УДК 531.8

До теорії термомеханічних процесів в аморфних діелектриках за високих температур

Василь Чекурін[1], Оксана Панченко[2], Олександра Фльорко[3]

[1] професор, д. ф.-м. н., ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060, chekurin@iapmm.lviv.ua
[2] Мукачівський технологічний інститут МОН України, вул. Ужгородська, 26, Мукачево, 89600
[3] ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060

Розглядається математична модель для опису у взаємозв'язку процесів деформування, теплопровідності, електропровідності та діелектричної поляризації в макроскопічно ізотропних діелектричних тілах у широкому діапазоні температур при дії зовнішніх динамічних силових навантажень, теплових і електромагнітних потоків. Водночас із кондуктивним та конвективним теплоперенесенням у моделі враховано також і променевий механізм теплообміну, як на поверхні, так і в об'ємі тіл. До того ж модель охоплює процеси розсіяння енергії, зумовлені в'язкістю матеріалу, діелектричною релаксацією та електропровідністю. В рамках моделі можна формулювати задачі для теоретичних досліджень у трьох практично важливих напрямках. Перший напрям — це задачі аналізу та оптимізації механічних, теплових і електричних процесів при термічних обробках з використанням інфрачервоного (ІЧ), ультразвукового та електромагнітного нагрівань. Другий — прямі задачі визначення залишкових напружень, які виникають після застосування тих чи інших технологічних обробок. Третій — обернені задачі неруйнівного визначення температури й напружено-деформованого стану, а також ідентифікації структури об'єктів на основі даних вимірювання параметрів ІЧ-випромінювання та поглинання.

Ключові слова: аморфні діелектрики, деформація, залишкові напруження, температурне поле, ІЧ-випромінювання.

Вступ. У сучасній техніці широко використовують матеріали, що мають аморфну атомно-молекулярну структуру (неорганічне скло, органічне скло та деякі інші пластмаси). Ці матеріали єднає те, що вони макроскопічно ізотропні, погано проводять електричний струм та тепло, не мають виражених магнітних властивостей і частково прозорі для електромагнітного поля в інфрачервоній області спектра (ІЧ-випромінювання). Натомість їх механічні властивості можуть істотно відрізнятися — так, неорганічне скло за звичайних температур його експлуатації є пружним твердим тілом, яке руйнується за крихким механізмом, тоді як пластмаси навіть за таких температур можуть відчутно проявляти властивості в'язкості. Проте, зі зростанням температури властивості скла помітно змінюються — збільшуються його в'язкість, електропровідність, діелектричні втрати. І, навпаки, зі зниженням температури органічні полімери окрихчуються. Отже неорганічне скло і деякі пластмаси мають якісно подібні механічні, теплові, електричні, діелектричні та оптичні властивості. В'язкість твердого тіла визначає дисипацію механічної енергії, відтак — інтенсивність джерел тепла, і є вирішальним чинником, наприклад, при ультразвуковому зварюванні полімерів. Ця властивість істотно впливає також на формування залишкових напружень при високотемпературних термообробках, зокрема, — при гартуванні скла. Натомість теплопровідність, ІЧ-теплообмін та конвекція є визначальними для формування температурних полів, наприклад, у зоні термічного впливу при зварюванні, а діелектричні властивості й електропровідність можуть бути істотними для термообробок скла, які базуються на одночасному використанні джерел інфрачервоного нагріву та електричного поля. Тому розвиток нелінійних математичних моделей, які описують у взаємозв'язку механічні, теплові та електромагнітні процеси в таких об'єктах є актуальною науковою проблемою, яка має важливе практичне значення.

1. Механізми теплообміну

У класичних моделях термомеханіки [4] здебільшого враховують два механізми теплообміну — кондуктивний та конвективний. Перший механізм описує теплообмін в об'ємі тіла, для нього тепловий потік приймають пропорційним градієнтові температури. Конвективний механізм враховує теплообмін тіла з довкіллям через поверхню. Інтенсивність такого теплообміну здебільшого приймають пропорційною різниці температур поверхні тіла та середовища, в якому це тіло перебуває. Якщо ж зовні тіла присутні джерела, що випромінюють теплову енергію, то в класичних моделях, зазвичай, приймають, що вся енергія випромінювання, яка потрапляє на поверхню, цією ж поверхнею повністю поглинається. Відповідно до цього дію випромінювання на тіло враховують введенням відповідного припливу тепла в крайову умову на теплові параметри

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial V} = h_c\left(T\big|_{\partial V} - T_c\right) - J_r\,, \tag{1}$$

де T і T_c — температури тіла і довкілля відповідно; λ — коефіцієнт теплопровідності матеріалу; h_c — коефіцієнт конвективного теплообміну; J_r — густина потоку теплового випромінювання, що потрапляє на поверхню ∂V ззовні; $\partial/\partial\vec{n}$ — оператор нормальної похідної до поверхні ∂V тіла.

Потік J_r — можна обчислити в рамках моделі променевого теплообміну [6], якщо відомі розподіли температур усіх джерел тепла. Опис теплообміну тіла з довкіллям у вигляді (1) можливий, коли відтік тепла з поверхні тіла внаслідок його власного теплового випромінювання значно менший порівняно з конвективною тепловіддачею та припливом енергії від зовнішніх джерел J_r. В іншому випадку замість формули (1) слід використовують крайову умову у вигляді

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial V} = h\left(T\big|_{\partial V} - T_c\right) - J_r + K^e n^2 \overline{\sigma} T^4\Big|_{\partial V}\,, \tag{2}$$

де $\overline{\sigma} = 5{,}668 \cdot 10^{-8}$ Вт/м$^2 \cdot$К^4 — стала Стефана-Больцмана, яка встановлює зв'язок між температурою T тіла і потоком теплової електромагнітної енергії, яку воно випромінює; K^e — коефіцієнт випромінювання поверхні, $K^e = 1$ для абсолютно чорної поверхні і $K^e = 0$ — для дзеркальної; n — коефіцієнт заломлення середовища.

Остання складова в правій частині співвідношення (2) якраз і враховує відтік тепла з поверхні тіла внаслідок випромінювання ним енергії в інфрачервону спектрі частот. Істотно, що у цьому випадку крайова умова стає нелінійною

Згідно (1) та (2) теплообмін тіла з довкіллям відбувається лише через поверхню тіла. Такий підхід цілком прийнятний для тіл з високою електричною провідність, наприклад металів, що мають високі коефіцієнти поглинання й випромінювання теплового електромагнітного поля. Натомість скло й пластмаси, як відомо, є матеріалами частково прозорими для теплового електромагнітного випромінювання. З підвищенням температури інтенсивність випромінювання зростає. Тож, теплова електромагнітна енергія, що випромінюється внутрішніми областями тіла, внаслідок його часткової прозорості поширюється на деякі відстані, поглинаючись і розсіюючись вздовж свого шляху, і, досягнувши поверхні тіла, може вийти за його межі. Такий механізм перенесення тепла за достатньо високих температур може суттєво впливати на розподіл теплових потоків у тілі.

Водночас теплове електромагнітне випромінювання, що потрапляє на поверхню скла від зовнішніх джерел, може проникати в його товщу, поглинаючись та розсіюючись вздовж свого шляху. Таким чином реальний розподіл температури, який встановлюється в тілі, визначається не тільки процесом кондуктивної теплопровідності, але й радіаційним теплообміном, тож його слід враховувати в моделях термомеханіки. Крім того, врахування в математичній моделі теплового електромагнітного випромінювання важливе для розробки методів неруйнівного визначення температури та напружено-деформованого стану на основі даних вимірювання параметрів цього випромінювання поза межами тіла.

У літературі відомі математичні моделі термопружності тіл низької електропровідності, зокрема, модель, розвинена стосовно задач нагріву тепловим електромагнітним полем [1].

У статті увага зосереджується на випадкові, коли температура джерел тепла значно перевищує температуру досліджуваних тіл і їх власним тепловим випромінюванням можна знехтувати порівняно зі зовнішнім припливом енергії теплового електромагнітного випромінювання. Це дозволяє лінеаризувати задачу теплообміну і реалізувати розрахункову схему, за якою на першому етапі визначається об'ємне тепловиділення, зумовлене зовнішнім тепловим випромінюванням, а на наступних — розв'язується задача термопружності із заданими джерелами тепла.

Зазначимо, що при дослідженні процесів охолодження таких об'єктів, а також їх нагріву до температур, сумірних із температурою джерел тепла, припущення про малість власного об'ємного теплового випромінювання порівняно з припливом енергії від зовнішніх джерел теплового електромагнітного поля стає неприйнятним.

Тож для адекватного опису термомеханічних процесів у діелектричних тілах за високих температур у багатьох випадках слід враховувати у математичній моделі процеси ІЧ-теплообміну. Для цього необхідно доповнити математичну модель термомеханіки відповідними рівняннями, що описують перенесення електромагнітне випромінювання в об'ємі тіл і на їх поверхні та враховують його взаємодію з температурним полем, механічними та електромагнітними процесами [8, 10].

2. Рівняння балансу маси, імпульсу та енергії

Розглянемо макроскопічно однорідне й ізотропне в'язкопружне тіло, що перебуває в неоднорідному нестаціонарному термодинамічному стані під дією зовнішніх потоків теплової енергії, силового навантаження, електромагнітного поля. Тіло займає область V евклідового простору, обмежену достатньо гладкою поверхнею ∂V. Параметри механічних і теплових процесів у області V тіла задовольняють рівняння балансу маси, імпульсу та енергії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V} \right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V} \vec{V} - \hat{\sigma} \right) + \vec{t} \ , \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\rho u \vec{V} - \vec{J}^{Q} \right) + W_f + W_r + W_\sigma + W_D \, . \tag{5}$$

Тут ρ — густина мас тіла, $\vec{V}$ — швидкість локального руху (деформації) тіла, $\vec{\nabla}$ — оператор градієнта в просторі актуальної конфігурації деформованого тіла, $\hat{\sigma}$ — тензор напружень Коші, $\vec{t}$ — локальна густина об'ємних сил, що діють зі сторони електромагнітного поля, u — питома внутрішня енергія тіла, W_f — густина потужності, що поглинається тілом внаслідок його взаємодії з макроскопічним електромагнітним полем, W_r — густина потужності, що поглинається тілом внаслідок його взаємодії з тепловим електромагнітним полем, W_σ, W_D — складові, що враховують дисипації механічної та електричної енергій, спричинені в'язкістю та процесом релаксації електричної поляризації відповідно, $\vec{J}^{Q}$ — кондуктивний потік тепла, який визначається законом Фур'є [4]

$$\vec{J}^{Q} = -\lambda \vec{\nabla} T \, . \tag{6}$$

Визначаючи густину пондеромоторних сил $\vec{t}$ у рівнянні (4), врахуємо, що за нормальних температур скло є електричним ізолятором, у якому відсутні рухливі об'ємні заряди. Із підвищенням температури у склі проявляється невелика електрична провідність, обумовлена рухливими йонами. Таким чином, густина пондеромоторних сил $\vec{t}$ визначається процесом поляризації та дією магнітного поля на струм: $\vec{t} = \vec{t}_P + \vec{t}_L$. Остання складова це сила Лоренца

$$\vec{t}_L = \vec{j} \times \vec{B}\,, \tag{7}$$

де $\vec{B}$ — індукція магнітного поля, $\vec{j}$ — густина струму провідності.

Густина сил $\vec{t}_p$, спричинених процесом поляризації, визначається формулою [7]

$$\vec{t}_P = \vec{\nabla}\left(\vec{E}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \rho} \rho\right) - \vec{E}^2 \vec{\nabla} \kappa\,, \tag{8}$$

де κ — діелектрична сприйнятливість матеріалу, $\vec{E}$ — напруженість електричного поля.

Якщо діелектрична сприйнятливість κ є лінійною функцією густини ρ, то формула (8) набуває вигляду

$$\vec{t}_P = \kappa \vec{\nabla} \vec{E}^2\,. \tag{9}$$

Енергія W_f в рівнянні (5) враховує теплову дію електричного струму (джоулеве тепло) [7]

$$W_f = \vec{j} \cdot \vec{E}\,. \tag{10}$$

Диференціальні рівняння (3)-(5) та співвідношення (6)-(10), які їх доповнюють, містять параметри механічних ($\rho, \vec{V}, \hat{\sigma}$), теплових ($u, T, \vec{J}^Q$) та електромагнітних ($\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$) процесів, а також параметри, що відповідають за взаємодію механічних і електромагнітних процесів ($\vec{t}$), механічних і теплових (W_σ), теплових і електромагнітних (W_f, W_D), взаємодію з тепловим електромагнітним полем (W_r).

Окрім рівнянь (3)-(5) і співвідношень (6)-(10) між названими параметрами можуть існувати й інші зв’язки. Наприклад, якщо ввести вектор переміщення $\vec{u}$ матеріальних точок тіла то локальна макроскопічна швидкість $\vec{V}$ визначиться як

$$\vec{V} = \frac{d\vec{u}}{dt}\,, \tag{11}$$

де d/dt — оператор субстанціональної похідної

$$\frac{d\ldots}{dt} = \left.\frac{\partial\ldots}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial\ldots}{\partial t}\right|_{x_i} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}\ldots\,, \tag{12}$$

ξ_i — координати матеріальних точок у відліковій конфігурації (змінні Лагранжа), x_i — координати матеріальних точок у актуальній конфігурації (змінні Ейлера).

Через вектор $\vec{u}$ виражається нелінійний тензор деформації $\hat{\varepsilon}$ Фінгера [5]

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T - \vec{\nabla}\vec{u}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right). \tag{13}$$

Як відомо [5], тензори напружень $\hat{\sigma}$ та деформації $\hat{\varepsilon}$ пов'язані між собою співвідношеннями, які встановлюють механічні властивості середовища (пружність, пластичність, в'язкість і т. д.). У такий спосіб механічні параметри, які входять до рівнянь (3), (4) — векторний $\vec{V}$ та тензорний $\hat{\sigma}$, можна виразити через один векторний параметр $\vec{u}$. Існує також зв'язок між тепловими параметрами, що входять до рівняння (5) — внутрішньою енергією u та температурою T. Цей зв'язок визначає теплові властивості матеріалу.

Співвідношення, які визначають механічні та теплові властивості матеріалу, встановимо пізніше, а зараз запишемо рівняння, що пов'язують параметри макроскопічного електричного поля $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j}$.

3. Рівняння макроскопічної електродинаміки

Параметри макроскопічного електромагнітного поля $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j}$, що входять у вирази (7)-(10), задовольняють в області V тіла рівняння електродинаміки суцільного середовища [7]

$$\vec{\nabla}\times E = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0. \tag{14}$$

Тут $\vec{D}$ та $\vec{H}$ — електрична індукція та напруженість магнітного поля.

Густина струму $\vec{j}$, згідно закону Ома, визначається через напруженість електричного поля $\vec{E}$.

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}, \tag{15}$$

де γ — електрична провідність матеріалу (параметр, значення якого істотно залежить від температури).

Для немагнітних матеріалів зв'язок між напруженістю магнітного поля та магнітною індукцією є наступний

$$\vec{H} = \mu_0^{-1}\vec{B}. \tag{16}$$

Тут $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м — універсальна магнітна стала.

Щоб встановити зв'язок між вектором електричної індукції $\vec{D}$ та напруженістю електричного поля $\vec{E}$, який визначається діелектричними властивостями матеріалу, а також співвідношення, що визначають механічні та теплові властивості діелектрика, скористаємося методами термодинаміки [2].

Поза межами тіла вектори електромагнітного поля $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ задовольняють рівняння електродинаміки (14). Розглядаючи довкілля тіла як середовище, що не поляризується, не намагнічується і не проводить електричний струм, у рівняннях (14) для області поза межами тіла слід покласти $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},\ \vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B},\ \vec{j} = 0$, де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — універсальна електрична стала.

Взаємовплив електромагнітного поля в тілі та поза його межами враховується в математичній моделі умовами на границі тіла, які сформулюємо далі.

4. Термодинамічні співвідношення

Щоб урахувати в термодинамічних співвідношеннях процеси теплопровідності, деформування, електричної поляризації виберемо за параметри локального термодинамічного стану — температуру T, тензор деформації $\hat{\varepsilon}$ та напруженість електричного поля $\vec{E}$. Спряженими до них параметрами будуть [2] густина ентропії s^*, тензор напружень $\hat{\sigma}$ та густина електричної поляризації $\vec{P}^*$.

При цьому основне термодинамічне співвідношення для густини енергії $f^* = u^* - Ts^* - \vec{E} \cdot \vec{P}^*$ можна подати у вигляді

$$\frac{df^*}{dt} = -s^* \frac{dT}{dt} - p \frac{d\varepsilon}{dt} + \hat{\pi} : \frac{d\hat{e}}{dt} + \vec{P}^* \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} + W_d + W_P . \tag{17}$$

Зірочкою відзначені густини відповідних параметрів: $u^* = \rho u$ – внутрішньої енергії, $s^* = \rho s$ — ентропії, та $\vec{P}^* = \rho \vec{P}$ — поляризації; $\varepsilon = \mathrm{Sp}\,\hat{\varepsilon}$ — перший інваріант тензора деформації $\hat{\varepsilon}$ та $\hat{e}$ — його девіаторна складова, $p = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}$ — середні нормальні напруження, $\hat{\pi} = \hat{\sigma} + p\hat{I}$ — девіаторна складова тензора напружень $\hat{\sigma}$, $\hat{I}$ — одиничний тензор.

З формули (17) випливає, що вільна енергія f^* є скалярною функцією параметрів $T, \varepsilon, \hat{e}, \vec{E}$. Позаяк тіло ізотропне, подамо її у вигляді квадратичного функціонала

$$f^* = -\frac{c_v}{2T_0}\left(T - T_0\right)^2 + \frac{K}{2}\left[\varepsilon - 3\alpha_T\left(T - T_0\right)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t G\left(t - t_1 - t_2\right)\dot{\hat{e}}\left(t_1\right) : \dot{\hat{e}}\left(t_2\right) dt_1 dt_2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t E\left(t - t_1 - t_2\right)\dot{\vec{E}}\left(t_1\right) \cdot \dot{\vec{E}}\left(t_2\right) dt_1 dt_2 . \tag{18}$$

Тут T_0 — початкова рівноважна температура тіла, c_v — питома теплоємність матеріалу за сталого об'єму, K — модуль всебічного стиску матеріалу, α_T — коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу, крапка над буквою вказує на операцію взяття похідної за часом. Скалярні функції $G(t)$ (ядро зсувної релаксації) та $E(t)$ (ядро діелектричної релаксації) у цьому співвідношенні враховують процеси в'язкості та релаксації поляризації. Оскільки ці процеси в склі інтенсифікуються при нагріванні, то характеристики матеріалу $G(t)$ та $E(t)$ істотно залежать від температури. У моделі Максвела використовують експоненційні ядра виду [3]

$$G(t) = 2G\delta(t) - 2G\frac{1}{\tau_\sigma}\exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right),$$

$$E(t) = 2(1+\kappa)\delta(t) - 2(1+\kappa)\frac{1}{\tau_D}\exp\left(-\frac{t}{\tau_D}\right). \tag{19}$$

Тут $\delta(t)$ — дельта-функція Дірака, G — миттєвий модуль зсуву матеріалу, τ_σ — час релаксації зсувних напружень, κ — миттєва діелектрична сприйнятливість матеріалу, τ_D — час релаксації поляризації.

У цій моделі температурну залежність ядер релаксації $G(t)$ та $E(t)$ можна врахувати залежностями від температури відповідних часів релаксації

$$\tau_\sigma = \tau_\sigma(T),\ \tau_D = \tau_D(T). \tag{20}$$

Диференціюючи (18) за часовою змінною, отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{df^*}{dt} &= -\left[\left(\frac{c_v}{T_0} + 3\alpha_T K\right)(T - T_0) + 3\alpha_T K\varepsilon\right]\frac{dT}{dt} + \\ &+ K\left[\varepsilon - 3\alpha_T(T - T_0)\right]\frac{d\varepsilon}{dt} + \left[\int_0^t G(t - t_1)\hat{e}(t_1)dt_1\right] : \frac{d\hat{e}}{dt} + \\ &+ \left[\int_0^t E(t - t_1)\vec{E}(t_1)dt_1\right]\cdot\frac{d\vec{E}}{dt} + \int_0^t\int_0^t \dot{G}(2t - t_1 - t_2)\dot{\hat{e}}(t_1) : \dot{\hat{e}}(t_2)dt_1dt_2 + \\ &+ \int_0^t\int_0^t \dot{E}(2t - t_1 - t_2)\dot{\vec{E}}(t_1)\cdot\dot{\vec{E}}(t_2)dt_1dt_2\end{aligned} \tag{21}$$

Зіставляючи формули (21) та (17), отримуємо лінійні рівняння, які пов'язують між собою параметри локального термодинамічного стану тіла

$$s^* = \left(\frac{c_v}{T_0} + 3\alpha_T K\right)(T - T_0) + 3\alpha_T K\varepsilon,\quad p = -K\left[\varepsilon - 3\alpha_T(T - T_0)\right],$$

$$\hat{\pi}=\int_0^t G(t-t_1)\hat{e}(t_1)dt_1, \qquad \vec{P}^*=\int_0^t E(t-t_1)\vec{E}(t_1)dt_1, \tag{22}$$

та виражають дисипативні складові W_σ та W_D у рівнянні (5) через швидкості зміни девіатора тензора деформації $\hat{e}$ та вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$

$$W_\sigma=\int_0^t\int_0^t \dot{G}(2t-t_1-t_2)\dot{\hat{e}}(t_1):\dot{\hat{e}}(t_2)dt_1dt_2,$$

$$W_D=\int_0^t\int_0^t \dot{E}(2t-t_1-t_2)\dot{\vec{E}}(t_1)\cdot\dot{\vec{E}}(t_2)dt_1dt_2. \tag{23}$$

Перше та друге співвідношення системи (22) пов'язують миттєві значення локальних параметрів стану тіла — питомої ентропії s^* та середніх нормальних напружень p з іншими параметрами стану — температурою T та об'ємною деформацією ε. Натомість третє рівняння встановлює нелокальний зв'язок — тензор $\hat{\pi}$ в актуальний момент часу t залежить не лише від значення тензора $\hat{e}$ в цей момент часу, й від усіх його значень у попередні моменти часу. Аналогічний зв'язок між векторами $\vec{P}^*$ та $\vec{E}$ встановлює четверте рівняння (22).

Вибір вільної енергії f^* у формі (18) дозволяє врахувати релаксацію лише девіаторної складової тензора напружень (зсувна в'язкість), кульова ж складова цього тензора p пов'язана з кульовою складовою тензора деформації ε скінченим співвідношенням $(22)_2$. Для врахування об'ємної в'язкості [3] замість другого співвідношення (22) використовуємо таке

$$p=-\int_0^t K(t-t_1)\left[\varepsilon(t_1)-\alpha_T\left(T(t_1)-T_0\right)\right]dt_1, \tag{24}$$

де $K(t-t_1)$ — ядро об'ємної релаксації, яке для моделі Максвела матиме вигляд

$$K(t)=-K\delta(t)+K\frac{1}{\tau_p}\exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right). \tag{25}$$

Тут τ_p — час релаксації об'ємних напружень.

Співвідношення (22), (24) описують теплові, механічні та діелектричні властивості матеріалу і дозволяють подати в рівняннях (3)-(10) внутрішню енергію u, тензор напружень $\hat{\sigma}$ та вектор електричної індукції $\vec{D}$ через параметри стану — температуру T, тензор деформації $\hat{\varepsilon}$ та вектор електричного поля $\vec{E}$. Формули (23) виражають через ці параметри густини потужностей, які враховують дисипацію механічної та електричної енергії внаслідок процесів в'язкості та діелектричної релаксації. З використанням співвідношення (13) тензор деформації в цих рівняннях можна виразити через вектор переміщення.

5. Модель теплового електромагнітного поля

Щоб отримати замкнену систему рівнянь моделі залишилося встановити співвідношення на параметр W_r, який у рівнянні (5) враховує радіаційний теплообмін в об'ємі тіла. З цією метою розглянемо модель теплового електромагнітного поля.

Теплове електромагнітне випромінювання твердого тіла зумовлене хаотичним рухом молекул, з яких воно складається. Молекули містять позитивні та негативні заряди і є електричними диполями. Коливний рух цих диполів приводить до випромінювання електромагнітного поля. Спектр цього випромінювання лежить в інфрачервоній області. Зі зростанням температури зростають частоти й амплітуди коливань мікрочастинок, що призводить до збільшення інтенсивності теплового електромагнітного поля і зміни спектра — максимум спектральної густини випромінювання зміщується в область вищих частот. Тож за високих температур частка теплового електромагнітного поля в теплообміні стає істотною.

Існує два підходи до опису теплового електромагнітного поля в середовищі: перший — базується на мікроскопічних рівняннях електродинаміки та їх осередненні [8, 9], другий — використовує рівняння перенесення випромінювання [6]. Другий підхід дозволяє ефективно враховувати спектральні властивості середовища, тому далі застосуємо його. Визначальним параметром у цьому підході є спектральна густина інтенсивності випромінювання $I_\nu = I_\nu(\vec{r},\vec{s},t)$ — скалярна функція двох векторних ($\vec{r},\vec{s}$) та двох скалярних (t,ν) аргументів. Тут ν — частота випромінювання, $\vec{r}$ — радіус-вектор довільної точки із області V, зайнятої тілом, $\vec{s}$ — одиничний вектор з початком у точці з радіус-вектором $\vec{r}\in\mathbb{V}$, що визначає довільний напрям у межах повного тілесного кута Ω. У декартовій базі вектор $\vec{s}$ задається компонентами $\vec{s}=\{\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi\}$, $\theta\in[-\pi,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

Фізична величина I_ν визначає в точці з радіус-вектором $\vec{r}$ у момент часу t густину енергії теплового електромагнітного поля в діапазоні частот $[\nu, \nu+d\nu]$, яка поширюється в напрямку $\vec{s}$ в межах елементарного тілесного кута. Густина випромінювання I теплового електромагнітного поля визначається через параметр I_ν шляхом її інтегрування в діапазоні частот: $I=\int_0^\infty I_\nu d\nu$, а інтеграл $\int_\Omega Id\Omega(\vec{s})$ визначає локальну густину енергії теплового електромагнітного поля.

Спектральна густина випромінювання I_ν задовольняє в області V рівняння

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_\nu+\vec{s}\cdot\nabla I_\nu = J_\nu^e-\left(K_\nu^a+S_\nu\right)I_\nu+\frac{1}{4\pi}S_\nu\int\limits_\Omega P_\nu\left(\vec{s},\vec{s}'\right)I_\nu\left(\vec{s}'\right)\mathrm{d}\Omega\left(\vec{s}'\right), \tag{26}$$

зване рівнянням перенесення випромінювання [6]. Тут $K_\nu^a = K_\nu^a(\vec{s})$ та $S_\nu = S_\nu(\vec{s})$ — спектральні коефіцієнти поглинання та розсіювання випромінювання, $P_\nu(\vec{s},\vec{s}\,')$— індикатриса розсіювання, яка визначає частку розсіяного в точці з радіус-вектором $\vec{r} \in \mathbb{V}$ у напрямку $\vec{s} \in \Omega$ випромінювання, що прийшло в цю точку із напрямку $\vec{s}\,' \in \Omega$; c — швидкість світла. Складова $J_\nu^e = J_\nu^e(\vec{r},\vec{s},t)$ враховує локальну спектральну інтенсивність енергії теплового електромагнітного поля, що випромінюється тілом. У наближенні локальної квазірівноваги цю складову можна виразити через температуру $T = T(\vec{r},t)$ тіла [6]

$$J_\nu^e = K_\nu^e(\vec{s}) I_{\nu b}(T),\ I_{\nu b}(T) \equiv \frac{2\pi\nu^3}{c^2}\left(\exp\frac{h\nu}{k_B T} - 1\right)^{-1}, \tag{27}$$

де K_ν^e — коефіцієнт випромінювання середовищем, $I_{\nu b}(T)$ — функція Планка, яка визначає спектральну інтенсивність теплового випромінювання абсолютно чорного тіла за умов термодинамічної рівноваги, h — стала Планка, k_B — стала Больцмана.

Теплову потужність W_r^e, що випромінюється тілом в точці з радіус-вектором $\vec{r} \in \mathbb{V}$, можна знайти, просумувавши енергію J_ν^e, яка випромінюється тілом на всіх частотах та в усіх напрямках: $W_r^e = \int_0^\infty \int_\Omega J_\nu^e d\Omega(\vec{s}) d\nu$. Аналогічно, локальний приплив теплової потужності до тіла W_r^a внаслідок поглинання ним теплового електромагнітного поля в об’ємі визначається інтегралом $W_r^a =$ $= \int_0^\infty \int_\Omega K_\nu^a I_\nu d\Omega(\vec{s}) d\nu$. Таким чином, складову W_r у рівнянні (5), що враховує обмін енергією в об’ємі тіла з ІЧ-електромагнітними полем, можна виразити через локальну температуру T та спектральну інтенсивність випромінювання I_ν

$$W_r = W_r^a - W_r^e = \int_0^\infty \int_W \left[K_\nu^a(\vec{s}) I_\nu(\vec{s}) - K_\nu^e(\vec{s}) I_{\nu b}(T)\right] d\Omega(\vec{s}) d\nu\,. \tag{28}$$

Параметри $K_\nu^a(\vec{s}), K_\nu^e(\vec{s}),\ S_\nu(\vec{s}),\ P_\nu(\vec{s},\vec{s}\,')$ є характеристиками матеріалу. У загальному випадку їх слід розглядати як функції локального термодинамічного стану тіла — температури $T = T(\vec{r},t)$ та тензора деформації $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\vec{r},t)$ внаслідок чого радіаційні властивості тіла стають залежними від просторових координат і часу. Якщо ж тіло — фізично неоднорідне, то ці параметри стають безпосередньо залежними від просторових координат.

Поширення випромінювання поза межами тіла описується рівнянням перенесення випромінювання виду (26). Якщо розглядати довкілля тіла як середовище, що не поглинає, не розсіює і не відбиває, то рівняння перенесення випромінювання для нього матиме вигляд

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_\nu + \vec{s}\cdot\vec{\nabla}I_\nu = 0 \,. \tag{29}$$

Далі до рівнянь (26) та (29), які описують поширення випромінювання в об'ємі тіла та в середовищі, що його оточує, долучимо співвідношення, яким задовольняє функція $I_\nu = I_\nu\left(\vec{r},\vec{s},t\right)$ на поверхні розриву — межі між тілом і довкіллям.

6. Умови на поверхні тіла

Встановимо тепер умови, яким задовольняють механічні, теплові та електромагнітні параметри моделі на поверхні ∂V тіла.

У крайових умовах на механічні параметри врахуємо, що на деякій частині S_σ поверхні ∂V може бути задана густина зовнішніх поверхневих сил $\vec{f}\left(\vec{r}\right)$, а на іншій частині S_u — вектор переміщення $\vec{w}\left(\vec{r}\right)$ [5]

$$\hat{\sigma}\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{n}\left(\vec{r}\right)=\vec{f}\left(\vec{r}\right),\ \vec{r}\in S_\sigma;\ \ \vec{u}\left(\vec{r}\right)=\vec{w}\left(\vec{r}\right),\ \vec{r}\in \mathrm{S}_u;\ \ \mathrm{S}_\sigma \bigcup \mathrm{S}_u = \partial V \tag{30}$$

Розглядаємо немагнітні діелектрики, в яких відсутні поверхневі заряди і струми. Для таких тіл параметри електромагнітного поля на поверхні ∂V задовольняють умови [7]

$$\left[\vec{B}_n\right]\Big|_{\partial V}=0,\ \left[\vec{D}_n\right]\Big|_{\partial V}=0,\ \left[\vec{E}_\tau\right]\Big|_{\partial V}=0,\ \left[\vec{H}_\tau\right]\Big|_{\partial V}=0, \tag{31}$$

де дужки $\left[\ldots\right]\Big|_{\partial V}$ вказують на стрибок відповідної величини при переході через поверхню, $\vec{B}_n$, $\vec{D}_n$ — нормальні та $\vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau$ — тангенційні стосовно поверхні ∂V складові векторів $\vec{B}$, $\vec{D}$ та $\vec{E}$, $\vec{H}$ відповідно.

Встановлюючи граничні умови на теплові параметри врахуємо, що на деякій частині S_J поверхні ∂V може контролюватися тепловий потік, а на іншій $S_T = \partial V - S_J$ температурне поле $T_c(\vec{r}\,)$. В умовах на тепловий потік враховуватимемо конвективний та радіаційний теплообмін. Конвективний тепловий потік з поверхні тіла, як звичайно, виразимо через різницю температур $T(\vec{r}\,) - T_c(\vec{r}\,)$, $\vec{r}\in S_J$, поверхні тіла та середовища, що його оточує. Променевий тепловий потік $J_r(\vec{r}\,)$, $\vec{r}\in S_J$, з поверхні ∂V містить три складові — відплив енергії за рахунок власного випромінювання поверхні, приплив енергії, внаслідок поглинання поверхнею випромінювання, що йде від зовнішніх джерел, і того, що потрапляє на цю поверхню зсередини тіла. У результаті матимемо

$$\begin{gathered}-\lambda\nabla T\left(\vec{r}\right)\cdot\vec{n}\left(\vec{r}\right)=-h_c\left[T\left(\vec{r}\right)-T_c\left(\vec{r}\right)\right]+J_r\left(\vec{r}\right),\ \vec{r}\in S_J,\\ T\left(\vec{r}\right)=T_c\left(\vec{r}\right),\ \vec{r}\in S_T,\ S_J\bigcup S_J=\partial V.\end{gathered} \tag{32}$$

Нехай поза межами тіла відсутні об'єкти, що відбивають теплові електромагнітні хвилі, а температури зовнішніх тіл, які їх випромінюють відомі. За таких умов можна вважати заданими значення спектральної інтенсивності випромінювання, яке падає на поверхню ∂V тіла із зовнішніх джерел, на зовнішньому боці поверхні. Позначивши цей параметр як $I_{\nu}^{out}\left(\vec{r},\vec{s},t\right)$, вважатимемо, що функція $I_{\nu}^{out}\left(\vec{r},\vec{s},t\right)$ відома для всіх точок з радіус-вектором $\vec{r}\in\partial V$ й усіх моментів часу t, а також усіх напрямків $\vec{s}$, що справджують умову $\vec{s}\cdot\vec{n}(\vec{r})<0$, де $\vec{n}(\vec{r})$ — нормаль до поверхні ∂V у точці з радіусом-вектором $\vec{r}$. При цьому отримуємо таке подання для параметра J_r

$$J_r\left(\vec{r},t\right)=-\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega}K_{\nu}^{e}\left(\vec{s}'\right)I_{\nu b}\left(T\left(\vec{r},t\right)\right)d\Omega\left(\vec{s}'\right)d\nu+$$
$$+\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega_1(\vec{r})}K_{\nu}^{a}\left(\vec{s}'\right)I_{\nu}\left(\vec{r},\vec{s}',t\right)d\Omega\left(\vec{s}'\right)d\nu+$$
$$+\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega_2(\vec{r})}K_{\nu}^{a}\left(\vec{s}'\right)I_{\nu}^{out}\left(\vec{r},\vec{s}',t\right)d\Omega\left(\vec{s}'\right)d\nu,\ \vec{r}\in\partial V. \tag{33}$$

Тут $\Omega_1\left(\vec{r}\right)$ — тілесний кут з вершиною в точці $\vec{r}\in\partial V$, такий, що для всіх напрямків $\vec{s}\in\Omega_1\left(\vec{r}\right)$ виконується умова $\vec{s}\cdot\vec{n}(\vec{r})>0$, $\Omega_2\left(\vec{r}\right)$ — тілесний кут з вершиною в точці $\vec{r}\in\partial V$, такий, що для всіх напрямків $\vec{s}\in\Omega_2\left(\vec{r}\right)$ виконується умова $\vec{s}\cdot\vec{n}(\vec{r})<0$. Коефіцієнти випромінювання K_{ν}^{e} та поглинання K_{ν}^{a} є характеристиками поверхні і загалом відрізняються від відповідних об'ємних коефіцієнтів. У такий спосіб у моделі враховується відмінність поверхневих та об'ємних радіаційних властивостей матеріалу.

Встановимо тепер умови, яким задовольняє на поверхні ∂V інтенсивність теплового випромінювання I_{ν}. Позначимо через I_{ν}^{+} і I_{ν}^{-} інтенсивності потоків випромінювання на зовнішньому та внутрішньому боках поверхні ∂V. Тоді, враховуючи, що випромінювання, яке падає на поверхню, частково цією поверхнею поглинається, частково відбивається, а решта проходить через поверхню (заломлюється), отримаємо

$$I_{\nu}^{+}\left(\vec{r},\vec{s},t\right)=K_{\nu}^{e}\left(\vec{s}\right)I_{\nu b}\left[T\left(\vec{r},t\right)\right]+\int\limits_{\Omega_1(\vec{r})}p_{\nu}^{rr}\left(\vec{s},\vec{s}'\right)K_{\nu}^{a}\left(\vec{s}'\right)I_{\nu}^{-}\left(\vec{r},\vec{s}',t\right)d\Omega\left(\vec{s}'\right)+$$
$$+\int\limits_{\Omega_2(\vec{r})}p_{\nu}^{rl}\left(\vec{s},\vec{s}'\right)I_{\nu}^{out}\left(\vec{r},\vec{s}',t\right)d\Omega\left(\vec{s}'\right),\ \vec{r}\in\partial V,\ \vec{s}\in\Omega_1\left(\vec{r}\right),$$
$$I_{\nu}^{+}\left(\vec{r},\vec{s},t\right)=I_{\nu}^{out}\left(\vec{r},\vec{s},t\right),\ \vec{r}\in\partial V,\ \vec{s}\in\Omega_2\left(\vec{r}\right), \tag{34}$$

$$I_{\nu}^{-}(\vec{r},\vec{s},t)=K_{\nu}^{e}(\vec{s})I_{\nu b}\left[T(\vec{r},t)\right]+\int\limits_{\Omega_2(\vec{r})} p_{\nu}^{rr}(\vec{s},\vec{s}')K_{\nu}^{a}(\vec{s}')I_{\nu}^{out}(\vec{r},\vec{s}',t)d\Omega(\vec{s}')+$$

$$+\int\limits_{\Omega_1(\vec{r})} p_{\nu}^{rl}(\vec{s},\vec{s}')I_{\nu}^{-}(\vec{r},\vec{s}',t)d\Omega(\vec{s}'),\ \vec{r}\in\partial V,\ \vec{s}\in\Omega_2(\vec{r}). \qquad (35)$$

Тут $p_{\nu}^{rr}(\vec{s},\vec{s}')$ — індикатриса заломлення поверхні, яка визначає частку заломленого в точці $\vec{r}\in\partial V$ у напрямку $\vec{s}'$ випромінювання, що прийшло в цю точку з напрямку $\vec{s}$; $p_{\nu}^{rl}(\vec{s},\vec{s}')$— індикатриса відбивання поверхні, яка визначає частку відбитого в точці $\vec{r}\in\partial V$ в напрямку $\vec{s}'$ випромінювання, що прийшло в цю точку з напрямку $\vec{s}$. Коефіцієнти $p_{\nu}^{rr}(\vec{s},\vec{s}')$ та $p_{\nu}^{rl}(\vec{s},\vec{s}')$ є характеристиками поверхні тіла.

Перші доданки в правих частинах рівнянь $(34)_1$ та (35) враховують власне теплове випромінювання матеріальних точок поверхні тіла в межах тілесних кутів $\Omega_1(\vec{r})$ та $\Omega_2(\vec{r})$. Другий доданок у правій частині рівняння $(34)_1$ враховує частку внутрішнього випромінювання, що заломлюється поверхнею ∂V поза меж області V тіла, а третій — зовнішнє теплове випромінювання, що відбивається поверхнею ∂V поза межі області V тіла. Другий доданок у правій частині (35) враховує зовнішнє випромінювання, що проникає через поверхню ∂V в тіло, а третій — враховує внутрішнє випромінювання, що відбивається поверхнею ∂V назад в область V тіла.

Параметри, які визначають оптичні властивості поверхні K_{ν}^{e}, K_{ν}^{a}, $p_{\nu}^{rr}(\vec{s},\vec{s}')$ та $p_{\nu}^{rl}(\vec{s},\vec{s}')$, як і відповідні їм об'ємні, слід розглядати, у загальному випадку, як функції термодинамічних параметрів стану поверхні — температури і деформації.

Висновки. Побудована математична модель для опису механічних, теплових та електрофізичних процесів у ізотропних діелектричних в'язкопружних тілах, що поглинають та випромінюють теплове електромагнітне поле. Система співвідношень моделі містить диференціальні рівняння балансу маси (3), імпульсу (4), енергії (5), макроскопічної електродинаміки (14) та інтегро-диференціальне рівняння перенесення теплового випромінювання (26). Окрім того система включає співвідношення, які визначають складові в рівняннях балансу, що враховують ефекти взаємодії механічних та електромагнітних (7)-(9), теплових та механічних $(23)_1$, теплових та електромагнітних (10), $(23)_2$, дію теплового випромінювання (28), а також співвідношення, які описують механічні $(22)_2$, $(22)_3$, (24), теплові (6), $(22)_1$, електричні (15) та діелектричні $(22)_4$ властивості. Встановлені також співвідношення, яким задовольняють параметри механічних (30), теплових (32), (33), електромагнітних (31) та радіаційних (34), (35) процесів на поверхні тіла.

Запропоновану модель термомеханіки аморфних діелектричних тіл можна використовувати для формулювання крайових задач дослідження поведінки таких об'єктів за різних умов навантаження. Ці задачі можна поділити на прямі та обернені. Серед прямих задач виділимо дві групи:

- визначення параметрів механічних та теплових процесів при заданих зовнішніх навантаженнях;
- визначення залишкових напружень після проведення технологічних обробок.

Серед обернених задач важливе практичне значення мають, зокрема:

- задачі керування параметрами теплових та механічних процесів, зокрема, стосовно проблем оптимізації технологічних режимів високотемпературної обробки;
- задачі неруйнівного визначення температурного поля та теплових напружень у тілі з використанням даних вимірювання параметрів його ІЧ-випромінювання;
- задачі неруйнівного визначення характеристик матеріалу і структури тіл на основі даних вимірювання параметрів механічних та теплових процесів на їх поверхні і потоків ІЧ-випромінювання.

Літератури

[1] *Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Терлецький Р. Ф.* Термомеханика тел низкой электропроводимости при воздействии электромагнитного излучения инфракрасного диапазона частот // Докл. АН УССР, сер. А. — 1990. — № 6. — С. 40-43.

[2] *Гроот де С. Р., Сарторп Л. Г.* Электродинамика. — М.: Наука, 1982. — 560 с.

[3] *Ильюшин А. А* Механика сплошной среды. — М.: Издательство Московского университета, 1978. — 288 с.

[4] *Коваленко А. Д.* Термоупругость. — К.: Вища шк., 1975. — 216 с.

[5] *Лурье А. И.* Теория упругости. — М: Наука, 1970. — 940 с.

[6] *Оцisи М. Н.* Сложный теплообмен. — М.: Мир, 1975. — 616 с.

[7] *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — 1954. — 620 с.

[8] *Фльорко О., Чекурін В.* Нелокальна модель високотемпературної термопружності напівпровідників // Вісник Львів. Ун-ту. Серія мех.-мат. — 1999. — Вип. 55. — С. 183–186.

[9] *Чекурін В. Ф.* Термодинамічна теорія кінетичних явищ у деформівних напівпровідниках. — Львів: ЛОНМІО, 1999. — 72 с.

[10] *Чекурин В. Ф., Носалык Б. Я.* К описанию термомеханических процессов в полупроводниках с учетом переноса энергии излучением // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1989. — Вып. 29. — С. 37-41.

To the Theory of Thermomechanical Processes in Amorphous Dielectrics under High Temperatures

Vasyl Chekurin, Oksana Panchenko, Alexandra Flyorko

A mathematical model to describe the coupled processes of deformation, heat conductivity, electric conductivity and dielectric polarization in macroscopically isotropic dielectric solids in wide temperature rage under dynamic force loading, heat and electromagnetic fluxes has been considered. The model involves both conductive and ray heat exchanges in the body volume and *both convective and ray exchanges on its surface. There are taken into consideration in the model the energy dissipation processes caused by the material viscosity, dielectric relaxation and electric conductivity. In the frame of the model mathematical problems for theoretical studies in three directions can be formulated. The first one involves problems for analysis and optimization of mechanical, thermal and electric processes under thermal treatments when the infrared (IR), ultrasonic and electromagnetic techniques of heating are used. The second one are direct problems for theoretical determination of residual stresses originating after high-temperature technological treatments. The third direction involves inverse problems for non-destructive determinations of temperature fields and stress-strained states, the objects structure and material characteristics identification on the base of data, obtained by measuring of parameters IR-radiation absorption and emission..*

К теории термомеханических процессов в аморфных диэлектриках при высоких температурах

Василь Чекурин, Оксана Панченко, Олександра Фльорко

Рассматривается математическая модель для описания во взаимосвязи процессов деформации, теплопроводности, электропроводности и диэлектрической поляризации в макроскопически изотропных диэлектрических телах в широком диапазоне температур при внешних динамических силовых воздействиях, тепловых и электромагнитных потоках. На ряду с кондуктивным и конвективным теплопереносом в модели учитывается также и лучевой механизм теплообмена, как на поверхности, так и в объеме тал. Кроме этого принимаются во внимание процессы диссипации энергии, обусловленные вязкостью материала, диэлектрической релаксацией и электропроводностью. В рамках модели можно формулировать задачи для теоретических исследований в трех практически важных направлениях. Первое направление — это задачи анализа и оптимизации механических, тепловых и электрических процессов при термических обработках с использованием инфракрасного, ультразвукового и электромагнитного нагрева. Второе — прямые задачи определения остаточные напряжения, которые возникают после применения тех или иных технологических обработок. Третье — обратные задачи неразрушающего определения температуры и напряженно-деформированного состояния, а также задачи идентификации структуры объектов и физических свойств материала на основании данных измерений параметров ИК-излучения и поглощения.

Отримано 08.12.05