УДК 539.3

Усталені коливання трансверсально-ізотропного шару з масивним тілом

Михайло Сухорольський

Д. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: sukhorolsky@lviv.net

Розглядається задача про усталені коливання трансверсально-ізотропного шару, що взаємодіє за умов ідеального контакту з масивним тілом. Методом функції Гріна в поєднанні з методом Фур'є (розвиненням в подвійні тригонометричні ряди за координатами у серединній площині шару) задача зведена до системи трьох інтегральних рівнянь відносно контактних напружень. Сингулярні розв'язки відповідної крайової задачі зображено у вигляді границь слабко збіжних послідовностей узагальнених часткових сум рядів (підсумовуваних узагальненими методами). Побудова числового розв'язку відповідної системи інтегральних рівнянь ґрунтується на ідеї методу колокацій і апроксимації функцій послідовностями узагальнених часткових сум рядів .

Ключові слова: коливання шару, динамічні контактні задачі, послідовнісний підхід до побудови розв'язків крайових задач.

Вступ. Аналітичні та числові розв'язки стаціонарних та нестаціонарних задач про взаємодію пружних тіл з гладкими тілами та тілами, що мають в області контакту кутові точки чи ребра, побудовані [1-3, 5] за наявності сингулярних розв'язків в явному вигляді відповідних рівнянь теорії пружності. У роботі [6] розглядаються задачі про усталені коливання ізотропного шару, що взаємодіє за умов ідеального контакту з жорсткою основою по одній лицевій поверхні і масивним абсолютно жорстким тілом в довільній області другої лицевої поверхні. Побудова числового розв'язку задачі ґрунтується на послідовнісному зображенні узагальнених функцій, зведенні до інтегральних рівнянь та розв'язуванні їх методом колокацій.

У даній роботі розглядається задача про усталені коливання трансверсально-ізотропного шару, що лежить на пружній основі Вінклера і взаємодіє за умов ідеального контакту в довільній області іншої лицевої поверхні з масивним тілом. Сингулярний розв'язок відповідної задачі теорії пружності зображено у вигляді границь послідовностей узагальнених часткових сум подвійних рядів Фур'є за тригонометричними системами функцій [4]. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь відносно контактних напружень, що виникають в області взаємодії масивного тіла і шару. Побудова числових розв'язків інтегральних рівнянь ґрунтується на поєднанні методу колокацій і методу апроксимації функцій послідовностями узагальнених часткових сум рядів.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про взаємодію за умов ідеального контакту пружного трансверсально-ізотропного шару (товщини $2h$) з основою Вінклера по лицевій поверхні S^- і циліндричним абсолютно твердим тілом в області D (основою циліндра) на лицевій поверхні S^+, $D \subset S^+$. Приймаємо також, що область D симетрична відносно двох взаємно перпендикулярних осей $O'\alpha_1'$ і $O'\alpha_2'$, а зовнішні сили, що діють на циліндр, приведені до точки O' і задаються у вигляді

$$M_1 = M_{10} e^{i\theta t}, \quad M_{21} = M_{20} e^{i\theta t}, \quad P_3 = P_{30} e^{i\theta t},$$

де M_{10} і M_{20} — амплітуди моментів відносно осей $O'\alpha_1'$ і $O'\alpha_2'$; P_{30} — амплітуда рівнодійної сили, що напрямлена за віссю $O'\alpha_3'$, перпендикулярно до площини $\alpha_1' O' \alpha_2'$; θ — частота вимушених коливань; t — часова координата.

Задача полягає у відшуканні амплітуд напружень $\sigma_{31}^-, \sigma_{32}^-, \sigma_{33}^-$ (за напрямками осей $O'\alpha_1'$, $O'\alpha_2'$, $O'\alpha_3'$) на поверхні S^- і амплітуд напружень $\sigma_{31}^+, \sigma_{32}^+, \sigma_{33}^+$ в області $D \subset S^+$.

Усталені коливання шару описуються рівняннями

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_3} + \rho\theta^2 u_i = 0 ,$$

$$\sigma_{ii} = E_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} \right) + \lambda' \sigma_{33} ,$$

$$\sigma_{33} = E_0' \left[\lambda' \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \right],$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = G \left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} \right) \quad \left(i, j = \overline{1, 3}, i \neq j \right), \tag{1}$$

де

$$E_0 = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad E_0' = \frac{E'(1-\nu)}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}; \quad \lambda' = \frac{\nu' E}{(1-\nu)E'}; \quad G = \frac{E}{2(1-\nu)};$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — прямокутні координати з початком у серединній площині шару; $\alpha_1' = \alpha_1 - \alpha_1^0$, $\alpha_2' = \alpha_2 - \alpha_2^0$, $\alpha_3' = \alpha_3 - h$ — формули переходу від системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ до системи координат $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ у точці $O'\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$; σ_{ij} — амплітуди компонент тензора напружень; u_i — амплітуди компонент вектора переміщень; E, E', ν, ν', G' — пружні сталі; ρ — густина матеріалу.

Систему рівнянь (1) можна звести до двох ключових рівнянь відносно амплітуди переміщення u_3 і функції $\omega = \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}$ (амплітуди подвійного жорсткого повороту)

$$A_3 \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha_3^4} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^4}\left(A_1 \Delta u_3 + A_4 \theta^2 u_3\right) + A_2 \Delta\Delta u_3 + A_5 \theta^2 \Delta u_3 + \theta^4 u_3 = 0,$$

$$G' \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_3^2} + G\Delta\omega + \theta^2 \omega = 0, \tag{2}$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2};\ A_1 = E_0'\left(E_0 - 2\lambda' G'\right);\ A_2 = G'\left[E_0 + \left(\lambda'\right)^2 E_0'\right];\ A_3 = G' E_0';$$

$$A_4 = G' + E_0';\ A_5 = E_0 + \left(\lambda'\right)^2 E_0' + G'.$$

Іншу комбінацію амплітуд компонент вектора переміщень $e = \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}$ знаходимо з такого рівняння

$$\left(G' + \lambda' E_0'\right)\frac{\partial e}{\partial \alpha_3} = -E_0' \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_3^2} - G' \Delta u_3 - \theta^2. \tag{3}$$

Граничні умови взаємодії шару з основою Вінклера задаємо у вигляді

$$u_i\left(\alpha_1, \alpha_2, -h\right) = 0\ \left(i = 1,2\right),\quad u_3\left(\alpha_1, \alpha_2, -h\right) = \kappa_3 \sigma\left(\alpha_1, \alpha_2, -h\right), \tag{4}$$

тут κ_3 — коефіцієнт, що характеризує жорсткість основи.

На поверхні S^+ задаємо змішані граничні умови

$$u_i\left(\alpha_1, \alpha_2, h\right) = 0\quad \left(i = 1,2\right),$$

$$u_3\left(\alpha_1, \alpha_2, h\right) = u_0 + \psi_1 \alpha_1 + \psi_2 \alpha_2,\ \ \alpha\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \in D; \tag{5}$$

$$\sigma_{3i}\left(\alpha_1, \alpha_2, h\right) = 0\ \left(i = 1,2\right),\ \ \alpha\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \overline{\in} D, \tag{6}$$

де ψ_1, ψ_2 — амплітуди кутів повороту відносно осей $O'\alpha_1'$, $O'\alpha_2'$; u_0 — ампулітуда переміщення у напрямі осі $O'\alpha_3'$ основи масивного тіла.

Рівняння руху шару доповнюємо рівняннями руху тіла

$$\iint\limits_D \sigma_{33}^+ ds - m\theta^2 u_0 = P_{30},$$

$$\iint\limits_D \sigma_{33}^+ \alpha_2 ds - i_1 \theta^2 \psi_1 = M_{10},\ \iint\limits_D \sigma_{33}^+ \alpha_1 ds - i_2 \theta^2 \psi_2 = M_{20}, \tag{7}$$

де i_1, i_2 — моменти інерції відносно осей $O'\alpha'_1$, $O'\alpha'_2$; m — маса абсолютно твердого тіла.

Розв'язок задачі шукаємо у паралелепіпеді $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : 0 < \alpha_i < l_i;$ $|\alpha_3| < h\}$ (i = 1, 2) зі сторонами основи l_1, l_2 і висотою $2h$, продовживши шукані функції за межі бокових граней паралелепіпеда як періодичні функції. При цьому приймаємо, що центр області D співпадає з центром нижньої основи паралелепіпеда, $\alpha_1^0 = l_1/2, \alpha_2^0 = l_2/2$, і довжини сторін основи паралелепіпеда значно більші, ніж товщина шару та діаметр області D.

2. Побудова сингулярного розв'язку

Насамперед шукаємо систему регулярних розв'язків трьох задач про дію поверхневого $(\alpha_3 = h)$ навантаження на шар, що взаємодіє з основою Вінклера. Приймаємо, що навантаження локалізовано у квадраті $\Pi_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_i - \alpha_i^0| < \varepsilon\}$ (i = 1, 2) зі сторонами довжини 2ε, $\Pi \subset S^+$. Амплітуди поверхневих навантажень задаємо у формі

$$\sigma_{3j}(\alpha_1, \alpha_2, h) = \sigma_{3j}^i, \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right), \tag{8}$$

де

$$\sigma_{3j}^i = P^i \delta_{ij}\, \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon) \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right); \tag{9}$$

$$\delta(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{|\alpha_i - \alpha_i^0|}{\varepsilon}\right), & |\alpha_i - \alpha_i^0| \le \varepsilon, \\ 0, & |\alpha_i - \alpha_i^0| > \varepsilon \end{cases} \quad — \tag{10}$$

дельтоподібна функція (з граничною δ-функцією); $g(t) = 1 + \cos(\pi t)$ $(0 \le t \le 1)$; P^i — рівнодійні навантаження за координатними напрямами; $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \ne j$.

Для періодичної дельтоподібної функції (10), продовженої на інтервал $(-l_i, 0)$ як парної або непарної функції, маємо відповідно ряди [4], які рівномірно збігаються при $\varepsilon \ne 0$

$$\delta(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon) = \frac{2}{l_i}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{ki}\varepsilon)\cos(\lambda_{ki}\alpha_i^0)\cos(\lambda_{ki}\alpha_i)\right),$$

$$\delta(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon) = \frac{2}{l_i}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{ki}\varepsilon)\sin(\lambda_{ki}\alpha_i^0)\sin(\lambda_{ki}\alpha_i),$$

де

$$\varphi(\lambda_{ki}\varepsilon)=\int_0^1 g(t)\cos(\lambda_{ki}\varepsilon t)\,dt=\frac{\sin(\lambda_{ki}\varepsilon)}{\lambda_{ki}\varepsilon}\frac{1}{1-(\lambda_{ki}\varepsilon/\pi)^2};\quad \lambda_{ki}=\frac{k\pi}{l_i}.$$

Врахувавши ці подання у формулах (9), для амплітуд компонент локального поверхневого навантаження одержимо такі розвинення у тригонометричні ряди

$$\sigma_{3j}^i=P^i\delta_{ij}\sum_{k,m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^j(\alpha)\quad \left(i,j=\overline{1,3}\right). \tag{11}$$

Тут

$$\Phi_{km}^1(\alpha)=\cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2);\quad \Phi_{km}^2(\alpha)=\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2);$$

$$\Phi_{km}^3(\alpha)=\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2);\quad \Phi_{km}^4(\alpha)=\cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2);$$

$$\lambda_{k1}=\frac{k\pi}{l_1};\ \lambda_{m2}=\frac{m\pi}{l_2};\ c_{km}(\varepsilon)=\frac{2}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon),\ \text{якщо}\ m=0,\ k=\overline{1,\infty},$$

$$c_{km}(\varepsilon)=\frac{2}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon),\ \text{якщо}\ k=0,\ m=\overline{1,\infty},$$

$$c_{km}(\varepsilon)=\frac{4}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon),\ \text{якщо}\ m=\overline{1,\infty},\ k=\overline{1,\infty}.$$

Невідомі функції системи рівнянь (1) і, відповідно, рівнянь (2) для кожної з трьох задач шукаємо у вигляді

$$\begin{Bmatrix}u_1^i\\ \sigma_{31}^i\end{Bmatrix}=P^i\sum_{k=0,m=1}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix}u_{1km}^i(\alpha_3)\\ \sigma_{31km}^i(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^1(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix}u_2^i\\ \sigma_{32}^i\end{Bmatrix}=P^i\sum_{k=0,m=1}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix}u_{2km}^i(\alpha_3)\\ \sigma_{32km}^i(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^2(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix}u_3^i\\ \sigma_{11}^i\\ \sigma_{22}^i\\ \sigma_{33}^i\\ e^i\end{Bmatrix}=P^i\sum_{k=1,m=1}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix}u_{3km}^i(\alpha_3)\\ \sigma_{11km}^i(\alpha_3)\\ \sigma_{22km}^i(\alpha_3)\\ \sigma_{33km}^i(\alpha_3)\\ e_{km}^i(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^3(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{12}^i\\ \omega^i\end{Bmatrix}=P^i\sum_{k=0,m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix}\sigma_{12km}^i(\alpha_3)\\ \omega_{km}^i(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^4(\alpha). \tag{12}$$

Підставивши відповідні ряди (12) у рівняння (2), прийдемо до звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів цих рядів

$$\frac{d^4 u^i_{3km}}{d\alpha_3^4} - \frac{A_1\lambda_{km}^2 - A_4\theta^2}{A_3}\frac{d^2 u^i_{3km}}{d\alpha_3^2} + \frac{A_2\lambda_{km}^4 - A_5\theta^2\lambda_{km}^2 + \theta^4}{A_3} u^i_{3km} = 0\,,$$

$$\frac{d^2\omega^i_{km}}{d\alpha_3^2} - \frac{G\Delta_{km}^2 - \theta^2}{G'}\omega^i_{km} = 0\,,$$

звідки знайдемо

$$u^i_{3km}(\alpha_3) = c^i_{1km}\,\mathrm{ch}(a_{km}\alpha_3) + c^i_{2km}\,\mathrm{sh}(a_{km}\alpha_3) + c^i_{3km}\,\mathrm{ch}(b_{km}\alpha_3) + c^i_{4km}\,\mathrm{sh}(b_{km}\alpha_3)\,,$$

$$\omega^i_{km}(\alpha_3) = d^i_{1km}\,\mathrm{ch}(c_{km}\alpha_3) + d^i_{2km}\,\mathrm{sh}(c_{km}\alpha_3)\,. \qquad (13)$$

Тут

$$a_{km}^2 = \frac{A_1\Delta_{km}^2 - A_4\theta^2}{2A_3}\left(1 + \sqrt{K_{km}}\right);\; b_{km}^2 = \frac{A_1\Delta_{km}^2 - A_4\theta^2}{2A_3}\left(1 - \sqrt{K_{km}}\right);$$

$$c_{km}^2 = \frac{G\Delta_{km}^2 - \theta^2}{G'};\; K_{km} = 1 - \frac{4\left(A_2\Delta_{km}^4 - A_5\theta^2\Delta_{km}^2 + \theta^4\right)}{\left(A_1\Delta_{km}^2 - A_4\theta^2\right)};\; \Delta_{km}^2 = \lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2\,;$$

c^i_{jkm}, d^i_{jkm} — сталі інтегрування.

З рівняння (3), з урахуванням подання (13), для визначення коефіцієнтів рядів функцій e^i одержимо такий вираз

$$e^i_{km} = A_{1km}\left(c^i_{1km}\,\mathrm{sh}(a_{km}\alpha_3) + c^i_{2km}\,\mathrm{ch}(a_{km}\alpha_3)\right) +$$
$$+ B_{1km}\left(c^i_{3km}\,\mathrm{sh}(b_{km}\alpha_3) + c^i_{4km}\,\mathrm{ch}(b_{km}\alpha_3)\right), \qquad (14)$$

де

$$A_{1km} = \frac{G'\Delta_{km}^2 - E_0' a_{km}^2 - \theta^2}{a_{km}\left(G' + \lambda' E_0'\right)}\,, \quad B_{1km} = \frac{G'\Delta_{km}^2 - E_0' b_{km}^2 - \theta^2}{b_{km}\left(G' + \lambda' E_0'\right)}\,.$$

Враховуючи співвідношення (12), з системи рівнянь (1) для коефіцієнтів рядів функцій u_1, u_2 та амплітуд напружень одержуємо

$$u^i_{1km} = \frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}^2}\omega^i_{km} - \frac{\lambda_{k2}}{\Delta_{km}^2}e^i_{km}\,, \quad u^i_{2km} = -\frac{\lambda_{k1}}{\Delta_{km}^2}\omega^i_{km} - \frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}^2}e^i_{km}\,,$$

$$\frac{\sigma^i_{11km}}{E_0} = \frac{\lambda' E_0'}{E_0}\frac{du^i_{3km}}{d\alpha_3} + \left[\frac{\lambda_{k1}^2 + \nu\lambda_{m2}^2}{\Delta_{km}^2} + \frac{(\lambda')^2 E_0'}{E_0}\right]e^i_{km} - \frac{(1-\nu)\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\Delta_{km}^2}\omega^i_{km}\,,$$

$$\frac{\sigma^i_{22km}}{E_0} = \frac{\lambda' E_0'}{E_0}\frac{du^i_{3km}}{d\alpha_3} + \left[\frac{\lambda_{m2}^2 + \nu\lambda_{k1}^2}{\Delta_{km}^2} + \frac{(\lambda')^2 E_0'}{E_0}\right]e^i_{km} + \frac{(1-\nu)\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\Delta_{km}^2}\omega^i_{km}\,,$$

$$\frac{\sigma^i_{12km}}{G} = -\frac{2\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\Delta^2_{km}} e^i_{km} + \frac{\lambda^2_{m2} - \lambda^2_{k1}}{\Delta^2_{km}} \omega^i_{km},$$

$$\frac{\sigma^i_{13km}}{G'} = \lambda_{k1} u^i_{3km} - \frac{\lambda_{k1}}{\Delta^2_{km}} \frac{de^i_{km}}{d\alpha_3} + \frac{\lambda_{m2}}{\Delta^2_{km}} \frac{d\omega^i_{km}}{d\alpha_3},$$

$$\frac{\sigma^i_{23km}}{G'} = \lambda_{m2} u^i_{3km} - \frac{\lambda_{m2}}{\Delta^2_{km}} \frac{de^i_{km}}{d\alpha_3} - \frac{\lambda_{k1}}{\Delta^2_{km}} \frac{d\omega^i_{km}}{d\alpha_3}, \quad \frac{\sigma^i_{33km}}{E'_0} = \frac{du^i_{3km}}{d\alpha_3} + \lambda' e^i_{km}. \tag{15}$$

Підстановкою відповідних формул (12) в умови (4) і (8) із врахуванням формул (9), (13) і (15) прийдемо до таких послідовностей систем шести лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів c^i_{jkm} $(i=\overline{1,3}; j=\overline{1,4})$, d^i_{jkm} $(i=\overline{1,3}; j=1,2)$

$$\lambda_{k1} A_{1km}\left[c^i_{1km}\,\mathrm{sh}(a_{km}h) - c^i_{2km}\,\mathrm{ch}(a_{km}h)\right] + \lambda_{k1} B_{1km}\left[c^i_{3km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h) -\right.$$
$$\left.- c^i_{4km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h)\right] + \lambda_{m2} d^i_{1km}\,\mathrm{ch}(c_{km}h) - \lambda_{m2} d^i_{2km}\,\mathrm{sh}(c_{km}h) = 0,$$
$$\lambda_{m2} A_{1km}\left[c^i_{1km}\,\mathrm{sh}(a_{km}h) - c^i_{2km}\,\mathrm{ch}(a_{km}h)\right] + \lambda_{m2} B_{1km}\left[c^i_{3km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h) -\right.$$
$$\left.- c^i_{4km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h)\right] + \lambda_{k1} d^i_{1km}\,\mathrm{ch}(c_{km}h) + \lambda_{k1} d^i_{2km} d^i_{2km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h) = 0,$$
$$c^i_{1km} a_{km}\left[\mathrm{ch}(a_{km}h) + \kappa_3 E'_0 A_{3km}\,\mathrm{sh}(a_{km}h)\right] - c^i_{2km} a_{km}\left[\mathrm{sh}(a_{km}h) +\right.$$
$$\left.+ \kappa_3 E'_0 A_{3km}\,\mathrm{ch}(a_{km}h)\right] + c^i_{3km} b_{km}\left[\mathrm{ch}(b_{km}h) + \kappa_3 E'_0 B_{3km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h)\right] -$$
$$- c^i_{4km} b_{km}\left[\mathrm{sh}(b_{km}h) + \kappa_3 E'_0 B_{km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h)\right] = 0,$$
$$\frac{\lambda_{k1} A_{2km}}{\Delta^2_{km}}\left[c^i_{1km}\,\mathrm{ch}(a_{km}h) + c^i_{2km}\,\mathrm{sh}(a_{km}h)\right] + \frac{\lambda_{k1} B_{2km}}{\Delta^2_{km}}\left[c^i_{3km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h) +\right.$$
$$\left.+ c^i_{4km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h)\right] + \frac{\lambda_{m2} c_{km}}{\Delta^2_{km}}\left[d^i_{1km}\,\mathrm{sh}(c_{km}h) + d^i_{2km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h)\right] = \frac{1}{G'}\delta_{1i},$$
$$\frac{\lambda_{m2} A_{2km}}{\Delta^2_{km}}\left[c^i_{1km}\,\mathrm{ch}(a_{km}h) + c^i_{2km}\,\mathrm{sh}(a_{km}h)\right] + \frac{\lambda_{m2} B_{2km}}{\Delta^2_{km}}\left[c^i_{3km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h) +\right.$$
$$\left.+ c^i_{4km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h)\right] - \frac{\lambda_{k1} c_{km}}{\Delta^2_{km}}\left[d^i_{1km}\,\mathrm{sh}(c_{km}h) + d^i_{2km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h)\right] = \frac{1}{G'}\delta_{2i},$$
$$A_{3km} a_{km}\left[c^i_{1km}\,\mathrm{sh}(a_{km}h) + c^i_{2km}\,\mathrm{ch}(a_{km}h)\right] +$$
$$+ B_{3km} b_{km}\left[c^i_{3km}\,\mathrm{sh}(b_{km}h) + c^i_{4km}\,\mathrm{ch}(b_{km}h)\right] = \frac{1}{E'_0}\delta_{3i}, \tag{16}$$

де $A_{2km} = \Delta^2_{km} + A_{1km} a_{km}$; $B_{2km} = \Delta^2_{km} + B_{1km} b_{km}$; $A_{3km} = 1 + \lambda' A_{1km}$; $B_{3km} = 1 + \lambda' B_{1km}$.

Розв'язки систем рівнянь (16) існують у разі відмінності від нуля визначників системи. З умови рівності нулю визначників цієї системи одержуємо рівняння для визначення власних частот коливань шару.

Підставивши числові значення сталих інтегрування у формули (13) та (12), одержимо відповідні розв'язки задачі. Ряди (12) при $\varepsilon \neq 0$ рівномірно збігаються внаслідок порядку росту гіперболічних функцій і рівномірної збіжності рядів (11).

Границя при $\varepsilon \to 0$ сум рядів (12) називається узагальненим (в розумінні слабкої збіжності [4]) розв'язком задачі про навантаження шару зусиллями, зосередженими у точці $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$. Для амплітуд переміщень маємо подання

$$U_j^i = P^i \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km}(\varepsilon) u_{jkm}^i(\alpha_3)\, \Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right) \Phi_{km}^j(\alpha) \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right),$$

які ще можна записати у вигляді границь послідовностей узагальнених часткових сум рядів

$$U_j^i = P^i \lim_{n \to \infty} \sum_{k,m=0}^{n} c_{km}(\varepsilon) u_{jkm}^i(\alpha_3)\, \Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right) \Phi_{km}^j(\alpha) \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right), \tag{17}$$

де $\varepsilon = \varepsilon(n) = \varepsilon_0 / n^{\gamma}$, $\varepsilon_0 = const$, $0 < \gamma < 1$.

Зазначимо, що послідовності (17) збігаються рівномірно в будь-якій області, що лежить у паралелепіпеді Π і не містить точки $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$.

3. Побудова розв'язку задачі

Сформулюємо в інтегральній формі задачу про взаємодію шару і абсолютно твердого тіла. Використавши подання (17), запишемо амплітуди переміщень точок шару, навантаженого контактними напруженнями $\sigma_{3i}^{+}(\alpha)$ ($i = \overline{1,3}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$)

$$u_j(\alpha, \alpha_3) = \iint_D \sum_{i=1}^{3} \overline{U}_j^i\left(\alpha, \alpha^0, \alpha_3\right) \sigma_{3i}^{+}\left(\alpha^0\right) ds\left(\alpha^0\right) \quad \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{18}$$

Тут

$$\overline{U}_j^i\left(\alpha, \alpha^0, \alpha_3\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k,m=0}^{n} c_{km}(\varepsilon) u_{jkm}^i(\alpha_3)\, \Phi_{km}^i\left(\alpha^0\right) \Phi_{km}^j(\alpha).$$

Підставивши вирази (18) в умови контакту (5), одержимо систему трьох інтегральних рівнянь

$$\iint_D \sum_{i=1}^{3} \overline{U}_3^i\left(\alpha, \alpha^0, h\right) \sigma_{3i}^{+}\left(\alpha^0\right) ds\left(\alpha^0\right) = u_0 + \psi_1 \alpha_1 + \psi_2 \alpha_2,$$

$$\iint_D \sum_{i=1}^{3} \overline{U}_j^i\left(\alpha, \alpha^0, h\right) \sigma_{3i}^{+}\left(\alpha^0\right) ds\left(\alpha^0\right) = 0, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \ \ (j = 1, 2). \tag{19}$$

Приєднуємо до цих рівнянь ще три інтегральні співвідношення (7), що містять невідомі контактні напруження $\sigma_{3i}^{+}\left(\alpha^0\right)$ і параметри ψ_1, ψ_2, u_0.

Значення контактних напружень на лицевій поверхні S^{-} шукаємо за відповідними формулами (12) при $\alpha_3 = -h$.

Числовий розв'язок системи рівнянь (7), (19) шукаємо методом колокацій [4]. Область D наближуємо системою квадратів $D^r = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_i - \alpha_i^r| < s\}$ $(r = \overline{1, N})$, на кожному з яких $\sigma_{3i}^{+} = \sigma_{3i}^{r} = const$, а також справджуємо рівняння (7), (18) у контрольних точках $\alpha^q = (\alpha_1^q, \alpha_2^q)$ $(q = \overline{1, N})$, які збігаються з центрами квадратів D^q. Після дискретизації рівнянь і обчислення відповідних інтегралів прийдемо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $3N + 3$ невідомих σ_{3i}^r $(i = \overline{1,3})$, ψ_1, ψ_2, u_0

$$4s^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{r=1}^{N} \overline{\overline{U}}{}_3^i \left(\alpha^q, \alpha^r, h\right) \sigma_{3i}^r - u_0 - \alpha_1^q \psi_1 - \alpha_2^q \psi_2 = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{r=1}^{N} \overline{\overline{U}}{}_j^i \left(\alpha^q, \alpha^r, h\right) \sigma_{3i}^r = 0 , \quad \left(j = 1,2; \ q = \overline{1, N}\right),$$

$$4s^2 \sum_{r=1}^{N} \sigma_{33}^r - m\omega^2 u_0 = P_{30} , \qquad 4s^2 \sum_{r=1}^{N} \sigma_{33}^r \alpha_2^r - i_1 \omega^2 \psi_1 = M_{10} ,$$

$$4s^2 \sum_{r=1}^{N} \sigma_{33}^r \alpha_1^r - i_2 \omega^2 \psi_2 = M_{20} , \tag{20}$$

де

$$\overline{\overline{U}}{}_j^i \left(\alpha^q, \alpha^r, h\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k,m=0}^{n} c_{km}(\varepsilon)\, c_{km}^0(s)\, u_{jkm}^i(h)\, \Phi_{km}^i\left(\alpha^r\right) \Phi_{km}^j\left(\alpha^q\right);$$

$$c_{km}^0(s) = \frac{\sin(\lambda_{k1} s)}{\lambda_{k1} s} \frac{\sin(\lambda_{m2} s)}{\lambda_{m2} s} .$$

Розв'язок системи рівнянь (20) існує, якщо визначник системи не дорівнює нулеві. З рівності нулю визначника цієї системи (при змінній частоті вимушених коливань) одержуємо рівняння для визначення власних частот коливань шару з масивним тілом.

4. Числова реалізація та висновки

Для обчислення коефіцієнтів системи (20) використовуємо часткові суми рядів (20). При цьому довжини відрізків цих сум вибираємо з умови $\varepsilon \le s$, в якій параметр $\varepsilon = \varepsilon(n)$ визначається за аналогією з формулою (17). Наприклад, зафіксувавши числове значення параметра s, що характеризує дискретизацію області D, і прийнявши $\varepsilon_0 = 0{,}1$, $\gamma \approx 1$, одержимо нижню межу довжин відрізків часткових сум рядів, $n > 10/s$. Інтервал вибору значень іншого параметра N є достатньо широкий. При великих значеннях параметра N запропонована числова схема розв'язування задачі приводить до достатньо точного її розв'язку, а при малих значеннях цього параметра отриманий наближений розв'язок відповідає математичній моделі дискретної взаємодії масивного тіла з шаром.

Література

[1] *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. — 304 с.
[2] *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989. — 510 с.
[3] *Кубенко В. Д., Попов С. Н.* Осесимметричная задача удара жесткого затупленого тела о поверхность упругого пространства // Прикл. механика. — 1989. — Т. 25, № 7. — С. 16-24.
[4] Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач / *Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Сухорольський М. А.* та ін. — Львів: Національний ун-т «Львівська політехніка», 2002. — 226 с
[5] *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. — К.: Наук. думка, 1976. — 284 с.
[6] *Сухорольський М. А., Микитюк О. А.* Усталені поперечні коливання шару з масивним тілом // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. — 2004. — № 518. — С. 70-75.

Stable Oscilations of the Transversal-Isotropic Layer with Massive Body

Mychailo Sykhorolsky

The problem of stable oscillations of the transversal-isotropic layer interacting with the massive solid under conditions of their ideal contact is considered. The problem is reduced to the system of three integral equations relative to the contact stresses by the method of Green's function as well as that of Fourier (by developing into double series by coordinates in the middle plane of the layer). Singular solutions of the corresponding boundary problem are presented in the form of boundaries of the weakly converging sequences of generalized partial sums of series (summarized by generalized methods). Constructing of the numerical solution of the corresponding system of integral equations is based on the idea of the method of collocations and approximation of the function by sequences of generalized partial sums of series.

Установившиеся колебания трансверсально-изотропного шара с массивным телом

Михаил Сухорольский

Рассматривается задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного шара, взаимодействующего при условии идеального контакта с массивным телом. Методом функции Грина в сочетании с методом Фурье (разложением в двойные тригонометрические ряды) задача сведена к системе трех интегральных уравнений относительно контактных напряжений. Сингулярные решения соответствующей краевой задачи представлено в виде пределов слабо сходящихся последовательностей обобщенных частичных сумм рядов (суммируемых обобщенными методами). Построение численного решения соответствующей системы интегральных уравнений основывается на идее метода коллокаций и аппроксимации функций последовательностями обобщенных частичных сумм рядов.

Отримано 08.09.05