

## До математичного моделювання фізико-механічних процесів у пористих насичених тілах

Василь Кондрат

Д. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дундаса, 15, Львів, 79005, e-mail: kon@cmm.lviv.ua

*Об'єктом дослідження є двофазне тверде тіло, яке складається з деформованого пористого скелета і рідини, що заповнює його пори. Пористість відкрита. У вихідному стані тіло статистично однорідне та ізотропне. Розглядаються різні умови взаємодії твердої та рідкої фаз, а відтак — різні фізичні моделі пористого тіла. Згідно першої (класичної) моделі обидві фази у вихідному стані мають сталі властивості і є однорідними у просторових областях, які вони займають. За другою моделлю рідина є розчином електроліту, а скелет — твердим розчином. Тоді, у зв'язку з різницею хімічних потенціалів заряджених домішок у фазах, відбувається їх просторовий перерозподіл з утворенням подвійного електричного шару в околі поверхні контакту фаз. Третя модель враховує те, що контактна взаємодія приводить до зміни фізико-механічних властивостей рідини в приконтактній області і виникає структурована (зв'язана) рідина. Отримані рівняння математичних моделей механічних та механоелектромагнітних процесів у пористому тілі, які ґрунтуються на згаданих фізичних моделях. Кількісно проаналізовано вплив зв'язаної рідини на фільтрацію в гетеропористому тілі.*

**Ключові слова:** пористе насичене середовище, гетеропористе тіло, просторове та статистичне усереднення, подвійний електричний шар, зв'язана рідина, механоелектромагнітні процеси, фільтрація.

**Вступ.** До пористих відносять широкий клас природних і виготовлених людиною матеріалів, таких як ґрунти, гірські породи, дерево, шкіра, кістка, цегла, бетон, спечені метали тощо. Характерною їхньою особливістю є неоднорідність властивостей у межах виділеного елемента, якого можна вважати фізично малим порівняно з масштабом макроскопічних процесів, що протікають у тілі (локальна неоднорідність). Йдеться про структурну, фазову і фізичну неоднорідності. Остання пов'язана, в основному, із поверхневою взаємодією фаз. Наслідком такої взаємодії є зміна фізико-механічних властивостей матеріалу скелету та порової рідини в околі поверхні їхнього контакту (зокрема, виникнення зв'язаної рідини [3, 4]), а також сепарація заряджених частинок залежно від величини їхнього хімічного потенціалу у фазах — утворення подвійного електричного шару [5, 15]. Відзначимо, що при математичному моделюванні механічних процесів у пористих тілах фізичну локальну неоднорідність, як правило, не враховують [11, 17]. Однак відомо ряд експериментально спостережуваних і практично важливих

ефектів, існування яких спричинено фізичною неоднорідністю. Сюди можна віднести, зокрема, існування початкового градієнта напору при фільтрації полярних рідин у дрібнодисперсних пористих тілах [3], що пояснюється наявністю зв'язаної рідини. Ще одним важливим спостережуваним ефектом є сейсмоелектричний (акустоелектричний) [6], зумовлений існуванням подвійного електричного шару в околі поверхні контакту рідкої та твердої фаз. Таким чином, розробка математичних моделей, які б враховували локальну фізичну неоднорідність складових фаз пористого тіла, є актуальною задачею механіки пористих тіл. У цій роботі розглянемо підходи до такого врахування.

### 1. Фізичні моделі пористого насиченого рідиною тіла

Розглянемо деформівне пористе тіло  $K = K_S \cup K_f$ , яке складається з твердого пружного неферомагнітного непровідного поляризованого пористого скелету (тіло  $K_S$ ), пори якого заповнює електропровідна неферомагнітна в'язка рідина – розчин електроліту (тіло  $K_f$ ). Тіло  $K$  займає область  $(V) = (V_1) \cup (V_2)$  евклідового простору, де  $(V_1)$  і  $(V_2)$  — області, які займають відповідно тіла  $K_f$  і  $K_S$ . Пористість відкрита, тому області  $(V_1)$  і  $(V_2)$  є однозв'язними. Розміри пор та неоднорідностей скелету достатньо великі, так що для тіл  $K_f$  і  $K_S$  виконуються базові положення механіки та електродинаміки суцільного середовища [2, 9, 13]. У вихідному стані пористий матеріал статистично однорідний та ізотропний.

У більшості робіт із механіки пористих тіл [11, 17] за основу приймається фізична модель, яка враховує лише структурну і фазову локальну неоднорідність тіла. У рамках такої моделі вважається, що пористий скелет є однорідним, як і рідина, яка заповнює його пори. Поверхневою взаємодією твердої та рідкої фаз нехтується. Надалі зупинимося на моделях, які враховують фізичну локальну неоднорідність, а саме, подвійний електричний шар в околі поверхні контакту фаз, та зв'язану (структуровану) рідину біля цієї поверхні.

**1.1 Врахування подвійного електричного шару.** Подвійний електричний шар в околі межі контакту твердої та рідкої фаз утворює вихідну зарядову систему тіла. Структура подвійного електричного шару є такою, що одна його частина (адсорбційна, щільна) зв'язана з твердою фазою, а інша (дифузна) може переміщатися разом з рідиною [5, 15]. Приймемо, що межею  $(S_{12})$  контакту фаз є поверхня ковзання [15], для якої справджуються умови гладкості, а самі фази (тіла  $K_S$  і  $K_f$ ) електрично заряджені, хоча тіло  $K$  є макроскопічно електронейтральним, так що для нього виконується умова

$$\alpha_{10}\rho_{e0}^{(1)} + \alpha_{20}\rho_{e0}^{(2)} = 0. \quad (1)$$

Тут  $\alpha_{10}$  — вихідне значення параметра пористості  $\alpha_1 = V_1/V$ ,  $V_1$  — об'єм порового простору в області  $(V)$  середовища,  $V$  — об'єм області  $(V)$ ,  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ ,

$\alpha_{20} = 1 - \alpha_{10}$ ,  $\rho_{e0}^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) — середні густини зарядів фаз у початковий момент часу. Тут і надалі значення  $j = 1$  верхнього індексу відповідає поровій рідині, а  $j = 2$  — твердій фазі.

Вихідні електричні параметри подвійного електричного шару — густина електричного заряду  $\rho_{e0}^{(j)'}$ , електричний потенціал  $\varphi_0^{(j)'}$ , вектори  $\vec{E}_0^{(j)'}$ ,  $\vec{D}_0^{(j)'}$  =  $= \varepsilon^{(j)'}\vec{E}_0^{(j)'}$ ,  $\vec{P}_0^{(j)'}$  =  $\chi^{(j)'}\vec{E}_0^{(j)'}$  напруженості та індукції електричного поля і поляризації відповідно — є характеристиками розглядуваного пористого середовища. Тут  $\varepsilon^{(j)'}$ ,  $\chi^{(j)'}$  — абсолютні діелектричні проникність та сприйнятливість фаз, які приймаємо [5, 15] сталими в областях ( $V_1$ ) і ( $V_2$ ).

Якщо товщина подвійного електричного шару значно менша за розміри пор і можна знехтувати впливом кривини шару на його параметри, то вектори вихідного електричного поля і густина електричного заряду будуть залежати лише від координати  $x$  і їх можна подати

$$\begin{aligned} \vec{E}_0^{(j)'} &= \vec{E}_0^{(j)'}(x) = E_0^{(j)'}(x)\vec{e}_x, & E_0^{(j)'}(x) &= -\frac{d\varphi_0^{(j)'}(x)}{dx}, \\ \vec{D}_0^{(j)'} &= \vec{D}_0^{(j)'}(x) = D_0^{(j)'}(x)\vec{e}_x, & \vec{P}_0^{(j)'} &= \vec{P}_0^{(j)'}(x) = P_0^{(j)'}(x)\vec{e}_x, & \rho_{e0}^{(j)'} &= \rho_{e0}^{(j)'}(x), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\vec{e}_x$  — орт осі  $OX$ , нормальної до поверхні ковзання і спрямованої в сторону рідини.

Наприклад, якщо порова рідина є розчином симетричного бінарного електроліту, в наближенні Дебая-Хюккеля  $zF_f\varphi_0^{(j)'}/2RT \ll 1$ , ( $z = z_+ = -z_-$ ,  $z_+$ ,  $z_-$  — валентності катіонів та аніонів,  $\varphi_0^{(j)'}$  — електричний потенціал точок дифузного шару,  $F_f$  — стала Фарадея,  $R$  — газова стала,  $T$  — абсолютна температура), для електричного потенціалу та густини електричного заряду в дифузному шарі можна записати [5, 15]

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)'} &= \varphi_1 \exp(-\kappa_e^{(1)'}x), & \rho_{e0}^{(1)'} &= \rho_{e00}^{(1)'} \exp(-\kappa_e^{(1)'}x), & \rho_{e00}^{(1)'} &= -\varepsilon^{(1)'}(\kappa_e^{(1)'})^2 \varphi_1, \\ (\kappa_e^{(1)'})^2 &= 2\pi F_f^2 z^2 C_0 / \varepsilon^{(1)'} RT, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\varphi_1$  — потенціал поверхні найбільшого наближення іонів [5],  $C_0$  — концентрація електроліту. Можна покласти [15], що потенціал  $\varphi_1$  дорівнює електрокінетичному потенціалу  $\zeta$ . Усереднені густини електричного заряду  $\rho_{e0}^{(j)}$  ( $j=1, 2$ ) у фазах визначаються співвідношеннями

$$\rho_{e0}^{(1)} = \frac{s_{12}P_{se0}^{(1)}}{\alpha_{10}}, \quad \rho_{se0}^{(1)} = \int_0^\infty \rho_{e0}^{(1)'}(x)dx, \quad \rho_{e0}^{(2)} = -\frac{s_{12}P_{se0}^{(1)}}{\alpha_{20}}, \quad (4)$$

де  $s_{12} = S_{12}/V$  — густина поверхні контакту фаз,  $S_{12}$  — площа поверхні контакту фаз в області ( $V$ ).

Враховуючи співвідношення Козені-Кармана  $s_{12}^2 = \alpha_1^3 / (fT_\Gamma^2 k)$ , вираз (4) для  $\rho_{e0}^{(1)}$  у прийнятому наближенні можна записати

$$\rho_{e0}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon^{(1)} C_0 \alpha_1}{fRTk} \frac{zF_f \Phi_1}{T_\Gamma}}. \quad (5)$$

Тут  $\varepsilon^{(1)}$  — середня абсолютна діелектрична проникність рідкої фази,  $f$  — параметр форми пор,  $T_\Gamma$  — звивистість,  $k$  — коефіцієнт проникності.

**1.2. Врахування зв'язаної рідини.** Зв'язана рідина утворюється внаслідок взаємодії порової рідини з поверхнею скелету. Вона має особливу структуру і за своїми властивостями відрізняється від об'ємної (вільної) фази. Іншою є її густина, в'язкість, діелектрична проникність, температуропровідність, розчинна здатність, вона характеризується скінченним модулем зсуву [4]. Приповерхнєве структурування спостерігається тільки у полярних рідинах, зокрема, у воді. З підвищенням температури (для води до  $65^\circ\text{-}70^\circ$ ) зв'язана рідина деструктується і набуває властивостей вільної [4]. Руйнування структури зв'язаної рідини спостерігається також у разі досягненні зсувними напруженнями у ній критичного значення [3]. Саме цим можна пояснити існування початкового градієнта тиску при фільтрації полярних рідин у дрібнодисперсних середовищах [3] та вібраційне збільшення швидкості фільтрації таких рідин [8].

У роботі [1] приймалося, що шар зв'язаної рідини біля поверхні твердої фази має товщину  $h$ , рух рідини описується рівнянням Нав'є-Стокса, однак коефіцієнт в'язкості  $\mu_2$  є нелінійною функцією швидкості і визначається виразом (модель 1)

$$\mu_2(y) = \mu_1 [v(h)/v_2(y)]^\vartheta, \quad (6)$$

де  $\mu_1 = const$  — коефіцієнт в'язкості вільної рідини,  $v(h)$  — швидкість межі контакту вільно-зв'язана рідина,  $v_2(y)$  — швидкість зв'язаної рідини,  $\vartheta$  — числовий параметр,  $y$  — координата, перпендикулярна до стінки каналу та потоку рідини. Характерною особливістю цієї моделі є неврахування можливості руйнування структури зв'язаної рідини за певного рівня механічних зсувних напружень у ній.

У роботі [16] вважалося, що при фільтрації рідини за малих градієнтів тиску (малих зсувних напруженнях у рідині) шар зв'язаної рідини залишається нерухомим, а за певного (критичного) значення величини зсувних напружень на поверхні контакту «зв'язана рідина»—«тверда фаза» (де рівень напружень найвищий) відбувається «зрив» та деструктування цього шару (модель 2). У підсумку за певного рівня зсувних напружень ефективний коефіцієнт проникності пористого тіла та швидкість фільтрації рідини збільшуються. Величина зсувних напружень на поверхні контакту «зв'язана рідина»—«скелет» залежить від попе-

речного розміру  $H$  пори, тому умову руйнування шару зв'язаної рідини можна записати як умову для поперечного розміру пори

$$\begin{aligned} \text{при } H < H_* \text{ зв'язана рідина нерухома,} \\ \text{при } H \geq H_* \text{ пора заповнена вільною рідиною.} \end{aligned} \quad (7)$$

Тут  $H_*$  — критичний поперечний розмір пор, який визначається критичним значенням  $\tau_*$  зсувних напружень

$$H_* = \tau_* / |\vec{\nabla} P|, \quad (8)$$

де  $P$  — тиск у рідині.

Розглянемо одномірний рух рідини вздовж щілини шириною  $2H$  (вісь  $Oz$  паралельна стінкам щілини, а вісь  $Oy$  — перпендикулярна до них). Вільна (ньютонівська) рідина займає область  $-(H-h) < y < H-h$  щілини, а зв'язана — області  $-H < y < -(H-h)$ ,  $H-h < y < H$ , де  $h$  — товщина шару зв'язаної рідини. У рідині створений постійний градієнт тиску  $-dP/dz = p = \text{const} < 0$ . Тоді для середньої швидкості  $\bar{v}$  руху рідини в каналі отримуємо [1, 2]:

для моделі 1 зв'язаної рідини

$$\bar{v} = \frac{1}{H} \left[ \int_0^{H-h} v_1(y) dy + \int_{H-h}^H v_2(y) dy \right] = \frac{H-h}{H} \bar{v}_1 + \frac{h}{H} \bar{v}_2, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{p}{2\mu_1} \left[ (1-\vartheta)(H^2 - (H-h)^2) + \frac{2}{3}(H-h)^2 \right], \\ \bar{v}_2 &= \frac{p(1-\vartheta)}{2\mu_1} \frac{(H^2 - (H-h)^2)^{-\frac{\vartheta}{1-\vartheta}}}{h} \int_{H-h}^H (H^2 - y^2)^{\frac{1}{1-\vartheta}} dy; \end{aligned} \quad (10)$$

для моделі 2 зв'язаної рідини

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{p}{3\mu_1} (H-h)^2, \quad \text{для } H < H_*, \\ \bar{v} &= \frac{p}{3\mu_1} H^2, \quad \text{для } H \geq H_*. \end{aligned} \quad (11)$$

## 2. Математична модель для макроскопічного опису механоелектромагнітних процесів

Отримання такої моделі [7, 14] базується на врахуванні подвійного електричного шару в околі поверхні контакту рідкої та твердої фаз та взаємодії збурення електромагнітного поля, зумовленого деформацією подвійного шару, з механічними полями. Схема отримання макроскопічних рівнянь електромагнітомеханіки полягає у формулюванні мезорівнянь моделі та їх просторовому усередненні.

**2.1. Система мезорівнянь.** Система рівнянь, яка описує взаємозв'язані механічні та електромагнітні процеси в скелеті та поровій рідині (мезорівняння) включає рівняння механіки з урахуванням пондеромоторних сил, співвідношення електродинаміки повільно рухомого середовища для кожної з фаз і контактні умови, записані на поверхні їх розділу. Зазначимо, що рівняння електродинаміки та механіки пов'язані між собою і складають повну систему співвідношень моделі. У лабораторній системі координат (змінні Ейлера) ці рівняння, записані для збурень параметрів напружено-деформованого стану, можна подати так [7, 14]

$$\frac{\partial \rho^{(j)'}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho^{(j)'} \vec{v}^{(j)'}) = 0; \quad (12)$$

$$\rho^{(j)'} \frac{d_j \vec{v}_k^{(j)'}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}^{(j)'} + \rho^{(j)'} \vec{F}^{(j)'} + \vec{F}_\Lambda^{(j)'}; \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_p^{(j)'} = -\frac{\partial \vec{B}_p^{(j)'}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p^{(j)'} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_p^{(j)'} = \vec{j}_p^{(j)'} + \frac{\partial \vec{D}_p^{(j)'}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_p^{(j)'} = \rho_{ep}^{(j)'}; \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}^{(j)'} = -p^{(j)'} \hat{I} + \hat{\Pi}^{(j)'}, \quad \hat{\Pi}^{(j)'} = \left( \eta_1 - \frac{2}{3} \eta_2 \right) \omega^{(j)'} \hat{I} + 2\eta_2 \hat{\omega}^{(j)'},$$

$$\hat{\sigma}^{(2)'} = \left( K^{(2)'} - \frac{2}{3} G^{(2)'} \right) e^{(2)'} \hat{I} + 2G^{(2)'} \hat{e}^{(2)'}, \quad \hat{e}^{(2)'} = 0,5 \left[ \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)'} + \left( \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)'} \right)^T \right],$$

$$\hat{\omega}^{(1)'} = 0,5 \left[ \vec{\nabla} \otimes \vec{v}^{(1)'} + \left( \vec{\nabla} \otimes \vec{v}^{(1)'} \right)^T \right]; \quad (15)$$

$$\vec{D}_p^{(j)'} = \varepsilon^{(j)'} \vec{E}_p^{(j)'} + \left( \mu^{(j)'} \varepsilon^{(j)'} - \mu_0 \varepsilon_0 \right) \vec{v}^{(j)'} \times \vec{H}_p^{(j)'},$$

$$\vec{B}_p^{(j)'} = \mu^{(j)'} \vec{H}_p^{(j)'} + \left( \mu^{(j)'} \varepsilon^{(j)'} - \mu_0 \varepsilon_0 \right) \vec{v}^{(j)'} \times \vec{E}_p^{(j)'}; \quad (16)$$

$$\rho_{ep}^{(j)'} = \rho_{e0}^{(j)'} + \rho_e^{(j)'}; \quad \vec{j}_p^{(j)'} = \vec{j}_*^{(j)'} + \rho_{ep}^{(j)'} \vec{v}^{(j)'},$$

$$\vec{j}_*^{(1)'} = \sigma_e^{(1)'} \vec{E}_*^{(1)'}, \quad \vec{E}_*^{(1)'} = \vec{E}^{(1)'} + \vec{v}^{(1)'} \times \vec{B}^{(1)'}, \quad \vec{j}_*^{(2)'} = 0 \quad (17)$$

в областях ( $V_j$ ) ( $j = 1, 2$ );

$$\vec{u}^{(1)'} = \vec{u}^{(2)'}, \quad \left( \hat{\sigma}^{(1)'} + \hat{T}^{(1)'} \right) \cdot \vec{n}^{(1)} + \left( \hat{\sigma}^{(2)'} + \hat{T}^{(2)'} \right) \cdot \vec{n}^{(2)} = 0,$$

$$\left( \vec{H}_p^{(1)'} - \vec{H}_p^{(2)'} \right) \times \vec{n}' = \vec{i}' + \nu_n' \left( \vec{D}_p^{(1)'} - \vec{D}_p^{(2)'} \right) + \rho'_{es} \vec{v}'_s, \quad \left( \vec{B}_p^{(1)'} - \vec{B}_p^{(2)'} \right) \cdot \vec{n}' = 0,$$

$$\left( \vec{E}_p^{(1)'} - \vec{E}_p^{(2)'} \right) \times \vec{n}' = \nu_n' \left( \vec{B}_p^{(2)'} - \vec{B}_p^{(1)'} \right), \quad \left( \vec{D}_p^{(1)'} - \vec{D}_p^{(2)'} \right) \cdot \vec{n}' = -\rho'_{es} \quad (18)$$

на поверхні ( $S_{12}$ ).

Тут  $\vec{u}^{(j)'}$  — вектори переміщення, а  $\vec{v}^{(j)'} = d_j \vec{u}^{(j)'} / dt$  — швидкостей фаз;  $\hat{\sigma}^{(j)'}$ ,  $\hat{e}^{(2)'}$   $p^{(1)'}$  — відповідно збурення тензорів напружень Коші у фазах, тензора

деформації твердої фази та тиску в рідині щодо тензорів  $\hat{\sigma}_0^{(j)'}$ ,  $\hat{\epsilon}_0^{(2)'}$ ,  $p_0^{(1)'}$  у вихідній ситуації;  $\hat{\omega}^{(1)'}$  — тензор швидкості деформації у рідині;  $\hat{I} = \vec{i}^\alpha \otimes \vec{i}^\beta \delta_{\alpha\beta}$  — одиничний тензор,  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера,  $\hat{\Pi}^{(j)'}$  — тензор в'язких напружень в електроліті;  $\vec{F}_\Lambda^{(j)'}$  =  $\rho_e^{(j)'} \vec{E}_*^{(j)'} + (\vec{j}^{(j)'} + \frac{\partial \vec{P}^{(j)'}}{\partial t}) \times \vec{B}^{(j)'}$  +  $P_\alpha^{(j)'} \vec{\nabla} E_{*\alpha}^{(j)'}$  — вектор густини пондеромоторної сили;  $\vec{F}^{(j)'}$  — вектор масової сили;  $P_\alpha^{(j)'}$ ,  $E_{*\alpha}^{(j)'}$  — компоненти векторів  $\vec{P}^{(j)'}$ ,  $\vec{E}_*^{(j)'}$ ;  $\hat{T}^{(j)'}$  =  $\hat{T}_p^{(j)'}$  -  $\hat{T}_0^{(j)'}$  — збурення тензорів натягу Максвелла у фазах,  $\hat{T}_0^{(j)'}$  =  $\vec{E}_0^{(j)'} \otimes \vec{D}_0^{(j)'} - 0,5(\vec{E}_0^{(j)'} \cdot \vec{D}_0^{(j)'}) \hat{I}$  — тензори Максвелла у вихідній, а  $\hat{T}_p^{(j)'}$  =  $\vec{E}_p^{(j)'} \otimes \vec{D}_p^{(j)'} + \vec{H}_p^{(j)'} \otimes \vec{B}_p^{(j)'}$  -  $0,5(\vec{E}_p^{(j)'} \cdot \vec{D}_p^{(j)'} + \vec{H}_p^{(j)'} \cdot \vec{B}_p^{(j)'}) \hat{I}$  — актуальній ситуаціях;

$$\vec{E}_p^{(j)'} = \vec{E}_0^{(j)'} + \vec{E}^{(j)'}, \quad \vec{H}_p^{(j)'} = \vec{H}^{(j)'}, \quad \vec{D}_p^{(j)'} = \vec{D}_0^{(j)'} + \vec{D}^{(j)'}, \quad \vec{B}_p^{(j)'} = \vec{B}^{(j)'} \quad (19)$$

— вектори напруженостей та індукцій електричного і магнітного полів у фазах, а  $\vec{E}^{(j)'}$ ,  $\vec{H}^{(j)'}$  та  $\vec{D}^{(j)'}$ ,  $\vec{B}^{(j)'}$  — їхні збурення;  $\vec{P}_p^{(j)'} = \vec{D}_p^{(j)'} - \epsilon_0 E_p^{(j)'}$  — вектор поляризації,  $\vec{P}^{(j)'} = \vec{P}_p^{(j)'} - \vec{P}_0^{(j)'}$  — його збурення;  $\vec{E}_*^{(j)'} = \vec{E}^{(j)'} + \vec{v}^{(j)'} \times \vec{B}^{(j)'}$  — вектор напруженості електричного поля у системі відліку центра мас  $j$ -ої фази;  $\vec{j}_p^{(j)'}$ ,  $\vec{j}_*^{(j)'}$  — вектори густини електричного струму та струму провідності у фазах,  $\vec{i}^{(j)'}$  — вектор густини поверхневого струму;  $\rho_{ep}^{(j)'}$  — густина електричного заряду у фазах, а  $\rho_e^{(j)'}$  — її збурення;  $\rho'_{es}$  — густина поверхневого заряду;  $\mu^{(j)'}$  — абсолютна магнітна проникність фази  $j$ ,  $\mu_0, \epsilon_0$  — магнітна й електрична сталі;  $\sigma_e^{(1)'}$  — коефіцієнт електропровідності рідини;  $\vec{n}^{(j)}$  — нормаль до поверхні ( $S_{12}$ ), яка є зовнішньою до фази  $j$ ,  $\vec{n}' = \vec{n}^{(1)'}$ ,  $v'_n = \vec{v}'_s \cdot \vec{n}'$ ,  $\vec{v}'_s$  — швидкість переміщення точок поверхні ( $S_{12}$ ).

**2.2. Просторове усереднення.** Для переходу від мезорівнянь (12)-(19) до макроскопічних рівнянь використаємо метод просторового усереднення [10, 11]. Нехай процеси, які протікають у тілі, характеризуються віддаллю  $L \gg l$ , де  $l$  — характерний розмір пор і зерен скелету. Введемо усереднені функції [10, 11]

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)} &\equiv \overline{\varphi^{(j)'}} = \frac{1}{\delta V_j} \int_{(\delta V_j)} \varphi^{(j)'} d'V_j, & \varphi_s^{(j)} &\equiv \overline{(\varphi^{(j)'})_s} = \frac{1}{\delta S_j} \int_{(\delta S_j)} \varphi^{(j)'} dS_j \\ \varphi_{12}^{(j)} &\equiv \overline{(\varphi^{(j)'})_{12}} = \frac{1}{s_{12} \delta V} \int_{(\delta S_{12})} \varphi^{(j)'} dS_{12}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут  $\varphi^{(j)'}$  — довільна шукана функція системи рівнянь (12)-(19),  $\varphi^{(j)}, \varphi_s^{(j)}, \varphi_{12}^{(j)}$  — відповідні їй усереднені за об'ємом, поверхнею та поверхнею розділу фаз функції,  $(\delta V) = (\delta V_1) \cup (\delta V_2)$ ,  $(\delta S) = (\delta S_1) \cup (\delta S_2)$ .

Характерний розмір  $d$  областей усереднення вибирається так ( $l \ll d \ll L$ ), щоб усереднені функції були стійкими, тобто нечутливими до малих змін областей  $(\delta V_j), (\delta S_j)$  ( $j = 1, 2$ ),  $(\delta S_{12})$ . Вимагаємо також, щоб вони були регулярними та представницькими [10].

**2.3. Система макроскопічних рівнянь.** Застосувавши оператори усереднення (20) до рівнянь (12)-(19) після деяких перетворень отримаємо таку систему взаємозв'язаних рівнянь електромагнітомеханіки для визначення функцій макроскопічних полів [7, 14]

$$\frac{\partial(\alpha_j \rho^{(j)})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_j \rho^{(j)} \vec{v}^{(j)}) = 0; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho^{(1)} \frac{d_1 \vec{v}^{(1)}}{dt} &= -\alpha_1 \vec{\nabla} p^{(1)} + \vec{R} + \alpha_1 \vec{F}_\Lambda^{(1)} + \alpha_1 \rho^{(1)} \vec{F}^{(1)}, \\ \alpha_2 \rho^{(2)} \frac{d_2 \vec{v}_k^{(2)}}{dt} &= \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}_f - \alpha_2 \vec{\nabla} p^{(1)} - \vec{R} + \alpha_2 \vec{F}_\Lambda^{(2)} + \vec{R}_\Lambda^{(2)} + \alpha_2 \rho^{(2)} \vec{F}^{(2)}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_M + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{eM}; \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_f = \alpha_2 \left[ \left( K_f - \frac{2}{3} G_f \right) e^{(2)} \hat{I} + 2 G_f \hat{e}^{(2)} + \nu_f p^{(1)} \hat{I} \right], \quad \rho^{(j)} = \rho_0^{(j)} (1 - \beta^{(j)} p^{(j)})$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} - \frac{1}{\alpha_2} \sigma_f, \quad \vec{R} = A(\vec{v}^{(2)} - \vec{v}^{(1)}) - \rho_{12} (d_2 \vec{v}^{(2)} / dt - d_1 \vec{v}^{(1)} / dt),$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_\Lambda^{(j)} &= \rho_e^{(j)} \vec{E}_*^{(j)} + \left( \vec{j}^{(j)} + \frac{\partial \vec{P}^{(j)}}{\partial t} \right) \times \vec{B}^{(j)} + \sum_{\alpha=1}^3 \vec{P}_\alpha^{(j)} \vec{\nabla} E_{*\alpha}^{(j)}, \\ \vec{R}_\Lambda^{(2)} &= (\hat{T}^{(2)} - \hat{T}^{(1)}) \cdot \vec{\nabla} \alpha_2 + D_{0s} s_{12} (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\hat{e}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)})^T \right]; \quad (25)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j}_M = \vec{j}_* + \vec{j}_k + \vec{j}_B, \quad \vec{j}_* = \sigma_e \vec{E},$$

$$\sigma_e = \alpha_1 \sigma_e^{(1)} + 0,5 \sigma_{es} (f_E^{(1)} + f_E^{(2)}), \quad \vec{j}_k = \alpha_1 (\gamma_1 \rho_{e0}^{(1)} + \varepsilon^{(1)} f_E^{(1)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{v}^{(1)} +$$

$$+ \left\{ \frac{\rho_{e0}^{(1)}}{\alpha_{20}} \alpha_{11} \gamma_2 + \alpha_2 \varepsilon^{(2)} f_E^{(2)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \left[ (\varepsilon^{(1)} f_E^{(1)} - \varepsilon^{(2)} f_E^{(2)}) \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \alpha_1 \right] \right\} \vec{v}^{(2)},$$

$$\vec{j}_B = \left[ (\alpha_1 \sigma_e^{(1)} + 0,5 \sigma_{es}) \vec{v}^{(1)} + 0,5 \sigma_{es} \vec{v}^{(2)} \right] \times \vec{B},$$



$$\rho_{eM} = \rho_e + \rho_{es}, \quad \rho_{es} = (\varepsilon^{(1)} f_E^{(1)} - \varepsilon^{(2)} f_E^{(2)}) \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \alpha_1,$$

$$\vec{E}^{(j)} = f_E^{(j)} \vec{E}, \quad \vec{H}^{(j)} = \vec{H}, \quad f_E^{(j)} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^{(3-j)}}{\alpha_j (\varepsilon^{(j)} - \varepsilon^{(3-j)}), \quad j = 1, 2 \quad (26)$$

У записаних формулах символи без штрихів мають той самий фізичний зміст, що й штриховані символи у мезорівняннях (12)-(19), але відповідають усередненим величинам;  $\alpha_{11}$  — збурення коефіцієнта пористості;  $\rho_{12}$  — параметр приєднаної маси;  $A = \alpha_1 \eta_2 / k$ ;  $K_f, G_f$  — ефективні модулі стиску і зсуву скелета;  $\beta^{(j)}$  — усереднена стисливість фаз;  $\rho_0^{(j)}$  — вихідна (початкова) усереднена густина маси  $j$ -ої фази;  $\nu_f$  — зцементованість скелета;  $\varepsilon, \mu$  — усереднені діелектрична та магнітна проникності пористого матеріалу;  $\sigma_{es}$  — усереднений коефіцієнт поверхневої електропровідності;  $D_{0s}$  значення індукції електричного поля на поверхні ( $S_{12}$ ) у вихідній ситуації; коефіцієнти  $\gamma_1 \leq 1$  та  $\gamma_2 \leq 1$  відображають відмінність між середніми швидкостями руху маси та початкового заряду в рідині та скелеті [14].

Відзначимо, що існування ненульового збурення векторів електромагнітного поля в пористому тілі за відсутності зовнішніх чинників, як це видно з рівнянь (23), (26), у цій моделі можливе лише у разі відмінності від нуля вихідних значень характеристик подвійного електричного шару (густини електричного заряду, індукції електричного поля тощо), які є параметрами моделі. Отримана система співвідношень (21)-(26) може бути використана для дослідження взаємозв'язаних механічних та електромагнітних процесів у пористих тілах, насичених рідиною. У ній відсутні обмеження, прийняті в роботах [12, 18]. Пондеромоторні сили дії на матеріальні континууми зі сторони електромагнітного поля враховують як сили Кулона, Ампера, силу дії на дипольний момент у неоднорідному електричному полі, так і силу, яка діє на межу розділу фаз. Враховано також вплив поверхневого заряду на збурення електричного заряду та струму.

### 3. Вплив зв'язаної рідини на фільтрацію в гетеропористому тілі

Розглянемо пружне тверде тіло, яке містить сукупність паралельно орієнтованих каналів (щілин), заповнених рідиною. Поперечний розмір таких каналів є випадковою величиною. Прийmemo, що за заданої зовнішньої дії на поверхні тіла, вздовж кожного з каналів створено сталий градієнт тиску, який викликає ламінарний фільтраційний потік рідини. При описі руху рідини щілину віднесемо до декартової системи координат  $(x, y, z)$ , вісь  $OZ$  якої співпадає з напрямом руху рідини, а вісь  $OY$  — перпендикулярна до її стінок (щілина займає область  $y \in (-H, H)$ , де  $H$  — її півширина). Шар зв'язаної рідини товщини  $h < H$  займає область  $y \in (-H, -H + h) \cup (H - h, H)$ . Прийmemo також, що густина ймовірності розподілу розмірів каналів визначається виразом

$$f(H) = \begin{cases} B_1 \exp\left[-\frac{(H - \langle H \rangle)^2}{2\xi^2}\right], & H_1 \leq H \leq H_2 \\ 0, & H < H_1, H > H_2 \end{cases} \quad (27)$$

де  $\langle H \rangle$  — середнє значення,  $\xi^2$  — дисперсія,

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \frac{1}{[\Phi(H_2) - \Phi(H_1)]},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\xi^2}\right] dx.$$

При цьому прийємо також, що  $h < H_1$ .

Середня швидкість протікання рідини в кожній щілині за постійних градієнта тиску та в'язкості рідини визначається шириною щілини і є випадковою величиною з густиною розподілу ймовірності (27). Середнє статистичне (математичне сподівання) швидкості визначаємо за формулою

$$v_s \equiv \langle v \rangle = \int_0^{\infty} f(H) \bar{v}(H) dH = \frac{k}{\mu_1} p; \quad (28)$$

для моделі 1

$$k = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(H) \left\{ \frac{H-h}{H} [(1-\vartheta)h(2H-h)] + \frac{2}{3}(H-h)^2 + \right. \\ \left. + H^{-1}(1-\vartheta)[h(2H-h)]^{\frac{\vartheta}{1-\vartheta}} \int_{H-h}^H (H^2 - y^2)^{\frac{1}{1-\vartheta}} dy \right\} dH; \quad (29)$$

для моделі 2

$$k = \frac{1}{3} \theta(H_1 - H_*) \int_{H_1}^{H_2} f(H) (H-h)^2 dH + \frac{1}{3} \theta(H_* - H_2) \int_{H_1}^{H_2} f(H) H^2 dH + \\ \frac{1}{3} [\theta(H_* - H_1) - \theta(H_* - H_2)] \left[ \int_{H_1}^{H_*} f(H) (H-h)^2 dH + \int_{H_*}^{H_2} f(H) H^2 dH \right], \quad (30)$$

де  $\theta(x)$  — функція Гевісайда.

Рівняння (28)-(30) відображають узагальнений закон Дарсі для гетеропористого тіла, який враховує наявність зв'язаної рідини в порах за моделями 1 та 2. Графіки на рис. 1 і 2 ілюструють відповідно залежність ефективного коефіцієнта проникності від параметра  $z = \xi / \langle H \rangle$  дисперсії розмірів каналів та швидкості фільтрації від величини градієнта тиску  $p$ . Розрахунки проводилися при  $\vartheta = 0,5$ ,  $H_1 = 10^{-7}$  м,  $H_2 = 5 \cdot 10^{-7}$  м,  $\langle H \rangle = 3 \cdot 10^{-7}$  м,  $\tau_* = 6 \cdot 10^{-2}$  Па. На рис. 1 взято  $r = 10^{-7}$  м, а на рис. 2 —  $\xi = 3 \cdot 10^{-7}$  м. Суцільні лінії відповідають моделі 1, а

штрихові — моделі 2 зв'язаної рідини. Для порівняння пунктирними лініями показано графіки таких залежностей за відсутності зв'язаної рідини. Цифри 1, 2, 3, на рис. 1 відповідають значенням  $10^5$ ,  $2 \cdot 10^5$ ,  $3 \cdot 10^5$  Па/м градієнта тиску. Бачимо (рис. 1), що за відсутності зв'язаної рідини та для її моделі 1 ефективний коефіцієнт проникності не залежить від величини градієнта тиску. При цьому залежність швидкості фільтрації від градієнта тиску є лінійною (рис. 2). Наявність зв'язаної рідини для цієї моделі проявляється у менших величинах коефіцієнта проникності та швидкості фільтрації. Для моделі 2 ефективний коефіцієнт проникності збільшується з ростом градієнта тиску  $p$  (рис. 1), закон Дарсі відображає нелінійність залежності швидкості фільтрації від  $p$  (рис. 2), що спостерігається для дрібнопористих середовищ [3].

**Висновки.** Враховано локальну фізичну неоднорідність стану рідини та твердої фази пористого тіла, пов'язану з їхньою поверхневою взаємодією, а саме — неоднорідність розподілу електричного заряду та структурованості порової рідини в околі поверхні контакту фаз. Це дозволило побудувати математичні моделі для опису у взаємозв'язку механічних та електромагнітних процесів у пористому насиченому

рідиною тілі, а також отримати узагальнений закон Дарсі для гетеропористого тіла, який враховує наявність зв'язаної рідини в порах. Кількісно проаналізовано вплив зв'язаної рідини на фільтраційні процеси за різних моделей її опису. Показано, що врахування деструктування зв'язаної рідини під впливом зсувних напружень приводить до нелінійності закону Дарсі.

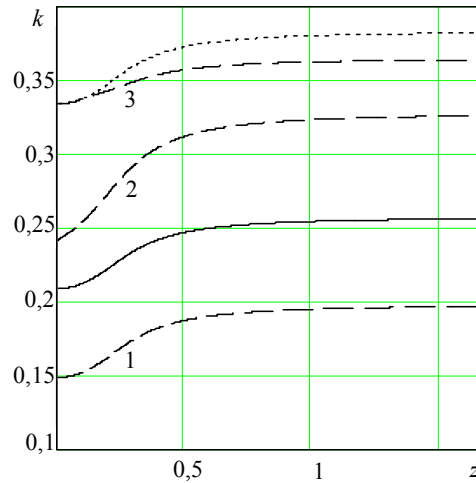


Рис. 1. Залежність ефективного коефіцієнта проникності гетеропористого тіла від параметра дисперсії  $z$  для різних значень градієнта тиску

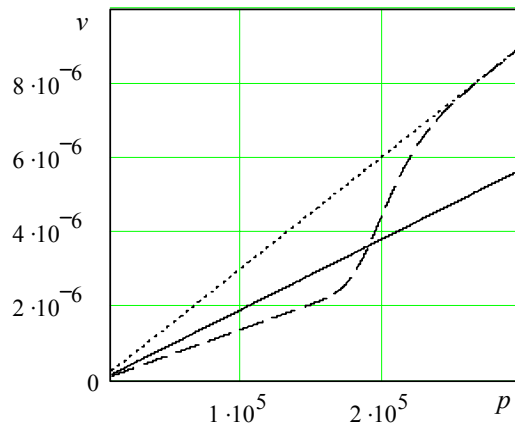


Рис. 2. Залежність швидкості фільтрації рідини від величини градієнта тиску

## Література

- [1] Алтоиз Б. А., Асланов С. К. Моделирование структурированного приповерхностного слоя в динамике вязкой жидкости // Доп. НАН України. — 2003. — № 9. — С. 76-79.
- [2] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 335 с.
- [3] Грунтоведение / Под ред Ю. С. Сергеева. — М.: Изд. МГУ. — 1983. — 465 с.
- [4] Дерягин Б. В., Чураев Н. В. Новые свойства жидкостей. — М.: Наука, 1971. — 176 с.
- [5] Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. — М.: Наука, 1985. — 398 с.
- [6] Иванов А. Г. Эффект электризации пластовых залежей при прохождении через них упругих волн // Доклады АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 11. — С. 41-44.
- [7] Кондрат В. Рівняння електромагнітної механіки пористого насиченого середовища // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 84-96.
- [8] Кузнецов О. Л., Симкин Э. М. Преобразование и взаимодействие геофизических полей в литосфере. — М.: Недра, 1990. — 269 с.
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
- [10] Нигматулин Р. Н. Динамика многофазных сред. Ч. 1. — М.: Наука, 1987. — 464 с.
- [11] Нигматулин Р. Н. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
- [12] Основы сейсмоэлектроразведки / Потапов О. А., Кондрат В. Ф., Лизун С. А. и др. М.: Недра. — 1995. — 268 с.
- [13] Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. — М.: Наука, 1976. — Т. 1. — 526 с.
- [14] Фізико-математичне моделювання складних систем / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін. Під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: Сполом, 2004. — 264 с.
- [15] Фридрихсберг Д. А. Курс коллоидной химии. — Л.: Химия, 1974. — 352 с.
- [16] Чапля Є., Кондрат В., Строгуш В. Вплив механічних коливань на перенос домішок в твердому тілі. Порватий шар // Машинознавство. — 2000. — № 8. — С. 15-19.
- [17] Kubik J., Cieszko M., Kaczmarek M. Podstawy dynamiki nasyconych ośrodków porowatych. — Warszawa, 2000. — 240 s.
- [18] Pride S. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B. — 1994. — Vol. 50, № 21. — P. 15678-15696.

## On the Mathematical Modelling of Physical Mechanical Processes in the Porous Saturated Medium

Vasyl Kondrat

*The two-phase rigid body is considered which consists of a deformable porous skeleton and liquid, that fills its pores. Porosity is open. In an initial state a body is statistically homogeneous and isotropic. The different conditions of interaction of solid and liquid phases and corresponding different physical analogies of a porous body are considered. According to the first (classic) model both phases in an initial state have steadied properties and are homogeneous in spatial*

*domains, they occupy. By the second model the liquid is an aquosystem and skeleton is solid solution. Then in connection with a difference of chemical potentials of charged impurity (additives) in phases their spatial reallocation takes place with derivation to a double electrical layer in environ of a surface of a contact of phases. The third model takes into account that the contact interaction results in change of physical mechanical characteristics of a liquid in contact area and a structured (bound) liquid arises. The equations of mathematical models of mechanical and mechano-electromagnetic processes in a porous body are obtained. They are founded on reduced physical analogs. The influence of a bound liquid on filtration in heteroporous body is quantitatively parsed.*

## **К математическому моделированию физико-механических процессов в пористых насыщенных телах**

Василь Кондрат

*Объектом исследования есть двухфазное твердое тело, которое состоит из деформируемого пористого скелета и жидкости, заполняющей поры. Пористость открытая. В начальном состоянии тело статистически однородное и изотропное. Рассматриваются различные условия взаимодействия твердой и жидкой фаз, а в связи с этим различные физические модели пористого тела. Согласно первой (классической) модели обе фазы в начальном состоянии имеют установившиеся свойства и являются однородными в пространственных областях, которые они занимают. За второй моделью жидкость является раствором электролита, а скелет твердым раствором. Тогда в связи с разницей химических потенциалов заряженных примесей в фазах имеет место их пространственное перераспределение с образованием двойного электрического слоя в окрестности поверхности контакта фаз. Третья модель учитывает то, что контактное взаимодействие приводит к изменению физико-механических свойств жидкости в приконтактной области и возникает структурированная (связанная) жидкость. Получены уравнения математических моделей механических и механоэлектромагнитных процессов в пористом теле, которые базируются на приведенных физических моделях. Количественно проанализировано влияние связанной жидкости на фильтрацию в гетеропористом теле.*

Отримано 24.02.06