 + \int_{T_0}^T \gamma_T(T, v_0) dT \right] - \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^v K_T(T, v) dv. \quad (33)$$

Знайдемо вираз для питомої енергії Гельмгольца. Для цього співвідношення (30), (31) підставимо у рівняння (20) та проінтегруємо за відповідними параметрами. Одержуємо

$$f(T, v) = - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_v(T, v)}{T} dT - p_0 \left[v - v_0 + (T - T_0) \int_{v_0}^v \gamma_T(T_0, v) dv \right] + \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^v dv \int_{v_0}^v K_T(T_0, v) dv. \quad (34)$$

Зі співвідношення (18), за врахування формул (30)-(33), отримаємо такий вираз для внутрішньої енергії

$$u(T, v) = \int_{T_0}^T c_v dT - p_0 \left[v - v_0 - T_0 \int_{v_0}^v \gamma_T(T_0; v) dv \right] + \frac{1}{v_0} \int_{v_0}^v dv \int_{v_0}^v K_T(T_0; v) dv. \quad (35)$$

При виведені термодинамічних потенціалів (30)-(35) не накладалося ніяких обмежень на інтервали зміни температури (T_0, T) і питомого об'єму (v_0, v) . Оскільки у даній роботі не розглядаються фазові переходи (наприклад, перетворення рідини в газ чи навпаки), то потрібно обмежитися такими інтервалами зміни параметрів стану, для яких середовище є рідиною.

Наведемо тепер кілька часткових виразів для термодинамічних потенціалів (30)-(35). Відомо [12-15], що характеристики рідин (22)-(24) у більшості випадків

суттєво залежать від температури та порівняно слабо — від об'єму. Таким чином, при інженерно-технічних розрахунках залежністю від об'єму можна знехтувати та прийняти: $c_v = c_v(T)$, $K_T = K_T(T)$ і $\gamma_T = \gamma_T(T)$. Але за такого припущення з додаткових співвідношень (26) випливає, що ізотермічний модуль пружності K_T і термічний коефіцієнт тиску γ_T не можуть залежати від температури, тобто

$$c_v = c_v(T), \quad K_T = \text{const}, \quad \gamma_T = \text{const}. \quad (36)$$

Тоді формули (30)-(35) набудуть вигляду

$$s(T, v) = \int_{T_0}^T \frac{c_v(T) dT}{T} + p_0 \gamma_T (v - v_0), \quad (37)$$

$$p(T, v) = p_0 [1 + \gamma_T (T - T_0)] - \frac{v - v_0}{v_0} K_T, \quad (38)$$

$$f(T, v) = - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_v(T) dT}{T} - p_0 (v - v_0) [1 + \gamma_T (T - T_0)] + \frac{K_T}{2v_0} (v - v_0)^2, \quad (39)$$

$$u(T, v) = \int_{T_0}^T c_v(T) dT - p_0 (1 - \gamma_T T_0) (v - v_0) + \frac{K_T}{2v_0} (v - v_0)^2. \quad (40)$$

Якщо питому теплоємність теж взяти постійною, то рівняння стану (38) не зміниться, а співвідношення (37), (39) і (40) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} s(T, v) &= c_v \ln \frac{T}{T_0} + p_0 \gamma_T (v - v_0), \\ f(T, v) &= -c_v \left[T_0 + T \left(\ln \frac{T}{T_0} - 1 \right) \right] - p_0 (v - v_0) [1 + \gamma_T (T - T_0)] + \frac{K_T}{2v_0} (v - v_0)^2, \\ u(T, v) &= c_v (T - T_0) - p_0 (1 - \gamma_T T_0) (v - v_0) + \frac{K_T}{2v_0} (v - v_0)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Підставивши вираз (30) для ентропії у балансове рівняння (16) та використавши рівняння балансу маси (3), отримаємо таке узагальнене рівняння теплопровідності

$$\rho c_v(T, p) \frac{dT}{dt} - p_0 \gamma_T (T_0, \rho) T \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{\nabla} T) + w_Q. \quad (42)$$

Якщо характеристики рідини є сталими, то рівняння (42) набуде вигляду

$$\frac{1}{a} \frac{dT}{dt} - \frac{1}{a_T} T \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \Delta T + \frac{w_Q}{\alpha}, \quad (43)$$

де $a = \kappa/\rho c_v$ — коефіцієнт температуропровідності за сталого об'єму; $a_T = \kappa/p_0 \gamma_T$ — параметр зв'язаності полів температури та швидкості. Зауважимо, що коефіцієнти a і a_T мають розмірність коефіцієнта дифузії ($\text{м}^2/\text{с}$).

Якщо за незалежні змінні взяти температуру T та тиск p , то за термодинамічний потенціал потрібно вибрати потенціал Гіббса, тобто

$$g = u - Ts + pv.$$

Для нього рівняння (19) прийме вигляд

$$dg = -s dT + v dp. \quad (44)$$

Із виразу (44), як наслідок, випливають узагальнені рівняння стану

$$s = -\partial g / \partial T, \quad v = \partial g / \partial p \quad (45)$$

та співвідношення Максвелла

$$-\partial s / \partial p = \partial v / \partial T. \quad (46)$$

У цьому випадку вихідними характеристиками рідини будуть:

- питома теплоємність за сталого тиску

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = -T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right)_p; \quad (47)$$

- термічний коефіцієнт об'ємного розширення

$$\alpha_T = \frac{1}{v_0} \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{1}{v_0} \frac{\partial^2 g}{\partial T \partial v}; \quad (48)$$

- термічний коефіцієнт стисливості

$$\beta_T = -\frac{1}{v_0} \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{1}{v_0} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2}. \quad (49)$$

Зауважимо, що з врахуванням залежності (48), співвідношення Максвелла (46) набудуть вигляду

$$\partial s / \partial p = -v_0 \alpha_T, \quad (50)$$

а із рівності змішаних похідних для s і v отримаємо такі додаткові обмеження на характеристики (47)-(49)

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{T} \right) = -v_0 \frac{\partial \alpha_T}{\partial T}; \quad \frac{\partial \alpha_T}{\partial p} = -\frac{\partial \beta_T}{\partial T}. \quad (51)$$

Надалі характеристики середовища (47)-(49) вважатимемо заданими функціями від вибраних параметрів стану, тобто від T і p .

Проінтегруємо рівняння (45)-(51) за температурою T та тиском p відповідно в інтервалах $(T_0; T)$ і $(p_0; p)$. У підсумку отримаємо

$$s(T, p) = \int_{T_0}^T \frac{c_p(T, p)}{T} dT - v_0 \int_{p_0}^p \alpha_T(T_0, p) dp; \quad (52)$$

$$v(T, p) = v_0 \left[1 + \int_{T_0}^T \alpha_T(T, p) dT - \int_{p_0}^p \beta_T(T_0, p) dp \right]; \quad (53)$$

$$g(T, p) = - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_p(T, p) dT}{T} + \\ + v_0 \left[p - p_0 + (T - T_0) \int_{p_0}^p \alpha_T(T_0, p) dp - \int_{p_0}^p dp \int_{p_0}^p \beta_T(T_0, p) dp \right]; \quad (54)$$

$$u(T, p) = \int_{T_0}^T c_p(T, p) dT - v_0 \left[p_0 + p \int_{T_0}^T \alpha_T(T, p) dT + \right. \\ \left. + T_0 \int_{p_0}^p \alpha_T(T_0, p) dp - \int_{p_0}^p \beta_T(T_0, p) p dp \right]. \quad (55)$$

Якщо характеристики рідини слабо залежать від зміни об'єму, то

$$c_p = c_p(T), \quad \alpha_T = \text{const}, \quad \beta_T = \text{const}. \quad (56)$$

Із врахуванням формул (56), співвідношення (52)-(55) приймають вигляд

$$s(T, p) = \int_{T_0}^T \frac{c_p(T)}{T} dT - \alpha_T v_0 (p - p_0), \quad (57)$$

$$v(T, p) = v_0 [1 + \alpha_T (T - T_0) - \beta_T (p - p_0)], \quad (58)$$

$$g(T, p) = - \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{c_p(T) dT}{T} + v_0 (p - p_0) \left[1 + \alpha_T (T - T_0) - \frac{\beta_T}{2} (p - p_0) \right], \quad (59)$$

$$u(T, p) = \int_{T_0}^T c_p dT - v_0 \left[p_0 + \alpha_T (pT - p_0 T_0) - \frac{\beta_T}{2} (p^2 - p_0^2) \right]. \quad (60)$$

За сталої питомої теплоємності c_p формули (57)-(60) будуть такими

$$\begin{aligned}
 s(T, p) &= c_p \ln \frac{T}{T_0} - \alpha_T v_0 (p - p_0), \\
 g(T, p) &= -c_p \left[T_0 + T \left(\ln \frac{T}{T_0} - 1 \right) \right] + v_0 (p - p_0) \left[1 + \alpha_T (T - T_0) - \frac{\beta_T}{2} (p - p_0) \right], \\
 u(T, p) &= c_p (T - T_0) - v_0 \left[p_0 + \alpha_T (pT - p_0 T_0) - \frac{\beta_T}{2} (p^2 - p_0^2) \right]. \quad (61)
 \end{aligned}$$

Зазначимо, що формули (41) і (61) співпадають з аналогічними, отриманими на основі використання розвинень термодинамічних функцій у степеневі ряди за малих відхилень параметрів від рівноважних [2].

Виходячи із співвідношень (16) і (52), запишемо рівняння теплопровідності

$$\rho \left[c_p(T, p) \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha_T(T_0, p)T}{\rho_0} \frac{dp}{dt} \right] = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\alpha} \bar{\nabla} T) + w_Q. \quad (62)$$

Для сталих характеристик рівняння теплопровідності буде

$$\frac{1}{a} \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha_T T}{\bar{\alpha}} \frac{dp}{dt} = \Delta T + \frac{w_Q}{\bar{\alpha}}. \quad (63)$$

Прирівнюючи відповідні вирази для термодинамічних потенціалів (30)-(35) та відповідні їм формули (52)-(55), отримаємо зв'язки

- між термічними коефіцієнтами

$$K_T = \frac{1}{\beta_T}, \quad \alpha_T = \frac{p_0 \gamma_T}{K_T} = p_0 \beta_T \gamma_T; \quad (64)$$

- між питомими теплоємностями за сталого тиску та сталого об'єму

$$c_p - c_v = p_0 v_0 \alpha_T \gamma_T T. \quad (65)$$

У фізиці вводять показник адиабати (коефіцієнт Пуассона) $\gamma \equiv c_p / c_v$, який характеризує відносну різницю між теплоємностями c_p і c_v . Для цього випадку

$$\gamma = \left(1 - \frac{p_0 v_0 \alpha_T \gamma_T T}{c_p} \right)^{-1}. \quad (66)$$

Розглянемо адиабатичне розширення, коли $s = \text{const}$ чи $ds/dt = 0$. Тоді з рівнянь (37) і (62) зміну температури з часом можна виразити через зміну з часом об'єму чи тиску, тобто

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{p_0 \gamma_T(T_0, v) T}{c_v} \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 \alpha_T(T_0, v) T}{c_p} \frac{dp}{dt}. \quad (67)$$

Тоді із рівнянь (31) і (53) отримаємо такі співвідношення

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{K_s(T, v)}{v_0} \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = -v_0 \beta_s(T, p) \frac{dp}{dt}, \quad (68)$$

де K_s і β_s — адіабатичні модулі пружності та стисливості, які пов'язані з ізотермічними характеристиками такими залежностями

$$K_s(T, v) = K_T(T_0, v) + p_0^2 v_0 \gamma_T(T_0, v) \gamma_T(T, v) T / c_v, \\ \beta_s(T, p) = \beta_T(T_0, p) - v_0 \alpha_T(T_0, v) \alpha_T(T, v) T / c_p. \quad (69)$$

При цьому

$$K_s = 1/\beta_s. \quad (70)$$

Зауважимо, що у разі постійних характеристик рідини та невеликих відхилень параметрів від рівноважного стану, співвідношення (66) і (67) можна проінтегрувати. Використовуючи при цьому початкові умови (17), отримаємо

$$T - T_0 = -\frac{p_0 \gamma_T T_0}{c_v} (v - v_0) = \frac{v_0 \alpha_T T_0}{c_p} (p - p_0), \quad (71)$$

$$p - p_0 = -\frac{K_s}{v_0} (v - v_0), \quad v - v_0 = -v_0 \beta_s (p - p_0), \quad (72)$$

а формули (68) і (69) не зміняться (замість функцій необхідно поставити їх сталі значення).

Висновки. Отримано замкнену систему рівнянь термомеханіки: рівняння балансу маси (2), рівняння руху (6), рівняння стану (30), (31) чи (52), (53) (або їх наближення (37), (38) чи (57), (58)), рівняння теплопровідності у формі (42) чи (62) (або їх наближення (43) чи (63)). Записано зв'язки (64), (65) між термічними характеристиками рідини. Розглянуто випадок адіабатичного наближення (66)-(72).

Література

- [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2-х ч. — М.: Физматгиз, 1963. — Ч. 1. — 584 с.
- [2] Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. — К.: Наук. думка, 1978. — 232 с.
- [3] Солодяк М. Т., Чапля Є. Я., Качур І. Р. Вихідні співвідношення математичної моделі електродифузії водних розчинів солей у пористих середовищах. — Львів, 1993. — 46 с. (Препр. / АН України. ЦММ ІППММ; 6-93).
- [4] Солодяк М. Т. Термодинамічні функції суміші ідеальних газів у рівноважному стані // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — Т. 40, № 3. — С. 134-140.
- [5] Солодяк М. Т. Математична модель термодифузії в слабких розчинах електролітів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1999. — № 1. — С. 55-60.

- [6] Улітко А. Т., Мольченко Л. В., Ковальчук В. Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. — К.: Либідь, 1994. — 156 с.
- [7] Де Гроот С. П., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с.
- [8] Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. — М.: Наука, 1982. — 584 с.
- [9] Базаров И. П. Термодинамика. — М.: Высшая шк., 1983. — 344 с.
- [10] Wyrwal J. Termodynamiczne podstawy fizyki budowli. Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2004. — 251 s.
- [11] Wyrwal J., Marynowicz A. Vapour condensation and moisture accumulation in porous building wall // Building and environment. — 2002. — V. 37, № 3. — P. 313-318.
- [12] Варгафтик Н. В. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
- [13] Енохович А. С. Краткий справочник по физике. — М.: Высшая. шк., 1976. — 288 с.
- [14] Кей Дж., Леби Т. Таблицы физических и химических постоянных / Под ред. Яковлева К. П. — М.: Физматгиз, 1962. — 247 с.
- [15] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. Кикоина И. К. — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с.

Математическая модель термомеханики идеальной жидкости

Александр Гачкевич, Михаил Солодяк

На основании интегрирования известных выражений тепловых и механических характеристик среды (идеальной жидкости) как функций избранных параметров состояния (в произвольных заданных интервалах изменения этих параметров), установлено структуру термодинамических функций, уравнений состояния и баланса тепловой энергии (уравнения теплопроводности). С использованием этих выражений, термодинамики состояний и процессов, а также механики сплошных сред, построена математическая модель термомеханики идеальной жидкости при отсутствии условий малости отклонений термодинамических параметров от равновесных и исходных выражений для термодинамических потенциалов.

Mathematical Model of Thermomechanical Processes in an Ideal Fluid

Oleksandr Hachkevych, Mykhaylo Solodyak

The structure of thermodynamical functions, constitutive equations and thermal energy balance equation (heat conductive equation) by integrating well known expressions of thermal and mechanical medium characteristics (ideal fluid) as functions of chosen state parameters (in arbitrary specified intervals of parameter's change) are derived. In default of smallness for thermodynamical parameters deflections and initial expressions for thermodynamic potentials the mathematical model of ideal fluid thermomechanics using those expressions, thermomechanics of states and processes and continuum mechanics is proposed.

Отримано 18.04.06