

## Локально градієнтний підхід у термомеханіці

Ольга Грицина<sup>1</sup>, Тарас Нагірний<sup>2</sup>, Костянтин Червінка<sup>3</sup><sup>1</sup> к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, Україна, 79005, e-mail: gryt@cmm.lviv.ua<sup>2</sup> д. ф.-м. н., професор, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, Україна, 79005; Зеленогурський Університет, вул. проф. Шафрана, 4, Зелена Гура, Польща, 65-516, e-mail: tnagirny@yahoo.com<sup>3</sup> к. ф.-м. н., Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, Україна, 79000, e-mail: k.tchervinka@gmail.com

*Подано загальну схему побудови математичних моделей за локально градієнтного підходу в термомеханіці та проведено огляд праць авторів у цьому напрямку. Підхід ґрунтується на використанні основних засад термодинаміки нерівноважних процесів та розширенні термодинамічного принципу локальної рівноваги на локально неоднорідні системи. Простір базових параметрів стану введено градієнт хімічного потенціалу, збурення якого ототожнюється зі збуренням енергії взаємодії. Приведено основні результати досліджень пружних, термпружних, електротермпружних процесів в одно- та багатоконпонентних тілах простої геометрії, у тому числі тонких плівках та волокнах. Вказано, зокрема, що локально градієнтний підхід дає змогу описати вплив температури, домішок і довкілля на межу міцності та її розмірний ефект.*

**Ключові слова:** локально неоднорідні моделі термомеханіки, взаємозв'язані процеси, поверхневі явища, огляд.

**Вступ.** В останні десятиріччя у науковій літературі значна увага надається вивченню напружено-деформованого стану елементів конструкцій та приладів на основі моделей локально неоднорідної механіки, тобто із урахуванням нелокальної залежності між тензорами напружень та деформації. Серед нелокальних моделей механіки можна виокремити феноменологічні моделі [1, 2], у яких постулюється залежність між тензорами напружень  $\hat{\sigma}$  і деформації  $\hat{\epsilon}$ , та моделі, які ґрунтуються на загальних принципах термодинаміки нерівноважних процесів. Визначальне співвідношення для феноменологічних моделей у загальному випадку є таким

$$\hat{\sigma}(\vec{r}) = \int_{(V)} \hat{\chi}^{(4)}(|\vec{r} - \vec{r}'|) : \hat{\epsilon}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (1)$$

де  $\hat{\chi}^{(4)}(|\vec{r} - \vec{r}'|)$  — функція впливу (тензор четвертого рангу), яка залежить від віддалі між розглядуваною точкою з радіус-вектором  $\vec{r}$  та біжучою, радіус-вектор якої  $\vec{r}'$ ;  $(V)$  — довільно виділена область тіла.

Конкретизуючи функцію  $\hat{\chi}^{(4)}(\circ)$ , визначальне співвідношення (1) можна привести до вигляду

$$\hat{\sigma} = (1 - a\nabla^2)\hat{A}^{(4)} : \hat{e}, \quad (2)$$

або

$$(1 - b\nabla^2)\hat{\sigma} = \hat{A}^{(4)} : \hat{e}. \quad (3)$$

Тут  $\hat{A}^{(4)}$ ,  $a$ ,  $b$  — характеристики матеріалу.

Нелокальна залежність між тензорами  $\hat{\sigma}$  та  $\hat{e}$  дозволяє також враховувати локально градієнтний підхід у термомеханіці, започаткований роботами [3-5]. Згідно з цим підходом нелокальна залежність між напруженнями  $\hat{\sigma}$  та деформаціями  $\hat{e}$  може бути записана у вигляді [6]

$$(1 - b\nabla^2)\hat{\sigma} = (1 - b\nabla^2)\hat{B}^{(4)} : \hat{e} + (b_e e + b_\theta \theta)\hat{I}, \quad (4)$$

де  $e$  — кульова складова тензора деформації;  $\theta$  — температура;  $\hat{B}^{(4)}$  — тензор четвертого рангу;  $\hat{I}$  — одиничний тензор;  $b_e$ ,  $b_\theta$  — сталі величини.

За такого підходу, із врахуванням ефектів локальної градієнтності, побудовано низку математичних моделей пружних, термопружних одно- та багатокомпонентних тіл, у тому числі й електропровідних, опрацьовано методи розв'язування відповідних крайових задач математичної фізики та проведено широкий комплекс досліджень. Показано, зокрема, що такі моделі дозволяють описувати залежність міцності від температури, домішок та довкілля, а також різного роду розмірні ефекти.

У роботі подано загальну схему побудови визначальних співвідношень за локально градієнтного підходу в термомеханіці та проведено огляд праць авторів у цьому напрямку.

## 1. Вихідні співвідношення локально градієнтної електротермомеханіки твердих розчинів

Локально градієнтні моделі будуються на засадах термодинаміки нерівноважних процесів та нелінійної механіки. Об'єктом дослідження є деформівне тверде тіло, в якому окреслюються базові процеси. Для кожного з цих процесів формулюються відповідні балансові співвідношення, а також рівняння балансу повної енергії. Вони є основою для одержання рівняння балансу внутрішньої енергії, наслідком якого є визначальні співвідношення моделі. Загальну схему формулювання визначальних співвідношень проілюструємо на прикладі моделі локально градієнтної електротермомеханіки твердих розчинів. З цією метою розглянемо неферомагнітне деформівне тверде тіло, визначальними в якому є процеси деформування, масоперенесення, тепло- та електропровідності. Прийmemo, що твердий розчин складається зі скелета (підсистема 1) та домішок (підсистеми  $\overline{2, N}$ ).

Розглядувані процеси справджують рівняння збереження повної енергії  $E$ , енергії електромагнітного поля  $U_e$ , імпульсу механічного поступального руху  $\vec{k}_v$ , ентропії  $S$ , заряду, маси, а також рівняння Максвелла, які у локальній формі при нехтуванні конвективними складовими похідних за часом є такими

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \tau} &= \vec{\nabla} \cdot \left( \hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T \vec{J}_s - H_k \vec{J}_{mk} - \Phi \vec{J}_e + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right), \\ \frac{\partial U_e}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + (\vec{J}_e + \rho_e \vec{v}) \cdot \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} &= \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F}_e, \quad \frac{\partial S}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s + \sigma_s, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial \tau} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e, \quad \frac{\partial \rho_k}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{mk} + \sigma_{mk}, \quad (k = \overline{1, N}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} + \mu_0 (\vec{J}_e + \rho_e \vec{v}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e.\end{aligned}\quad (5)$$

Тут  $\vec{v}$  — вектор швидкості континууму центрів мас;  $\vec{J}_s$ ,  $\vec{J}_e$  — вектори потоків ентропії та електричного заряду;  $H_k$ ,  $\rho_k$ ,  $\sigma_{mk}$ ,  $\vec{J}_{mk}$  ( $k = \overline{1, N}$ ) — хімічний потенціал, густина, виробництво та вектор потоку маси  $k$ -ої компоненти твердого розчину;  $T$  — абсолютна температура;  $\Phi$  — термодинамічний електричний потенціал;  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  — вектори напруженості електричного та індукції магнітного полів;  $\vec{F}_e = (\vec{J}_e + \rho_e \vec{v}) \times \vec{B} + \rho_e \vec{E}$  — пондеромоторна сила;  $U_e = (\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0^{-1} \vec{B}^2)/2$ ;  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  — магнітна та електрична сталі;  $\tau$  — час,  $\vec{\nabla}$  — оператор Гамільтона. Тут і надалі значення індексу  $k = 1$  відповідає підсистемі скелета,  $k = \overline{2, N}$  — підсистемам домішок, а за індексами, що повторюються в доданку, проводиться підсумовування від 1 до  $N$ . Зазначимо, що для замкнених систем сума джерел маси дорівнює нулю ( $\sum_k \sigma_{mk} = 0$ ).

Головною ідеєю локально градієнтного підходу є подання потоків  $\vec{J}_{mk}$ ,  $\vec{J}_s$ ,  $\vec{J}_e$  сумою їх оборотних та необоротних складових [7, 8]

$$\begin{aligned}\vec{J}_{m1} &= -\frac{\partial \bar{\pi}_{m1}}{\partial \tau} + \vec{j}_{m1}, \quad \vec{J}_{ml} = \vec{j}_{ml} \quad l = \overline{2, N}, \\ \vec{J}_s &= -\frac{\partial \bar{\pi}_s}{\partial \tau} + \vec{j}_s, \quad \vec{J}_e = -\frac{\partial \bar{\pi}_e}{\partial \tau} + \vec{j}_e,\end{aligned}\quad (6)$$

де вектори  $\bar{\pi}_{m1}$ ,  $\bar{\pi}_s$ ,  $\bar{\pi}_e$  названо векторами зміщень відповідних величин. Однак розвиток одержали моделі, які враховують лише пружне зміщення маси скелета

$\bar{\pi}_{m1}$  та заряду  $\bar{\pi}_e$ . Слід відзначити, що основні співвідношення моделей локально градієнтної термомеханіки деформівних одно- та багатокомпонентних тіл, у тому числі й електропровідних, можна одержати на основі реологічних моделей шляхом виокремлення незатухаючої пам'яті для відповідних потоків [9, 10].

Наступний крок при побудові моделей полягає у конкретизації повної енергії  $E$ . Її приймаємо у вигляді суперпозиції внутрішньої енергії  $U$ , енергії руху  $K$  та енергії електромагнітного поля  $U_e$ . Для означення приросту енергії руху  $dK$  розглядалися випадки:

- класичного подання  $dK = \bar{v} \cdot d\bar{k}_v$ ,  $\bar{k}_v = \rho \bar{v}^2 / 2$ ;
- означення енергії  $K$  в просторі імпульсів відповідних форм руху та постулювання потоків як параметрів, спряжених до імпульсів. Такі моделі дозволили врахувати скінченні швидкості процесів теплопровідності та масоперенесення [8, 11-14], інерційність процесу деформування [15] та пружних зміщень маси [16, 17], а також описати вібраційне прискорення необоротних процесів, у тому числі й дифузії [15, 18].

У першому випадку з використанням співвідношень (5) та (6) отримаємо таке рівняння балансу енергії  $F$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} \equiv \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} - \bar{\pi}_{m1} \cdot \frac{\partial (\bar{\nabla} H_1)}{\partial \tau} - \bar{\pi}_s \cdot \frac{\partial (\bar{\nabla} T)}{\partial \tau} - \bar{\pi}_e \cdot \frac{\partial (\bar{\nabla} \Phi - \bar{E}')}{\partial \tau} - S \frac{\partial T}{\partial \tau} - \rho_k \frac{\partial H_k}{\partial \tau} - \rho_e \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - T \sigma_s - \bar{j}_s \cdot \bar{\nabla} T - \bar{j}_{mk} \cdot \bar{\nabla} H_k - \bar{j}_e \cdot (\bar{\nabla} \Phi - \bar{E}') - \sigma_{mk} (H_k - H_1). \quad (7)$$

Тут  $F = U - TS - \rho_k H_k - \rho_e \Phi - \bar{\pi}_{m1} \cdot \bar{\nabla} H_1 - \bar{\pi}_s \cdot \bar{\nabla} T - \bar{\pi}_e \cdot (\bar{\nabla} \Phi - \bar{E}')$ ,  $\bar{E}' = \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}$ .

Формула (7) є основою для формулювання рівнянь стану та кінетичних співвідношень. Таким чином, подання (6) дозволило ввести у простір параметрів стану градієнти хімічного потенціалу скелета, температури та термодинамічного електричного потенціалу, і у підсумку розширити термодинамічний принцип локальної рівноваги на локально неоднорідні системи.

У роботі [19] в рамках моделі термопружного тіла враховано тензорний характер хімічного потенціалу. Хімічний потенціал та спряжений до нього параметр — густину маси, прийнято тензорами другого рангу, тоді як вектор пружних зміщень маси — тензором третього рангу.

Для опису самодифузійних явищ розглядається термопружний твердий розчин, у якому частинки одного й того ж сорту можуть перебувати у зв'язаному (скелет) та вільному (домішки) станах [20]. При цьому підсистеми скелета й домішок можуть обмінюватися масою.

Основні модельні співвідношення для локально неоднорідного термопружного тіла в області структурних перетворень сформульовано в [21, 22]. Приймалося, що структурні перетворення, які описуються внутрішніми ступенями вільності (векторним та тензорним параметрами), можуть бути як оборотними, так і необоротними. Одержані співвідношення використано для опису процесу гартування.

## 2. Рівноважний стан деформівних твердих тіл із врахуванням ефектів локальної градієнтності

Дослідження рівноважних станів проводилося на основі лінеаризованих систем рівнянь згаданих вище моделей для тіл простої геометричної конфігурації. Враховуючи, що збурення хімічного потенціалу можна ототожнити зі збуренням енергії взаємодії [6], при постановці відповідних крайових задач математичної фізики приймалося, що значення хімічних потенціалів частинок на поверхні та в глибинних областях тіла є різними. Показано, що врахування різних умов взаємодії частинок у глибинних областях тіла та на його поверхнях призводить до неоднорідного напружено-деформованого стану й у підсумку дозволяє описувати приповерхневі явища [5, 23, 24]. Для прикладу на рис. 1 показано розподіл приведених напружень  $\sigma_{yy}$  у вільному від зовнішнього силового навантаження шарі товщини  $2l$  ( $|x| \leq l$ ,  $\xi^{-1}$  — характерний розмір області приповерхневої неоднорідності, стала величина). Бачимо, що розподіл напружень  $\sigma_{yy}$  є симетричним відносно серединної поверхні шару. На поверхнях тіла  $x = \pm l$  напруження  $\sigma_{yy}$  є розтягуючими. Напруження монотонно зменшуються при відході від зовнішніх поверхонь, стають нульовими у деяких точках  $x = \pm x_a$  й у глибинних областях є стискаючими. Для шарів, товщина яких є великою, порівняно з характерним розміром області приповерхневої неоднорідності ( $\xi l \gg 1$ ), неоднорідність у розподілі напружень є властивою для приповерхневих областей тіла, тоді як у глибинних областях напруження є майже незмінними. Для тонких плівок така неоднорідність характерна для всієї області тіла. Поверхневим напруженням властивий розмірний ефект — зі збільшенням товщини шару (безрозмірного параметра  $\xi l$ ) напруження  $\sigma_{yy}(\pm l)$  монотонно збільшуються, прямуючи до значення поверхневих напружень у півпросторі.

Однорідна температура не впливає на характер розподілу напружень, у тому числі на точку переходу розтягуючих приповерхневих напружень у стискаючі, однак може суттєво змінювати їх значення [25]. Розподіл домішок у тілі спрямований на «вирівнювання» неоднорідності хімічного потенціалу скелета. При цьому домішки можуть суттєво змінювати характерний розмір області приповерхневої неоднорідності. Залежно від співвідношення між параметрами скелета та домішок наявність останніх у тілі може призводити як до збільшення, так і до зменшення поверхневих напружень [26-28].

На основі порівняння гетеродифузії, яка враховує різні шляхи міграції домішкової речовини [29, 30], та опису дифузії за локально градієнтного підходу показано [28], що локально градієнтні моделі враховують внутрішню структуру тіл. До такого ж висновку дійшли у роботі [6] при співставленні та аналізі локально градієнтної та нелокальної теорій пружності.

Вплив електронної підсистеми на напружено-деформований стан в рамках моделі локально неоднорідного електропровідного термопружного твердого тіла вивчено в [8, 31]. У цих роботах показано, що подвійний електричний шар має

самоорганізаційну природу і спричинений приповерхневою неоднорідністю енергії взаємодії та силами Лоренца.

У низці робіт [20, 25, 31-34] для тіл простої геометрії досліджено та проаналізовано вплив кривини поверхні на закономірності розподілу компонент твердого розчину, напружено-деформований стан та поверхневий натяг  $f_p$ , а також його розмірний ефект. Показано, зокрема, що значення  $f_p$  лінійно залежить від однорідної температури тіла.

Проведені дослідження [6, 25-27, 31, 32, 35-37] засвідчили, що локально градієнтний підхід дозволяє описувати розмірний ефект межі міцності, а також вплив на межу міцності та її розмірний ефект температури, домішок та довкілля. За основу приймалися класичні критерії міцності. Показано, що напружено-деформований стан тіла, що перебуває під дією силового навантаження, є суперпозицією напружено-деформованого стану, спричиненого зовнішнім силовим навантаженням, та стану, зумовленого наявністю поверхні тіла. Домішки, температура та довкілля, впливаючи на напружено-деформований стан, зумовлений наявністю поверхні тіла, змінюють значення силового навантаження  $p^{kr}$ , що призводить до руйнування. Так, за однорідної температури та стаціонарного розподілу домішок, виходячи із першого класичного критерію міцності, для  $p^{kr}$ , що спричиняє руйнування товстих (порівняно з характерним розміром області приповерхневої неоднорідності) шарів одержано формулу

$$p^{kr} = \sigma_+ - \alpha \theta_a - \beta \eta_{2a}.$$

Тут  $\sigma_+$  — інтенсивність силового навантаження, що приводить до руйнування товстих шарів при початковій температурі ( $\theta = 0$ ) та за відсутності домішок,  $\theta_a, \eta_{2a}$  — збурення початкових значень температури та поверхневого хімічного потенціалу домішок,  $\alpha, \beta$  — сталі. Залежність межі міцності (приведеного значення  $p^{kr}$ ) від однорідної температури тіла ілюструють криві на рис. 2. Хрестиками відзначено експериментальні дані [38] для сплаву 10ВМЦ системи Nb-W-Mo-Zr.

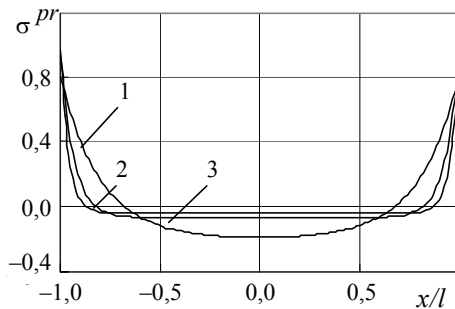


Рис. 1. Приведені напруження  $\sigma^{Pr}(x/l)$  у шарі товщини  $\xi/l = 5, 15, 25$  (криві 1-3)

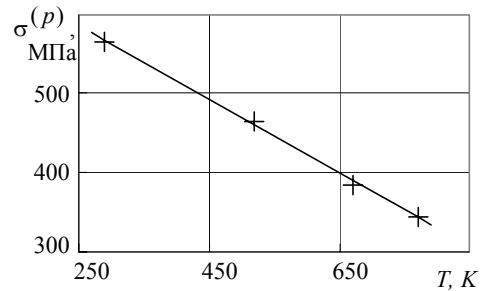


Рис. 2. Межа міцності в діапазоні температур 290..770 К (МПа)

Варіаційне формулювання крайових задач математичної фізики локально градієнтної термомеханіки та загальну схему їх чисельного дослідження з використанням апроксимацій найменших рухомих квадратів представлено в [39, 40].

Методику вивчення рівноважного стану локально неоднорідних термопружних твердих тіл у двовимірній постановці з використанням методу послідовних наближень запропоновано у роботах [6, 41]. Методика є ефективною для дослідження поведінки тіл, область яких може бути конформно відображена на зовнішність одиничного кола.

Низка публікацій [42-44] присвячена розробці методики дослідження рівноважних станів у кусково-однорідних одно- та двокомпонентних тілах. У роботі [43] вивчено рівноважний розподіл домішок та напружень у суцільній двошаровій системі куля-покриття. Такі ж дослідження для кусково-однорідних тіл з плоскими границями приведені у працях [42, 44]. Отримані розв'язки та їх аналіз є важливими для вибору раціональних параметрів одно- та багат шарових захисних покриттів.

### 3. Квазістатичні задачі

У роботах [28, 34, 45-48] розроблено методику розв'язування та вивчено закономірності механотермодифузійних процесів у тілах простої геометричної конфігурації у разі їх нагріву та насичення домішками. Приймалося, що домішки не впливають на процес теплопровідності, для опису якого використовувалося класичне рівняння, а при описі масоперенесення знехтувано впливом кульової складової тензора деформації на густини компонент твердого розчину. Методика ґрунтується на виокремленні головної частини розв'язку, що відповідає стаціонарному стану, до якого прямує система при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Це дозволило отримати розв'язки відповідних крайових задач у вигляді швидкозбіжних рядів.

На цій основі проведено широкий комплекс досліджень механотермодифузійних процесів в одно- та двокомпонентних тілах простої геометрії. Основна увага надавалася вивченню впливу температури та домішок на напружено-деформований стан, поверхневий натяг та міцність. При аналізі параметрів міцності за розрахункові вибрано поверхневі напруження. Дослідження поверхневих напружень проведено у випадках, коли одночасно і насичення домішками, і нагрів тіла спричиняють збільшення (зменшення) поверхневих напружень, а також коли один із згаданих процесів призводить до збільшення, а інший — до зменшення поверхневих напружень. На прикладі шару проаналізовано температурні режими, які дозволяють досягнути потрібного рівня поверхневих напружень (міцності) у процесі дифузійного насичення [34, 48].

### 4. Динамічні задачі

У роботах [49-52] опрацьовано методику дослідження хвильових процесів у пружних і термопружних тілах та твердих розчинах із врахуванням ефектів локальної неоднорідності. Методика базується на використанні операції осеред-

нення на періоді коливань та поданні шуканого розв'язку сумою коливної і повільно змінної на періоді коливань складових, а також асимптотичному розвиненні у ряд за малим параметром задачі.

На прикладі пружного шару, в наближенні хвиль основної гармоніки, вивчено вплив приповерхневої неоднорідності на частоти власних коливань за різних умов закріплення його поверхонь. Встановлено, що для шару із нерухомими поверхнями такий вплив є нехтовно малим, а для шару з вільними поверхнями — удвічі більшим, порівняно з шаром, одна із поверхонь якого закріплена. У роботах [51, 52] вивчено вплив однорідної температури та домішок за їх стаціонарного розподілу на частоти власних коливань шару. Показано, що для шарів, товщина яких значно більша за характерний розмір області приповерхневої неоднорідності, така залежність може бути врахована опосередковано завдяки врахуванню впливу температури та домішок на швидкості поширення пружної хвилі.

У рамках моделі локально градієнтного термопружного тіла, із врахуванням тензорного характеру хімічного потенціалу [19], показано, що модель враховує нелокальну залежність не лише між кульовими, але і девіаторними складовими тензорів напружень і деформацій та описує поряд з дисперсією хвиль стиску дисперсію хвиль зсуву.

У роботах [53-56] розроблено методику вивчення вкладу поверхневого чинника в акустичну емісію за раптового виникнення у тілі вільних поверхонь та твердих включень. Утворення нової поверхні тіла моделюється граничними умовами для хімічного потенціалу. Приймається, що у початковий момент часу  $\tau = 0$  у тілі реалізується рівноважний неоднорідний стан, зумовлений наявністю поверхні ( $S$ ). Для часу  $\tau = +0$  на поверхні ( $S$ ) + ( $S'$ ), де ( $S'$ ) — новоутворена поверхня, встановлюється значення хімічного потенціалу, властиве вільній поверхні. При виникненні включення на новоутвореній поверхні ( $S'$ ) миттєво встановлюється значення хімічного потенціалу, характерне новоутвореній кусково-однорідній системі. На цій основі вивчено вплив поверхневого чинника в акустичну емісію у разі раптового виникнення поверхні півпростору, кульової, циліндричної порожнини та пружного включення у вигляді шару в безмежному середовищі. Досліджено також вплив термодинамічного електричного потенціалу на величину стрибків напружень при переході через фронт хвилі розширення. У працях [16, 17] у рамках моделі узагальненого локально неоднорідного твердого тіла враховано та досліджено також вклад в акустичну емісію інерційності пружних зміщень.

**Висновки.** За локально градієнтного підходу в термомеханіці термодинамічний принцип локальної рівноваги розширено на локально неоднорідні системи. При цьому простір базових параметрів розширено градієнтом хімічного потенціалу скелета, збурення якого ототожнено зі збуренням енергії взаємодії. На цій основі побудовано низку математичних моделей, дано постановку та опрацьовано методи розв'язування відповідних крайових задач математичної фізики.

Проведений комплекс досліджень дозволив вивчити закономірності взаємозв'язаних полів у пружних, термопружних, електротермопружних одно- та багатокomпонентних тілах, у тому числі тонких плітках та волокнах, із врахуван-



ням ефектів приповерхневої неоднорідності. Встановлено, зокрема, що локально градієнтні моделі термомеханіки дозволяють описувати вплив температури, домішок та довілля на межу міцності та її розмірний ефект.

### Література

- [1] *Edelen D. G., Green A. E., Laws N.* Nonlocal Continuum Mechanics // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1971. — Vol. 43, № 1. — P. 36-44.
- [2] *Eringen A. C., Edelen D. G.* On Nonlocal Elasticity // Int. J. Eng. Sci. — 1972. — Vol. 10. — P. 233-248.
- [3] *Бурак Я. Й.* Локально-градієнтний підхід в термомеханіці електропровідних неферомагнітних тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1988. — № 4. — С.23-26.
- [4] *Нагірний Т.С.* Термоупругие процессы в вязкоупругих телах с учетом градиентности полей температуры и химического потенциала // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — Вып. 29. — С. 34-37.
- [5] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Про термодинамічне моделювання приповерхневих явищ в термомеханіці // Доп. АН України. Сер. А. — 1991. — № 9. — С. 66-70.
- [6] *Бурак Я., Чапля Є., Нагірний Т.* та ін. Фізико-математичне моделювання складних систем / За ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
- [7] *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки  $N$ -компонентного твердого розчину // Физ.-хим. механика материалов. — 1991. — № 1. — С.9-13.
- [8] *Бурак Я. И., Нагірний Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах // Прикладная механика. — 1992. — Т. 28, № 12. — С. 3–23.
- [9] *Нагірний Т. С.* До питання про вибір функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях механіки суцільного середовища // ДАН України, 1992, №2, с.49-53
- [10] *Нагірний Т. С.* Термодинамічний підхід до формулювання конститутивних співвідношень термомеханічних реологічних систем // Доп. НАН України. — 1997. — № 2. — С. 52-56.
- [11] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Термодинамічні аспекти узагальненої термомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1990. — № 8. — С. 34-37.
- [12] *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1990. — № 9. — С. 32-35.
- [13] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Термодинамічні основи локально-градієнтної узагальненої термомеханіки // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1992. — Вып. 35. — С. 20-24.
- [14] *Бурак Я. Й., Зозуляк Ю. Д., Нагірний Т. С.* Визначальні співвідношення інерційної локально-нерівноважної термопружності // ДАН України. — 1993. — № 6. — С. 48-53.
- [15] *Burak Ya., Nagirny T.* Mathematical modelling of the nonequilibrium processes in locally nonhomogeneous thermoelastic systems // Zeszyty naukowe politechniki Rzeszowskiej. — 1996. — № 151. — Mechanika. — z. 48. — P. 21-28.
- [16] *Бурак Я. Й., Говда Ю. І., Нагірний Т. С.* Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень // Доп. НАН України. — 1996. — № 2. — С. 39-43.
- [17] *Burak Ya., Govda Yu., Nagirny T.* Thermodynamical modelling of the dynamical processes in thermoelastic systems allowing for the interface phenomena // XVII Symp. Vibration in physical systems. — Poland, Poznan', 1996. Abstracts. — P. 82-83.

- [18] *Burak Ya., Nagirny T.* Thermodynamical aspects of vibrational acceleration of nonequilibrium processes // XVI Symp. Vibration in physical systems. — Poland, Poznan' 1994, May 26-28. Abstracts. — P. 75-76.
- [19] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Модель термопружного твердого тіла з урахуванням ефектів локальної градієнтності та тензорного характеру хімічного потенціалу // Доп. НАН України. — 2000. — № 2. — С. 50-53.
- [20] *Грицина О. Р.* Математичне моделювання та дослідження механо-дифузійних процесів у твердих розчинах із врахуванням ефектів локальної градієнтності: Автореф. дис. ... к-та фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Львів, 1995. — 16 с.
- [21] *Нагірний Т. С.* Уравнения термомеханики электропроводных неферромагнитных тел с учетом структурных превращений // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1990. — Вып. 31. — С. 21-24.
- [22] *Нагірний Т. С.* Моделювання термопружного деформування твердих тіл із внутрішніми ступенями вільності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1991. — № 3. — С. 79-83.
- [23] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Про один підхід до врахування приповерхневої неоднорідності в термомеханіці твердих розчинів // Доп. АН України. Сер. А. — 1991. — № 11. — С. 47-51.
- [24] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням поверхневих явищ // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — № 4. — С. 24-30.
- [25] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність // Доп. НАН України. — 2000. — № 10. — С. 57-62.
- [26] *Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Дослідження впливу домішок на міцність розтягнутого циліндра // Машинознавство. — 1999. — № 8. — С. 13-18.
- [27] *Бурак Я. И., Нагірний Т. С., Грицина О. Р., Червінка К. А.* Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. — 2000. — № 6. — С. 35-43.
- [28] *Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Моделювання та дослідження квазістатичних механо-дифузійних процесів із врахуванням приповерхневої неоднорідності // У зб.: Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання. — Львів: Сплайн, 2004. — С. 159-174.
- [29] *Aifantis E. C.* Continuum basis for diffusion in regions with multiple diffusivity // J. Appl. Phys. — 1979. — Vol. 50, № 3. — P. 1334-1338.
- [30] *Бурак Я. И., Галапац Б. П., Чапля С. Я.* Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физ.-хим. механика материалов. — 1980. — № 5. — С. 71-77.
- [31] *Нагірний Т. С.* Термодинамічні моделі та методи у локально градієнтній термомеханіці з врахуванням приповерхневих явищ: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Львів, 1998. — 36 с.
- [32] *Нагірний Т. С.* Поверхневі напруження в шарі. Поверхневий натяг та міцність шару // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1999. — Т. 42, № 4. — С. 111-115.
- [33] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Вплив кривини поверхні та домішок на поверхневий натяг у кулі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2001. — Т. 44, № 1. — С. 12-16.
- [34] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Локально градієнтний підхід та вплив температури й домішок на поверхневий натяг у шарі // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 38-49.

- [35] *Nagirny T., Burak Ya.* Thermodynamical models of continual description of the coupled processes in thin-film systems // In: «Trends in Continuum Physics», Word Scientific, 1999 — P. 263-276.
- [36] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Вплив домішок на міцність розтягнутого шару // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2000. — № 4. — С. 87-90.
- [37] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Моделювання і дослідження впливу домішок на міцність порожнистого циліндра // Машинознавство. — 2002. — №4. — С. 12-15.
- [38] *Бухановский В. В., Борисенко В. А., Харченко В. К.* Характеристики кратковременной прочности и пластичности ниобиевого сплава 10ВМЦ системы Nb-W-Mo-Zr в диапазоне температур 290...2270 К // Проблемы прочности. — 1996. — № 6. — С. 113-120.
- [39] *Bozhenko B., Hrytsyna O., Nahirnyj T.* Surface stresses in layer and admixture effect on strength // In: «New Trends in Statics and Dynamics of Buildings». — Bratislava: Slovak University of Technology in Bratislava. — 2004. — P. 22-25.
- [40] *Боженко Б. Л., Нагірний Т. С.* До чисельного розв'язування варіаційних задач локально градієнтної механіки з використанням апроксимацій найменших рухомих квадратів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 2. — С. 124-128.
- [41] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* До визначення хімічного потенціалу у двовимірних задачах моделі локально градієнтного термопружного тіла // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2004. — Вип. 63. — С. 108-113.
- [42] *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Моделювання та дослідження механо-концентраційних полів у приконтактних областях двокомпонентних кусково-однорідних систем // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1994. — № 1. — С. 78-88.
- [43] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Рівноважний стан насиченої домішками кулі з покриттям з урахуванням приповерхневих явищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 2. — С. 171-175.
- [44] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Напружений стан і розподіл домішок у півпросторі з покриттям із урахуванням приповерхневої неоднорідності // У зб.: Моделювання та інформаційні технології. — Вип. 15. — К.: 2002. — С. 15-22.
- [45] *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Механодифузійні процеси у півпросторі з врахуванням поверхневих явищ // Доп. АН України. — 1992. — № 11. — С. 37-40.
- [46] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність циліндра в процесі його насичення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т. 43, № 3. — С. 122-126.
- [47] *Нагірний Т. С., Грицина О. Р.* Вплив домішок на приповерхневу неоднорідність та міцність шару в процесі його насичення // Доп. НАН України. — 2001. — № 4. — С. 51-57.
- [48] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Механотермодифузійні процеси у розтягнутій пластині із врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т. 45, № 1. — С. 123-127.
- [49] *Burak Y., Nagirny T.* The problems of mathematical modelling of wave processes in nonlinear thermomechanic systems // In Vibration in Physical Systems. — Poznan' 1998. — P. 81-82.
- [50] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Моделювання хвильових процесів у деформівних твердих тілах з врахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1999. — Вип. 54. — С. 117-124.

- [51] *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Моделювання та дослідження впливу температури на власні коливання шару // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2002. — Вип. 60. — С. 102-106.
- [52] *Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Про вплив домішок на частоти власних коливань шару // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2006. — У друці.
- [53] *Нагірний Т. С.* До питання про опис акустичної емісії та оцінки амплітуди механічних коливань у півпросторі при утворенні його поверхні // ДАН України. — 1993. — № 8. — С. 17-20.
- [54] *Нагірний Т. С., Говда Ю. І.* Класифікація задач локально-градієнтної механіки та одна динамічна задача для середовища зі сферичною порожниною // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1997. — Вип. 47. — С. 107-115.
- [55] *Burak Y., Nagirny T.* To Describe the Contribution of Interface Factor on Acoustical Emission in Solids // Zeszyty naukowe politechniki Rzeszowskiej. — 2002. — № 197. — Mechanika, z. 60. — P. 67-75.
- [56] *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Математичне моделювання вкладу приповерхневого фактору в акустичну емісію у деформівних твердих тілах // В кн.: Інформаційно-математичне моделювання складних систем. — Львів: Ахіл, 2002. — С. 209-216.

## Local Gradient Approach in Thermomechanics

Olha Hrytsyna, Taras Nahirnyy, Kostiantyn Tchervinka

*The general scheme for construction of mathematical models of local gradient approach in thermomechanics are presented and the papers of the authors in this area reviewed. This approach is based on the fundamental principles of thermodynamics of non-equilibrium processes and expands the local equilibrium principle for local nonhomogeneous bodies. The base parameter space is extended with gradient of chemical potential, which disturbance equates to disturbance of interaction energy. The basic results of researches are presented for elastic, thermoelastic, electrothermoelastic processes in simple geometry bodies and solid solutions including thin films and fibers. It is indicated, in particular, that local gradient approach allows describing influence of temperature, admixtures and environment on the strength and its size effect.*

## Локально градиентный подход в термомеханике

Ольга Грицина, Тарас Нагирный, Константин Червинка

*Представлена общая схема построения математических моделей при локально градиентном подходе в термомеханике и проведен обзор трудов авторов в этом направлении. Подход базируется на использовании основных принципов термодинамики неравновесных процессов и расширении принципа локального равновесия на локально неоднородные системы. В пространство базовых параметров введен градиент химического потенциала, возмущение которого отождествляется с возмущением энергии взаимодействия. Представлены основные результаты исследований упругих, термоупругих, электроупругих процессов в одно- и многокомпонентных телах простой геометрии, в том числе тонких пленках и волокнах. Указано, в частности, что локально градиентный подход позволяет описывать влияние температуры, примесей и окружающей среды на предел прочности и его масштабный эффект.*

Отримано 17.09.05