УДК 519.65

Рівномірне наближення функції сумою многочлена й експоненти з інтерполюванням

Петро Малачівський

К. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Встановлено достатні умови існування рівномірного (чебишовського, мінімаксного) наближення функції сумою полінома та експоненти з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у зовнішніх точках. Запропоновано алгоритм визначення параметрів такого рівномірного наближення за схемою Ремеза. Обґрунтовано застосування ітераційного методу для обчислення значення нелінійного параметра.

Ключові слова: рівномірне (чебишовське, мінімаксне) наближення з інтерполюванням, нелінійне наближення, точки чебишовського альтернанса, схема Ремеза.

Вступ. Найкраще рівномірне наближення функції сумою многочлена й експоненти

$$E_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i + Ae^{px}, \quad A\neq 0, \quad p\neq 0, \quad n=0,1,2,... \qquad (1)$$

з інтерполюванням використовується для опису різних фізичних процесів [1, 2] та наближення деяких спеціальних функцій [3]. Розроблені також технічні пристрої, які дозволяють обчислити значення суми многочлена й експоненти [4]. Рівномірне наближення виразом (1) для $n=0$ із точним відтворенням значення функції у заданій точці використовується, зокрема, для опису залежності оптичної щільності відбитка від товщини нанесеного шару фарби [5]. Наближення функцій із точним відтворенням їхніх значень у крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервних сплайн-наближень [6].

Вивченню властивостей найкращого рівномірного наближення функцій виразом (1) з інтерполюванням присвячено праці [4, 5, 7, 8]. Зокрема, у роботах [4, 5, 7] сформульовано достатні умови існування рівномірного наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у лівій крайній точці відрізка для $n=0$ і $n=1$, а також запропоновано алгоритми для визначення параметрів цього наближення. Дослідження найкращого рівномірного наближення виразом (1) з інтерполюванням ускладнюється тим, що цей вираз не задовольняє умову Хаара [2], тому виникає питання існування такого наближення для заданої функції $f(x)$ і його єдиності.

Дана стаття присвячена дослідженню умов існування рівномірного наближення сумою полінома й експоненти (1) з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках відрізка та точках зовнішніх щодо нього. Встановлено достатні умови існування такого рівномірного наближення для функції $f(x)$ і запропоновано алгоритм для визначення його параметрів за схемою Ремеза.

1. Існування рівномірного наближення сумою полінома й експоненти з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках

Для дослідження умов існування рівномірного наближення функції виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою та точним відтворенням її значень у заданих точках використаємо властивість комбінацій приростів неперервної диференційовної функції, яка встановлюється *теоремою 1*.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ та має обмежену похідну на (α, β), то на інтервалі (α, β) знайдуться такі точки ξ і ζ ($\xi, \zeta \in (\alpha, \beta)$), для яких справджуються рівності

$$\frac{f(\beta)+f(\gamma)-2f(\alpha)}{\beta+\gamma-2\alpha}=f'(\xi), \tag{2}$$

$$\frac{2f(\beta)-f(\gamma)-f(\alpha)}{2\beta-\gamma-\alpha}=f'(\zeta), \tag{3}$$

де $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

Доведення. Переконаємося у справедливості першої рівності. Розглянемо на відрізку $[\alpha, \beta]$ допоміжну функцію

$$G(x)=\frac{f(\beta)+f(x)-2f(\alpha)}{\beta+x-2\alpha}. \tag{4}$$

Ця функція на відрізку $[\alpha, \beta]$ є неперервною та має обмежену похідну

$$G'(x)=\frac{f'(x)(\beta+x-2\alpha)-\left[f(\beta)+f(x)-2f(\alpha)\right]}{(\beta+x-2\alpha)^2}. \tag{5}$$

Нехай у точці $x_{\max}$ локальний максимум функції $G(x)$ досягає найбільшого значення на $[\alpha, \beta]$, а в точці $x_{\min}$ — найменшого. Тоді множиною можливих значень функції $G(x)$ буде відрізок $[\min(G(\alpha), G(\beta), G(x_{\min})), \max(G(\alpha), G(\beta), G(x_{\max}))]$.

На кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$ функція G(x) набуває однакових значень

$$G(\alpha)=G(\beta)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}. \tag{6}$$

На основі теореми Лагранжа [9] на інтервалі (α, β) існує така точка ξ_1, у якій значення похідної функції $f(x)$ дорівнює значенню функції $G(x)$ на кінцях відрізка $[\alpha, \beta]$, тобто $f'(\xi_1)=\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]/(\beta-\alpha)$.

Якщо функція $G(x)$ має екстремуми на відрізку $[\alpha, \beta]$, то, з необхідної умови екстремуму — рівності нулю її похідної (5), отримаємо, що точки екстремуму $G(x)$ задовольняють рівняння

$$\frac{f(\beta)+f(x)-2f(\alpha)}{\beta+x-2\alpha}=f'(x). \tag{7}$$

Згідно з цією умовою в точках екстремуму значення функції дорівнює відповідно $G(x_{\min})=f'(x_{\min})$ або $G(x_{\max})=f'(x_{\max})$. Тому, враховуючи неперервність і диференційованість функції $f(x)$ для будь-яких x з $[\alpha, \beta]$, на інтервалі (α, β) завжди знайдеться така точка ξ ($\xi \in (\alpha, \beta)$), в якій значення похідної функції $f(x)$ буде дорівнювати значенню функції $G(x)$. Отже, рівність (2) виконується.

Подібним чином можна переконатися й у справедливості рівності (3). При цьому необхідно скористатися допоміжною функцією

$$G_1(x)=\frac{2f(\beta)-f(x)-f(\alpha)}{2\beta-x-\alpha}, \quad x\in[\alpha,\beta]. \tag{8}$$

Теорему доведено.

Розглянемо неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$, що справджують умови

$$W^{(n)}>0,\ \ W^{(n)}\neq W_0^{(n)}, \tag{9}$$

де

$$W^{(n)}=\frac{D_{n+1}(f;z_2,z_3,\ldots,z_{n+4})}{D_{n+1}(f;z_1,z_2,\ldots,z_{n+3})}, \tag{10}$$

$$W_0^{(n)}=\frac{D_{n+1}(s_{n+1};z_2,z_3,\ldots,z_{n+4})}{D_{n+1}(s_{n+1};z_1,z_2,\ldots,z_{n+3})}, \tag{11}$$

$$s_k(x)=x^k,$$

$$D_k(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k+1})=\frac{D_{k-1}(U;z_{j+1},z_{j+2},\ldots,z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_{j+1},z_{j+2},\ldots,z_{j+k+1})}-$$

$$-\frac{D_{k-1}(U;z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1};z_j,z_{j+1},\ldots,z_{j+k})},\ \ k=\overline{2,n+1},\ \ j=\overline{1,n-k+3}, \tag{12}$$

$$D_1(U;z_j,z_{j+2})=U(z_{j+2})-U(z_j),\quad j=\overline{1,n+2}, \tag{13}$$

а z_j $\left(j=\overline{1,n+4}\right)$ — довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з відрізка $[\alpha, \beta]$.

Достатню умову існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та точним відтворенням її значення у крайніх точках відрізка сформулюємо у вигляді *теореми 2*.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді:
а) достатньою умовою існування рівномірного наближення (1) функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти із найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$

та точним відтворенням її значення у крайніх точках відрізка (або тільки в одній із них) є виконання нерівностей (9), в яких у випадку інтерполювання у точці $z_1 = \alpha$

$$D_1\left(U; z_1, z_3\right) = U\left(z_3\right) + U\left(z_2\right) - 2U\left(\alpha\right), \tag{14}$$

а у разі інтерполювання в точці $z_{n+4} = \beta$ відповідно

$$D_1\left(U; z_{n+2}, z_{n+4}\right) = 2U\left(\beta\right) - U\left(z_{n+2}\right) - U\left(z_{n+3}\right); \tag{15}$$

б) у випадку виконання умов пункту *а* існує єдине рівномірне наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у крайніх точках відрізка, а параметри такого наближення задовольняють систему рівнянь

$$f\left(z_j\right) - \sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - Ae^{pz_j} = \lambda_j \left(-1\right)^j \mu, \quad j = \overline{1, n+4}, \tag{16}$$

в якій $\lambda_j = 1$, $\left(j = \overline{1, n+4}\right)$; z_j $\left(j = \overline{1, n+4}\right)$ — упорядковані за зростанням точки альтернанса; $z_1 = \alpha$ та $\lambda_1 = 0$, якщо інтерполювання проводиться у точці α; $z_{n+4} = \beta$ та $\lambda_{n+4} = 0$, якщо інтерполювання проводиться у точці β.

Доведення. Переконаємося спочатку в справедливості теореми у випадку інтерполювання в обох крайніх точках відрізка [α, β]. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови теореми. Тоді, за характеристичною теоремою про існування та єдиність найкращого рівномірного наближення нелінійним виразом з інтерполюванням [2], для існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у крайніх точках відрізка α та β достатньо, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} f\left(\alpha\right) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i - Ae^{p\alpha} = 0, \\ f\left(z_j\right) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z_j^i - Ae^{pz_j} = \left(-1\right)^j \mu, \quad j = \overline{2, n+3}, \\ f\left(\beta\right) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \beta^i - Ae^{p\beta} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

мала єдиний розв'язок щодо невідомих a_i $\left(i = \overline{0, n}\right)$, A, p та μ, де z_j $\left(j = \overline{2, n+3}\right)$ — довільні, упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з інтервалу (α, β).

Покажемо, що у разі виконання умов (9) система рівнянь (17) має єдиний розв'язок. Якщо із системи (16) виключити невідомі a_0 та μ, то отримаємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(z_3^i + z_2^i - 2\alpha^i\right) + A\left(e^{pz_3} + e^{pz_2} - 2e^{p\alpha}\right) = f\left(z_3\right) + f\left(z_2\right) - 2f\left(\alpha\right), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(z_{j+2}^i - z_j^i\right) + A\left(e^{pz_{j+2}} - e^{pz_j}\right) = f\left(z_{j+2}\right) - f\left(z_j\right), \quad j = \overline{2, n+1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(2\beta^i - z_{n+2}^i - z_{n+3}^i\right) + A\left(2e^{p\beta} - e^{pz_{n+2}} - e^{pz_{n+3}}\right) = 2f\left(\beta\right) - f\left(z_{n+2}\right) - f\left(z_{n+3}\right). \end{cases} \tag{18}$$

З урахуванням (10)-(15) система рівнянь (18) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D_1\left(s_i; z_j, z_{j+2}\right) + AD_1\left(\varphi(p,x); z_j, z_{j+2}\right) = D_1\left(f; z_j, z_{j+2}\right), \quad j=\overline{1,n+2}\,, \tag{19}$$

де $\varphi(p, x) = e^{px}$. Із цієї системи рівнянь виключимо невідомі $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ й A. Виключення параметрів $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ будемо проводити у порядку зростання індексу. Після виключення з системи рівнянь (19) невідомого a_1 отримаємо

$$\sum_{i=2}^{n} a_i D_2\left(s_i; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}\right) + AD_2\left(\varphi; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}\right) =$$
$$= D_2\left(f; z_j, z_{j+1}, z_{j+2}, z_{j+3}\right)\ ,\ j=\overline{1,n+1}. \tag{20}$$

Таке виключення невідомого a_1 можливе, оскільки коефіцієнти біля нього в усіх рівняннях відмінні від нуля. Справді, значення виразу

$$D_1\left(s_1; z_j, z_{j+2}\right) = \begin{cases} z_3 + z_2 - 2z_1, & \text{якщо } j=1, \\ z_{j+2} - z_j, & \text{якщо } 1< \ j \le n+1, \\ 2z_{n+4} - z_{n+3} - z_{n+2}, & \text{якщо } j = n+2, \end{cases}$$

для $j=\overline{1,n+2}$ не дорівнює нулю, оскільки за умовою теореми числа z_j — це різні упорядковані за зростанням числа з інтервалу (α, β).

Для виключення решти параметрів $a_i\left(i=\overline{2,\,n}\right)$ із системи рівнянь (20) необхідно пересвідчитися, що коефіцієнти біля них також відмінні від нуля. Для цього розглянемо послідовність виразів

$$\frac{D_k\left(s_{k+1}; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right)}{D_k\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right)}, \quad k=\overline{1,n-1}, \quad j=\overline{1,n-k+3}\,. \tag{21}$$

Якщо $k = 1$ і $j=\overline{2,n+1}$ значення виразу (21) дорівнює відношенню приростів функції $s_2(x) = x^2$ до приростів аргументу

$$\frac{D_1\left(s_2; z_j, z_{j+2}\right)}{D_1\left(s_1; z_j, z_{j+2}\right)} = \frac{z_{j+2}^2 - z_j^2}{z_{j+2} - z_j}\,.$$

За теоремою Лагранжа [9] про кінцеві прирости значення такого відношення дорівнює похідній функції $s_2(x) = x^2$ у деякій середній точці ζ_j інтервалу (z_j, z_{j+2}).

У випадку $k = 1$ та $j = 1$ значення виразу (21) дорівнює відношенню

$$\frac{D_1\left(s_2; z_1, z_3\right)}{D_1\left(s_1; z_1, z_3\right)} = \frac{z_3^2 + z_2^2 - 2\alpha^2}{z_3 + z_2 - 2\alpha}\,, \tag{22}$$

а для $k = 1$ та $j = n + 2$ відповідно

$$\frac{D_1\left(s_2; z_{n+2}, z_{n+4}\right)}{D_1\left(s_1; z_{n+2}, z_{n+4}\right)} = \frac{2\beta^2 - z_{n+2}^2 - z_{n+3}^2}{2\beta - z_{n+2} - z_{n+3}}. \tag{23}$$

Відношення (22), (23) на основі *теореми 1* також дорівнюють похідній функції $s_2(x) = x^2$ у деякій середній точці відповідних інтервалів, а саме: відношення (22) — похідній у точці ζ_1 з інтервалу (α, z_3), а відношення (23) — похідній у точці ζ_{j+2} з (z_{n+2}, β).

Отже, для $k = 1$ значення виразу (21) дорівнює похідній функції $s_2(x) = x^2$ у середніх точках ζ_j інтервалів (z_j, z_{j+2}), $j = \overline{1, n+2}$. Відповідно коефіцієнти біля невідомого a_2 у рівняннях системи (20) набувають таких значень

$$D_2\left(s_2; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+3}\right) = 2\left(\zeta_{j+1} - \zeta_j\right), \quad j = \overline{1, n+1}. \tag{24}$$

Оскільки числа $z_j\left(j = \overline{1, n+4}\right)$ упорядковані за зростанням, то точки ζ_j $\left(j = \overline{1, n+2}\right)$ також упорядковані за зростанням. Таким чином, в усіх рівняннях системи (20) коефіцієнти відмінні від нуля та набувають додатних значень.

Аналогічно, застосувавши послідовно k разів теорему Коші [9] про відношення приростів функцій, переконуємося у справедливості рівності

$$D_k\left(s_k; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+k+1}\right) = k\left(\xi_{j+1} - \xi_j\right), \quad j = \overline{1, n-k+3}, \tag{25}$$

де $\xi_j \in \left(z_j, z_{j+k}\right)$, $j = \overline{1, n-k+4}$. Оскільки $(k-1)$-а похідна степеневої функції $S_k(z) = z^k$ строго монотонна, а числа $z_j\left(j = \overline{1, n+4}\right)$ упорядковані за зростанням, то $\xi_j < \xi_{j+1}\left(j = \overline{1, n-k+3}\right)$. Звідси випливає, що коефіцієнти біля невідомих a_i $\left(i = \overline{2, n}\right)$ в усіх рівняннях проміжних систем, що отримуються у процесі їхнього виключення, відмінні від нуля і до того ж додатні.

Отже, з системи рівнянь (20) можна послідовно виключити решта невідомих параметрів $a_i\left(i = \overline{2, n}\right)$. У результаті для визначення невідомих A та p отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} AD_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right) = D_{n+1}\left(f; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right), \\ AD_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right) = D_{n+1}\left(f; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right). \end{cases} \tag{26}$$

Дослідимо вільні члени рівнянь цієї системи та коефіцієнти біля невідомого параметра A. Для цього розглянемо допоміжні вирази

$$\frac{D_n\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)}{D_n\left(S_n; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)}, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{27}$$

Аналогічно, як і у випадку з виразом (21), застосувавши теорему Коші послідовно n разів, можна показати, що вирази (27) є розділеними різницями n-го порядку функції $U(z)$ на множині точок $\{z_i\}_{i=j}^{j+n+1}$. Отже, кожен із цих виразів дорівнює n-ій похідній функції $U(z)$ у деякій середній точці ς_j з інтервалу (z_j, z_{j+n+1})

$$\frac{D_n\left(U; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)}{D_n\left(s_n; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+1}\right)} = U^{(n)}\left(\varsigma_j\right), \tag{28}$$

де $\varsigma_j \in (z_j, z_{j+n+1})$, $j = \overline{1,3}$. Це означає, що коефіцієнти біля невідомого параметра A у системі рівнянь (26) дорівнюють приросту n-ої похідної функції $\varphi(p, x) = e^{px}$ по x. Оскільки похідні функції e^{px} для $p \neq 0$ є строго монотонними функціями змінної x, то коефіцієнти біля A в рівняннях системи (26) відмінні від нуля. Тому система рівнянь (26) для від'ємних ($p < 0$) і додатних ($p > 0$) значень параметра p матиме дійсний відмінний від нульового розв'язок щодо невідомого A, якщо вільні члени її рівнянь також відмінні від нуля.

Згідно з рівністю (28) вільні члени рівнянь системи (26) дорівнюють приростам n-ої похідної функції $f(x)$, тобто

$$D_{n+1}\left(f; z_j, z_{j+1}, ..., z_{j+n+2}\right) = f^{(n)}\left(\xi_{j+1}\right) - f^{(n)}\left(\xi_j\right), \quad j = 1, 2, \tag{29}$$

де $\xi_j \in \left(z_j, \quad z_{j+n+1}\right)$, $j = \overline{1,3}$.

Оскільки за умовою (9)

$$W^{(n)} > 0, \tag{30}$$

то відношення приростів n-их похідних функції $f(x)$ додатне, тому відповідно й самі прирости відмінні від нуля. Це означає, що вільні члени рівнянь системи (26) також не набувають нульових значень. Якщо перше рівняння системи (26) поділити на друге, то отримаємо таке трансцендентне рівняння відносно p

$$\omega_n\left(p\right) = W^{(n)}, \tag{31}$$

де $\omega_n\left(p\right) = \dfrac{D_{n+1}\left(\varphi; z_2, z_3, ..., z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi; z_1, z_2, ..., z_{n+3}\right)}$, а $W^{(n)}$ визначається формулою (10).

З урахуванням співвідношення (28) ліву частину рівняння (31) подамо у вигляді

$$\omega_n\left(p\right) = \frac{\varphi^{(n)}\left(p, \tau_3\right) - \varphi^{(n)}\left(p, \tau_2\right)}{\varphi^{(n)}\left(p, \tau_2\right) - \varphi^{(n)}\left(p, \tau_1\right)}, \tag{32}$$

де $\tau_i \in (z_i, z_{i+n+1})$, $i = \overline{1,3}$. Підставимо у вираз (32) замість $\varphi^{(n)}(p, x)$ n-ну похідну функції $\varphi(p, x) = e^{px}$. Отримаємо

$$\omega_n(p) = \frac{e^{p\tau_3} - e^{p\tau_2}}{e^{p\tau_2} - e^{p\tau_1}}. \tag{33}$$

У роботі [10] показано, що для чисел $\tau_i \left(i = \overline{1,3} \right)$ справджуються співвідношення $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Тоді у лівій частині рівняння (31) можна сформувати відношення розділених різниць приростів експоненти. Для цього ліву частину рівняння (31) домножимо та поділимо на відповідні різниці приростів аргументу, а саме — $(\tau_2 - \tau_1)/(\tau_3 - \tau_2)$. Після заміни отриманих розділених різниць відповідними похідними у середніх точках маємо

$$\omega_n(p) = Ke^{p(\zeta_2 - \zeta_1)}, \tag{34}$$

де $K = \dfrac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$, $\zeta_1 \in (z_1, z_{n+3})$, $\zeta_2 \in (z_2, z_{n+4})$.

Ліва частина рівняння (31) є експоненціальною функцією з додатним коефіцієнтом K. Тому рівняння (31) має єдиний розв'язок для p, якщо його права частина додатна та її значення належать множині значень функції $\omega_n(p)$ для $p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Визначимо множину допустимих значень функції $\omega_n(p)$. Згідно зі співвідношенням (34) функція $\omega_n(p)$ строго монотонна на інтервалах $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$ та набуває таких граничних значень

$$\lim_{p \to -\infty} \omega_n(p) = 0, \quad \lim_{p \to 0} \omega_n(p) = W_0^{(n)}, \quad \lim_{p \to \infty} \omega_n(p) = \infty.$$

Тому для від'ємних p ліва частина рівняння (31) може набувати значення з інтервалу $\left(0, W_0^{(n)}\right)$, а для додатних — відповідно з інтервалу $\left(W_0^{(n)}, \infty\right)$.

Отже, у разі виконання умов (9), система рівнянь (17) має єдиний розв'язок щодо невідомих $a_i \left(i = \overline{0,n} \right)$, A, p та μ для будь-яких упорядкованих за зростанням чисел $z_i \left(i = \overline{2, n+3} \right)$ з інтервалу (α, β). Таким чином, умови (9) є достатніми умовами існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ та інтерполюванням у крайніх точках відрізка.

У разі виконання умов (9) система рівнянь (17) має єдиний розв'язок. Тому згідно з характеристичною теоремою про існування та єдиність найкращого рівномірного наближення нелінійним виразом [2] параметри рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка α та β визначаються з системи рівнянь (16), у якій $z_j \left(j = \overline{2, n+3} \right)$ — упорядковані за зростанням точки альтернанса, $z_1 = \alpha$, $\lambda_1 = 0$, $z_{n+4} = \beta$ та $\lambda_{n+4} = 0$. У цьому випадку система рівнянь (16) співпадає з системою (17). Отже, справедливість теореми підтверджено.

Подібним чином можна переконатися у справедливості теореми й у випадку рівномірного наближення функції $f(x)$ сумою многочлена й експоненти (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення в одній із крайніх точок відрізка. Тоді, за характеристичною теоремою про існування та єдиність найкращого рівномірного наближення нелінійним виразом [2], для існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у точці α достатньо, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} f(\alpha)-\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i - Ae^{p\alpha}=0, \\ f(z_j)-\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - Ae^{pz_j}=(-1)^j\mu, \quad j=\overline{2,n+4} \end{cases} \tag{35}$$

мала єдиний розв'язок щодо невідомих $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$, A, p та μ, де $z_i\left(i=\overline{2,n+4}\right)$ — довільні упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з інтервалу (α, β).

Для існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у точці β достатньо, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} f(z_j)-\sum_{i=0}^{n} a_i z_j^i - Ae^{pz_j}=(-1)^j\mu, \quad j=\overline{1,n+3}, \\ f(\beta)-\sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i - Ae^{p\beta}=0 \end{cases} \tag{36}$$

мала єдиний розв'язок щодо невідомих $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$, A, p та μ, де $z_i\left(i=\overline{1,n+3}\right)$ — довільні упорядковані за зростанням $z_j < z_{j+1}$ числа з [α, β).

Єдиність розв'язку систем рівнянь (35) і (36) доводиться за аналогією з доведенням єдиності розв'язку системи рівнянь (17). Тому згідно характеристичної теореми про існування й єдиність найкращого рівномірного наближення нелінійним виразом [2] параметри рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] й інтерполюванням в одній із крайніх точок відрізка α чи β визначаються відповідно з системи рівнянь (35) або (36). Якщо інтерполювання проводиться в точці α, то в системі рівнянь (35) точки z_j $\left(j=\overline{2,n+4}\right)$ є точками альтернанса, а $z_1=\alpha$ і $\lambda_1=0$. У випадку інтерполювання у точці β параметри наближення визначаються із системи рівнянь (36), у якій відповідно $z_{n+4}=\beta$ та $\lambda_{n+4}=0$, а $z_j\left(j=\overline{1,n+3}\right)$ — точки альтернанса. Отже з урахуванням конкретної точки інтерполювання α чи β система рівнянь (16) співпадає відповідно із системою рівнянь (35) або (36). *Теорему доведено*.

Проаналізуємо умови (9). Неважко переконатися, що для полінома ($n + 1$)-го степеня, величина $W^{(n)}$ набуває значення рівного $W_0^{(n)}$. Отже, друга нерівність $W^{(n)} \neq W_0^{(n)}$ умови (9) справджується, зокрема, для функцій $f(x)$ відмінних від полінома ($n + 1$)-го степеня.

Під час доведення *теореми 2* було встановлено, що перша нерівність умови (9) виконується для функцій $f(x)$, n-на похідна яких строго монотонна на відрізку [α, β]. Таким чином, достатній умові існування чебишовського наближення виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] й інтерполюванням у крайніх точках відрізка задовольняють, зокрема, функції $f(x)$ відмінні від полінома ($n + 1$)-го степеня та неперервно диференційовні до n-го порядку включно ($f(x) \in C^n[\alpha, \beta]$), n-на похідна яких строго монотонна на [α, β].

Умови (9) не є необхідними для існування найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) з найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках. Їх виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернанса. У разі використання алгоритму Ремеза [2] для знаходження параметрів рівномірної апроксимації функції $f(x)$ виразом (1) необхідно, щоб в усіх точках проміжних наближень до точок альтернанса виконувалися умови (9).

Встановлені достатні умови існування рівномірного наближення функції виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою й інтерполюванням у крайніх точках відрізка можна узагальнити на випадок рівномірного наближення функцій виразом (1) з інтерполюванням у зовнішніх його точках.

2. Існування рівномірного наближення функції сумою полінома й експоненти з найменшою абсолютною похибкою та інтерполюванням у зовнішніх точках

Розглянемо задачу рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у крайніх точках відрізка α та β і сусідніх з ними зовнішніх точках. Зовнішніми точками щодо відрізка [α, β] будемо вважати точки α_i $\left(i = \overline{2, r_1}\right)$ і β_j $\left(j = \overline{2, r_2}\right)$, де

$$\alpha_{r_1} < \alpha_{r_1 - 1} < \dots < \alpha_1 = \alpha, \quad \beta = \beta_1 < \dots < \beta_{r_2 - 1} < \beta_{r_2}. \tag{37}$$

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $\left[\alpha_{r_1}, \beta_{r_2}\right]$. Тоді достатню умову існування рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значень у точках α_i $\left(i = \overline{1, r_1}\right)$ і β_j $\left(j = \overline{1, r_2}\right)$ встановлює *теорема 3*. Для спрощення викладу матеріалу будемо вважати, що у разі $r_1 = 0$ розглядаємо рівномірне наближення функції з інтерполюванням лише у точках β_j $\left(j = \overline{1, r_2}\right)$, а для $r_2 = 0$ — з інтерполюванням у точках α_i $\left(i = \overline{1, r_1}\right)$.

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2007, вип. 6, 77-90

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $\left[\alpha_{r_1},\beta_{r_2}\right]$, тоді:

а) достатньою умовою існування рівномірного наближення (1) функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n ($n > r_1 + r_2 - 3$) й експоненти із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у точках α_i $\left(i=\overline{1,r_1}\right)$ і β_j $\left(j=\overline{1,r_2}\right)$ є справдження нерівностей (9), у яких

$$D_1\left(U;z_{i+i_1},z_{i+i_2}\right)=\begin{cases}U\left(z_{i+1}\right)-U\left(z_i\right), & \text{якщо } i<r_1,\\ U\left(z_{i+2}\right)+U\left(z_{i+1}\right)-2U\left(z_i\right), & \text{якщо } i=r_1,\\ U\left(z_{i+2}\right)-U\left(z_i\right), & \text{якщо } r_1 < i<n+2-r_2,\\ 2U\left(z_{i+2}\right)-U\left(z_{i+1}\right)-U\left(z_i\right), & \text{якщо } i=n+3-r_2,\\ U\left(z_{i+2}\right)-U\left(z_{i+1}\right), & \text{якщо } n+4-r_2\le i\le n+2,\end{cases} \tag{38}$$

$$i_1=\begin{cases}0, & \text{якщо } i\le n+3-r_2,\\ 1, & \text{якщо } n+4-r_2\le i\le n+2,\end{cases}\qquad i_2=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\le r_1,\\ 2, & \text{якщо } r_1 < i\le n+3-r_2,\end{cases}$$

$$z_i=\alpha_{r_1-i+1},\quad i=\overline{1,r_1};\quad z_i=\beta_{i-n-4+r_2},\quad i=\overline{n+5-r_2,n+4};$$

б) у випадку виконання умов пункту *а* існує єдине рівномірне наближення (1) функції $f(x)$ сумою многочлена степеня n ($n > r_1 + r_2 - 3$) й експоненти з найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та точним відтворенням її значення у точках α_i $\left(i=\overline{1,r_1}\right)$ і β_j $\left(j=\overline{1,r_2}\right)$, а його параметри задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases}f\left(\alpha_j\right)-\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\alpha_j^i-Ae^{p\alpha_j}=0, \quad j=\overline{1,r_1},\\ f\left(z_j\right)-\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz_j^i-Ae^{pz_j}=(-1)^j\mu, \quad j=\overline{r_1+1,n+4-r_2},\\ f\left(\beta_{j-n-4+r_2}\right)-\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\beta_{j-n-4+r_2}^i-Ae^{p\beta_{j-n-4+r_2}}=0, \quad j=\overline{n+5-r_2,n+4},\end{cases} \tag{39}$$

де $z_j\left(j=\overline{r_1+1,n+4-r_2}\right)$ — упорядковані за зростанням точки альтернанса.

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення *теореми 2* і базується на характеристичній теоремі про існування та єдиність найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом на відрізку [α, β] й точним відтворенням її значень у зовнішніх точках [2].

3. Визначення параметрів рівномірного наближення

Згідно з теоремою про існування та єдиність найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ нелінійним виразом з інтерполюванням [2] параметри рівномірного наближення функції $f(x)$ виразом (1), якщо таке існує, можна визначити за схемою Ремеза. Це рівномірне наближення у випадку інтерполювання в обох крайніх точках відрізка α та β має $n+2$ точки альтернанса, а у разі інтерполювання лише в одній із крайніх точок — $n+3$ точки альтернанса відповідно.

Нехай $z_i\left(i=\overline{2,n+3}\right)$ — точки альтернанса для наближення з інтерполюванням в обох крайніх точках відрізка, $z_i\left(i=\overline{2,\, n+4}\right)$ — точки альтернанса у разі наближення з інтерполюванням лише у точці α, а $z_i\left(i=\overline{1,n+3}\right)$ — відповідно з інтерполюванням у точці β. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови *теореми 2*, а точки альтернанса відомі, то параметри $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ й A чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку [α, β] та інтерполюванням у крайніх точках відрізка визначаються за формулами

$$A=D_{n+1}\left(f;z_1,z_2,...,z_{n+3}\right)\big/D_{n+1}\left(\varphi;z_1,z_2,...,z_{n+3}\right); \tag{40}$$

$$a_k=\frac{D_k\left(f;z_1,...,z_{k+2}\right)-\sum\limits_{i=k+1}^{n}a_iD_k\left(s_i;z_1,...,z_{k+2}\right)-AD_k\left(\varphi;z_1,...,z_{k+2}\right)}{D_k\left(s_k;z_1,...,z_{k+2}\right)},\ k=\overline{1,n}, \tag{41}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left[f\left(z_2\right)+f\left(z_3\right)-\sum_{i=1}^{n}a_i\left(z_2^i+z_3^i\right)-A\left(e^{pz_2}+e^{pz_3}\right)\right], \tag{42}$$

де $\varphi(p,x)=e^{px}$, вирази $D_k(U;z_i,z_{i+1},\ldots,z_{i+k+1})$ визначаються залежно від точок інтерполювання за відповідними формулами (12)-(15). Значення параметра p є розв'язком рівняння (31).

Розв'язок рівняння (31) шукаємо з урахуванням його властивостей, встановлених під час доведення *теореми 2*. Оскільки ліва частина цього рівняння є експоненціальною функцією, то його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння (31)

$$g_n\left(p\right)=V^{(n)},\quad g_n\left(p\right)=\ln\left(\omega_n\left(p\right)\right),\quad V^{(n)}=\ln\left(W^{(n)}\right). \tag{43}$$

Розв'язок рівняння (43) обчислюємо за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1}=p_i-\frac{g_n\left(p_i\right)-V^{(n)}}{g_n'\left(p_i\right)},\quad i=0,1,2,....,\tag{44}$$

де

$$g_n'\left(p\right)=\frac{D_{n+1}\left(\overline{\varphi};z_2,z_3,...,z_{n+4}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi;\,z_2,z_3,...,z_{n+4}\right)}-\frac{D_{n+1}\left(\overline{\varphi};z_1,z_2,...,z_{n+3}\right)}{D_{n+1}\left(\varphi;z_1,z_2,...,z_{n+3}\right)}; \tag{45}$$

$$\overline{\varphi}\left(p;z\right)=ze^{pz};\quad \varphi\left(p,z\right)=e^{pz};$$

$$p_0=\operatorname{sign}\left(W^{(n)}-W_0^{(n)}\right)\frac{2\ \left|\ V^{(n)}\right|}{z_{n+4}-z_{n+3}+z_2-z_1}; \tag{46}$$

вирази $W^{(n)}$, $W_0^{(n)}$ і $D_k\left(U; z_i, z_{i+1}, ..., z_{i+k+1}\right)$ визначаємо залежно від точок інтерполювання за відповідними формулами (10)-(15). Тут початкове значення наближення p_0 шуканого кореня рівняння (31) визначено із врахуванням подання (33). З доведення *теореми 2* випливає, що за такого вибору значення p_0 його знак завжди співпадатиме зі знаком шуканого розв'язку. Співпадання знаків необхідне для забезпечення стійкості ітераційного методу (41), оскільки функція $g_n(p)$ має розрив у точці $p = 0$. За такого вибору початкового значення p_0 проміжні значення p_i завжди будуть однакового знаку з шуканим розв'язком і, очевидно, не мінятимуть знаку.

Під час розв'язування тестових задач ітераційний процес (44) збігався за три-чотири ітерації.

У програмній реалізації алгоритму рівномірної апроксимації з інтерполюванням виразом (1) для довільного n значення величин, що входять у трансцендентне рівняння (31), отримуємо за схемою послідовного виключення, застосованою під час доведення *теореми 2*.

Висновки. Достатньою умовою існування рівномірного наближення (1) функції $f(x)$ сумою полінома й експоненти з найменшою абсолютною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ й інтерполюванням у крайніх точках відрізка, а також і зовнішніх його точках, є виконання нерівностей (9) із урахуванням (14), (15) та (38). Цим умовам задовольняють, зокрема, функції $f(x) \in C^n[\alpha, \beta]$, відмінні від полінома $(n + 1)$-го степеня, n-на похідна яких строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Параметри $a_i\left(i = \overline{0, n}\right)$ і A такого рівномірного наближення визначаються за формулами (40)-(42). Значення параметра p є коренем трансцендентного рівняння (31). Для знаходження розв'язку цього рівняння запропоновано ітераційну схему (44).

Найкраще рівномірне наближення функції виразом (1) з точним відтворенням її значення у крайніх точках відрізка використовується для побудови неперервних мінімаксних сплайн-наближень.

Література

[1] *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — К.: Наук. думка, 1980. — 352 с.

[2] *Попов Б. А., Малачивский П. С.* Наилучшие чебышевские приближения суммой многочлена и нелинейных функций. — Львов, 1984. — 70 с. — (Препр. / АН УССР Физико-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко; № 85).

[3] *Kobayashi Y., Ohkita M., Inoue M.* On the use exponential function in approximation of elliptic integrals // Math. Comput. Simulation, — 1979. —Vol. 21, № 2. — P. 226-230.

[4] *Воробель Р. А., Попов Б. А.* Равномерное приближение экспоненциальными и степенными выражениями с условием // Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. — К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1981. — Вып. 5, часть 1. — С. 158-170.

[5] *Луцків М. М., Малачівський П. С.* Апроксимація залежності оптичної щільності від товщини шару фарби на відбитку // Кваліологія книги. — Львів, 2004. — № 5. — С. 95-102.

[6] *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.

[7] *Воробель Р. А., Попов Б. А.* Равномерное приближение линейно-экспоненциальными и линейно-степенными выражениями с условием // Алгоритмы и программы для вычисления функций на ЭЦВМ. — К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1981. — Вып. 5, Часть 1. — С. 171-180.

[8] *Dunham C., Zhu C.* Strong uniqueness of nonlinear Chebyshev approximation (with interpolation) // Numerical mathematics and computing, Proc. 20th Manitoba Conf., Winnipeg / Can. 1990, Congr. Numerantium 80, 161-169 (1991).

[9] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.

[10] *Малачівський П.* Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 134-145.

Uniform approximation of function by a sum of the polynomial and the exponential with interpolation

Petro Malachivskyy

The sufficient conditions of existence of uniform (Chebyshev, minimax) function approximation by a sum of the polynomial and the exponential with least absolute error and with interpolation in external points are established. The algorithm of parameter determining of such approximation by Remez method is constructed. The application of the iterative method for calculation of nonlinear parameter value is substantiated.

Равномерное приближение функции суммой многочлена и экспоненты с интерполированием

Петро Малачивский

Установлены достаточные условия существования равномерного (чебишевского, минимаксного) приближения функции суммой многочлена и экспоненты с наименьшей абсолютной погрешностью и интерполированием во внешних точках. Предложен алгоритм определения параметров такого равномерного приближения по схеме Ремеза. Обосновано применение итерационного метода для вычисления значения нелинейного параметра.

Отримано 03.10.07